Dreiwertige Logik I

Definition des Ausdrucks der dreiwertigen Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: $\alpha \to \{0, 1, \times\}$

Wertberechnung:

– $w^d_\alpha(p) = \alpha(p)$ für jede Variable p

– $w^d_\alpha(\neg A)$, $w^d_\alpha((A \wedge B))$, $w^d_\alpha((A \vee B))$ und $w^d_\alpha((A \vee B))$ entsprechend folgender Tabellen

A	$\neg A$
0	1
$\times$	$\times$
1	0

$\wedge$	0	$\times$	1
0	0	0	0
$\times$	0	$\times$	$\times$
1	0	$\times$	1

$\vee$	0	$\times$	1
0	0	$\times$	1
$\times$	$\times$	$\times$	1
1	1	1	1

$\to$	0	$\times$	1
0	1	1	1
$\times$	$\times$	1	1
1	0	$\times$	1

– $w^d_\alpha((A \leftrightarrow B)) = w^d_\alpha(((A \to B) \wedge (B \to A)))$.

Dreiwertige Logik II

$\times = \frac{1}{2}$

$w_\alpha^d(\neg A) = 1 - w_\alpha^d(A)$

$w_\alpha^d((A \wedge B)) = \min\{w_\alpha^d(A), w_\alpha^d(B)\}$

$w_\alpha^d((A \vee B)) = \max\{w_\alpha^d(A), w_\alpha^d(B)\}$

Satz:
Für einen aussagenlogischen Ausdruck A der dreiwertigen Logik ist es entscheidbar, ob A eine Tautologie oder erfüllbar oder eine Kontradiktion ist.

Fuzzy-Logik

Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_M : G \to [0,1]$

Definition des Ausdrucks der Fuzzy-Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: α ist Zugehörigkeitsfunktion

Wertberechnung:

– $w_\alpha^f(p) = \alpha(p)$ für eine Variable p,
– $w_\alpha^f(\neg A) = 1 - w_\alpha^f(A)$,
– $w_\alpha^f((A \wedge B)) = \min\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,
– $w_\alpha^f((A \vee B)) = \max\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,
– $w_\alpha^f((A \to B)) = \min\{1, 1 + w_\alpha^f(B) - w_\alpha^f(A)\}$,
– $w_\alpha^f((A \leftrightarrow B)) = 1 - |w_\alpha^f(A) - w_\alpha^f(B)|$.

Ausdruck der temporale Logik

Definition:
Die Menge $tausd$ der temporalen aussagenlogischen Ausdrücke wird induktiv als Menge von Wörtern über einer Menge var von Variablen und den Symbolen

$$\{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, F, G, F^{\infty}, G^{\infty}, U, B, X\}$$

wie folgt definiert:

1. Jede Variable $p \in var$ gehört zu $tausd$.
2. Sind w und v Wörter aus $tausd$, so gehören auch die Wörter

   $\neg w,\ w \wedge v,\ w \vee v,\ w \rightarrow v,\ w \leftrightarrow v,$
   $Fw,\ Gw,\ F^{\infty}w,\ G^{\infty}w,\ wUv,\ wBv,\ Xw$

   zu $tausd$.
3. Ein Wort gehört nur dann zu $tausd$, wenn dies aufgrund der Bedingungen 1. und 2. der Fall ist.

Zeitlinien der temporalen Logik

Definition:
Unter einer Zeitlinie verstehen wir ein Paar $Z = (M, x)$, wobei
– M selbst ein Paar $M = (S, L)$ ist,
– S eine Menge ist (deren Elemente wir Zustände nennen),
– L eine Funktion von S in 2^{var} ist, und
– x eine Funktion von der Menge $\mathbf{N}_0$ in S.
(x liefert Folge $(x(0), x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$ von Werten aus S)

L definiert für jedes $s \in S$ eine Belegung durch
$$\alpha_s(p) = \begin{cases} 1 & p \in L(s) \\ 0 & p \notin L(s) \end{cases}$$
(x liefert Folge $(\alpha_{x(0)}, \alpha_{x(1)}, \alpha_{x(2)}, \ldots)$ von Belegungen)

$K : var \to 2^S$ mit $s \in K(p)$ genau dann, wenn $p \in L(s)$

Wertberechnung in der temporalen Logik I

Definition:
Der Wert $w_x^M(u)$ eines temporalen aussagenlogischen Ausdrucks $u \in tausd$ bez. einer Zeitlinie (M, x) wird induktiv über den Aufbau der Ausdrücke wie folgt definiert:

Für eine Variable $p \in var$ gilt $w_x^M(p) = 1$ genau dann, wenn $p \in L(x(0))$ gilt.

