Logik für Bachelor

Übungsblatt 8
(für die 50. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2008/2009

Magdeburg, 2. Dezember 2008

1. Es sei $\mathcal{S}_1$ die Signatur, die durch

$$K = \emptyset, \quad R_2 = \{r\}, \quad R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 3$$

gegeben ist. Ferner seien

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x r(x,x), \\ A_2 &= \forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x)), \\ A_3 &= \forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z)). \end{aligned}$$

Geben Sie Modelle für die folgenden vier Mengen an:

a) $\{A_1, A_2, A_3\}$,
b) $\{A_1, A_2, \neg A_3\}$,
c) $\{A_1, \neg A_2, A_3\}$,
d) $\{\neg A_1, A_2, A_3\}$.

2. Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Tautologien sind, falls A und B beliebige prädikatenlogische Ausdrücke sind.

a) $(\forall x A \to \exists x A)$
b) $(\exists x A \to \forall x A)$
c) $(\forall x (A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B))$
d) $(\forall x (A \vee B) \leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B))$
e) $(\exists x (A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B))$
f) $(\exists x (A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B))$

3. Man beweise, dass weder $\forall x \exists y r(x,y)$ eine Folgerung von $\exists x \forall y r(x,y)$ ist, noch umgekehrt.

4. Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit

$$F_1 = \{f\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$

sowie $A = \forall x \exists y r(x, y, f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.

a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.