Sind $w_x^M(u)$ und $w_x^M(v)$ bereits definiert, so setzen wir:

– $w_x^M(\neg u) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = 0$ gilt,

– $w_x^M(u \wedge v) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v) = 1$ gelten,

– $w_x^M(u \vee v) = 0$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v) = 0$ gelten,

– $w_x^M(u \rightarrow v) = 0$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = 1$ und $w_x^M(v) = 0$ gelten,

– $w_x^M(u \leftrightarrow v) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v)$ gilt,

Wertberechnung in der temporalen Logik II

- $w_x^M(Fu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^j}^M(u) = 1$ für ein $j \geq 0$ gilt,
- $w_x^M(Gu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^j}^M(u) = 1$ für alle $j \geq 0$ gilt,
- $w_x^M(F^\infty u) = 1$ gilt genau dann, wenn es zu jedem $j \geq 0$ ein $k \geq j$ mit $w_{x^k}^M(u) = 1$ gibt,
- $w_x^M(G^\infty u) = 1$ gilt genau dann, wenn es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $w_{x^k}^M(u) = 1$ für alle $k \geq j$ gilt,
- $w_x^M(uUv) = 1$ gilt genau dann, wenn es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $w_{x^j}^M(v) = 1$ und $w_{x^k}^M(u) = 1$ für $0 \leq k < j$ gelten,
- $w_x^M(uBv) = 1$ gilt genau dann, wenn es für jedes $j \geq 1$ mit $w_{x^j}^M(v) = 1$ ein $k < j$ mit $w_{x^k}^M(u) = 1$ gibt,
- $w_x^M(Xu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^1}^M(u) = 1$ gilt.

Semantische Äquivalenz in der temporalen Logik

Definition:
i) Zwei Ausdrücke $u \in tausd$ und $v \in tausd$ heißen semantisch äquivalent in der temporalen Aussagenlogik, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v)$ für alle Zeitlinien (M, x) gilt.

ii) Ein Ausdruck $u \in tausd$ der temporalen Aussagenlogik heißt erfüllbar, wenn es eine Zeitlinie (M, x) mit $w_x^M(u) = 1$ gibt.

iii) Ein Ausdruck $u \in tausd$ heißt Tautologie in der temporalen Aussagenlogik, wenn $w_x^M(u) = 1$ für alle Zeitlinien (M, x) gilt.

Bezeichnung: $u \equiv_t v$

Semantische Äquivalenzen der temporalen Logik I

Satz:
Für beliebige $u \in tausd$ und $v \in tausd$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

i) $Fu \equiv_t ((u \vee \neg u)Uu$,

ii) $Gu \equiv_t \neg F \neg u$,

iii) $F^\infty u \equiv_t GFu$,

iv) $G^\infty u \equiv_t \neg F^\infty \neg u$,

v) $uBv \equiv_t \neg((\neg u)Uv))$.

Satz:
Zu jedem Ausdruck A der temporalen Aussagenlogik gibt es einen Ausdruck B der temporalen Aussagenlogik, der $A \equiv_t B$ erfüllt und nur die Operatoren $\neg$, $\wedge$, U und X enthält.

Semantische Äquivalenz in der temporalen Logik II

Satz:
Für beliebige $u \in tausd$, $v \in tausd$ und $w \in tausd$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

i) $HHu \equiv_t Hu$ für $H \in \{F, G, F^\infty, G^\infty\}$,
ii) $XHu \equiv_t HXu$ für $H \in \{F, G, F^\infty, G^\infty\}$,
iii) $X(uUv) \equiv_t ((Xu)U(Xv))$,
iv) $H(u \vee v) \equiv_t (Hu \vee Hv)$ für $H \in \{F, F^\infty\}$,
v) $H(u \wedge v) \equiv_t (Hu \wedge Hv)$ für $H \in \{G, G^\infty\}$,
vi) $\neg Xu \equiv_t X\neg u$,
vii) $X(u \circ v) \equiv_t (Xu \circ Xv)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
viii) $((u \wedge v)Uw) \equiv_t ((uUw) \wedge (vUw))$,
ix) $(uU(v \vee w)) \equiv_t ((uUv) \vee (uUw))$.

Semantische Äquivalenz in der temporalen Logik III

Satz:
Für beliebige Ausdrücke $u \in tausd$ und $v \in tausd$ sind die folgenden Ausdrücke Tautologien der temporalen Aussagenlogik:

i) $(u \rightarrow Fu)$ und $(Gu \rightarrow u)$ und $(Gu \rightarrow Fu)$,

ii) $(Xu \rightarrow Fu)$ und $(Gu \rightarrow Xu)$ und $(Gu \rightarrow XGu)$,

iii) $((uUv) \rightarrow Fv)$,

iv) $((Gu \vee Gv) \rightarrow G(u \vee v))$ und $(F(u \wedge v) \rightarrow (Fu \wedge Fv))$,

v) $(((uUw) \vee (vUw)) \rightarrow ((u \vee v)Uw))$ und
$((uU(v \wedge w)) \rightarrow ((uUv) \wedge (uUw)))$,

vi) $(u \wedge G(u \rightarrow Xu)) \rightarrow Gu)$.

Entscheidbarkeit in der temporalen Logik

Satz:
Das Erfüllbarkeitsproblem der temporalen Aussagenlogik

$Gegeben$: Ausdruck $u \in tausd$ der temporalen Aussagenlogik
$Frage$: Ist u erfüllbar?

ist entscheidbar.

Ausdruck der modalen Logik

Definition:
Die Menge $mausd$ der modalen aussagenlogischen Ausdrücke wird induktiv als Menge von Wörtern über einer Menge von Variablen aus var und den Symbolen $(,\ ),\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \diamond,\ \Box$ wie folgt definiert:

1. Jede Variable $p \in var$ gehört zu $mausd$.
2. Sind A und B Wörter aus $mausd$, so gehören auch die Wörter

$$\neg A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B),\ \diamond A,\ \Box A$$

   zu $mausd$.
3. Ein Wort gehört nur dann zu $mausd$, wenn dies aufgrund endlich oftmaliger Anwendung von 1. und 2. der Fall ist.

Belegung in der modalen Logik

Unter einem *Rahmen* $\mathcal{R}$ verstehen wir einen (gerichteten) Graphen $\mathcal{R} = (S, R)$.
Die Elemente der Menge S nennen wir *Situationen*.
Durch R werden die Beziehungen zwischen den Situationen aus S beschrieben. Falls $(s, t) \in R$, so nennen wir die Situation t von s aus *erreichbar*.

Definition:
Es seien eine Menge var von Variablen und ein Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$ gegeben. Eine Belegung α ist eine Funktion $\alpha : S \times var \to \{0, 1\}$, die jeder Situation und jeder Variablen einen Wahrheitswert aus $\{0, 1\}$ zuordnet.

Wert in der modalen Logik

Definition: Es seien ein Rahmen $\mathcal{R} = (S, R)$ und eine Belegung α gegeben. Den Wert $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A)$ eines Ausdrucks $A \in mausd$ bez. eines Rahmens $\mathcal{R} = (S, R)$, einer Belegung α und einer Situation $s \in S$ definieren wir induktiv durch folgende Setzungen:

– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(p) = \alpha_s(p)$ für eine Variable $p \in var$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\neg A) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \wedge B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 1$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \vee B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 0$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \rightarrow B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = 1$ und $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B) = 0$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}((A \leftrightarrow B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(A) = w_\alpha^{\mathcal{R},s}(B)$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\diamond A) = 1$ genau dann, wenn es gibt ein $r \in S$ mit $(s, r) \in R$ mit $w_\alpha^{\mathcal{R},r}(A) = 1$,
– $w_\alpha^{\mathcal{R},s}(\Box A) = 1$ genau dann, wenn für alle $r \in S$ mit $(s, r) \in R$ gilt $w_\alpha^{\mathcal{R},r}(A) = 1$.