**Prof. Dr. Jürgen Dassow**
**Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg**
**Fakultät für Informatik**

# P E T R I — N E T Z E

**Vorlesungsskript**

Magdeburg, Oktober 2008 – Januar 2009

# Inhaltsverzeichnis

Bei der zweiten Folge ist die Situation völlig anders. Jeder der Philosophen kann die Chance zum Essen auch nutzen und isst während des Ablaufs der Folge sogar „unendlich" oft. Dieser Ablauf benachteiligt keinen Philosophen, ist also gerecht/fair.

Bei der dritten Folge kommt zwar jeder der Philosophen „unendlich" oft mal zum Essen, aber die Abstände zwischen zwei Essen werden für den ersten, dritten und vierten Philosophen werden beliebig lang, was praktisch auch zum Verhungern dieser drei Philosophen führt.

In diesem Abschnitt wollen wir einige Konzepte einführen, die die Gerechtigkeit/Fairness/Parteilichkeit von Abläufen in Petri-Netzen beschreiben können.

**Definition 3.79** *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $w = t_1 t_2 \cdots = (t_i)_{i \geq 1}$ eine unendliche Folge von Transitionen aus $T$. Wir nennen $w$ einen Ablauf in $N$, wenn es eine unendliche Folge $m_1, m_2, \ldots$ von Markierungen von $N$ derart gibt, dass für $i \geq 1$ die Beziehungen*

$$t_i^- \leq m_{i-1} \text{ und } m_{i+1} = m_i + \Delta(t_i)$$

*gelten.*

Entsprechend der Definition kann die unendliche Folge $(t_i)$ also geschaltet werden und dabei gilt

$$m_0 \, [t_1 > m_1 \, [t_2 > m_2 \, [t_3 > m_3 \, [t_4 > \ldots [t_i > m_i \, [t_{i+1} \ldots$$

Für einen gegebenen Ablauf $w = (t_i)$ werden wir die zugehörige unendliche Folge von Markierungen mit $(m_i^w)$ bezeichnen. Es gelten dann $m_i^w = m_0 + \Delta(t_1 t_2 \ldots t_i)$ für $i \geq 1$ und $m_j^w = m_i^w + \Delta(t_{i+1} t_{i+2} \ldots t_j)$ für $j > i \geq 1$.

Aus der Definition eines Ablaufs erhalten wir sofort die folgende Aussage.

**Folgerung 3.80** *Eine unendliche Folge $w = (t_i)$ von Transitionen eines Petri-Netzes $N$ ist genau dann ein Ablauf in $N$, wenn für jedes $i \geq 1$ die Folge $t_1 t_2 \ldots t_i$ in $L(N, m_0)$ liegt.* □

Die drei Folgen aus (3.2), (3.3) und (3.4) sind Abläufe im Netz der fünf Philosophen aus Abbildung 1.5.

**Satz 3.81** *Für ein Petri-Netz $N$ ist es entscheidbar, ob es einen Ablauf in $N$ gibt.*

*Beweis.* Wir untersuchen zuerst, ob $N$ beschränkt ist. Ist $N$ unbeschränkt, so gibt es offenbar einen Ablauf, da wir auf mindestens eine Stelle eine beliebig große Anzahl von Marken bringen müssen.

Ist $N$ beschränkt, so berechnen wir den Erreichbarkeitsgraphen von $N$. Ein Ablauf entspricht einem unendlichen Weg im Erreichbarkeitsgraphen. Die Existenz unendlicher Wege in einem Graphen ist genau dann gegeben, wenn der Graph einen Kreis enthält. Es bleibt daher nur zu testen, ob der Erreichbarkeitsgraph von $N$ einen Kreis enthält. Dies kann mit Varianten von Breitensuche oder Tiefensuche geschehen. □

**Definition 3.82** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und $w = (t_i)$ ein Ablauf in $N$.*

*i) Wir nennen $w$* unparteilich (bez. $T'$)*, wenn jede Transition (aus $T'$) in $w$ unendlich oft mal vorkommt.*

*ii) Wir nennen $w$* gerecht (bez. $T'$)*, wenn für jede Transition $t$ (aus $T'$) Folgendes gilt: Wenn für fast alle[2] $i \geq 1$ die Beziehung $t^- \leq m^w_{i-1}$ erfüllt ist, so kommt $t$ unendlich oft mal in $w$ vor.*

*iii) Wir nennen $w$* fair (bez. $T'$)*, wenn für jede Transition $t$ (aus $T'$) Folgendes gilt: Wenn für unendlich viele $i \geq 1$ die Beziehung $t^- \leq m^w_{i-1}$ erfüllt ist, so kommt $t$ unendlich oft mal in $w$ vor.*

Bei der Gerechtigkeit und Fairness wird im Gegensatz zur Unparteilichkeit nur gefordert, dass eine Transition unendlich oft mal vorkommt, wenn diese Transition unendlich oft mal aktiviert ist. Ist eine Transition nur endlich oft mal aktiviert, so braucht sie bei Gerechtigkeit und Fairness nicht betrachtet zu werden (oder anders, für eine derartige Transition sind die Bedingungen für Gerechtigkeit und Fairness stets erfüllt). Der Unterschied zwischen Gerechtigkeit und Fairness besteht darin, dass bei der Gerechtigkeit die Transition von einem Moment an stets aktiviert sein muss, während bei der Fairness die Transition nicht von einem Zeitpunkt an ständig, aber unendlich oft mal aktiviert sein muss.

Wir betrachtet nun die Abläufe $w_1$ und $w_2$ aus (3.2) und (3.3) im Netz der fünf Philosophen aus Abbildung 1.5.

Der Ablauf $w_1$ ist unparteilich bezüglich $\{h_0, h_2\}$ (weil diese beiden Transitionen unendlich oft mal in $w_1$ vorkommen), während $w_1$ parteilich (bez. der Menge $T$ aller Transitionen) ist (da z.B. $h_1$ hierin überhaupt nicht, also erst recht nicht unendlich oft mal vorkommt). Die Folge $w_1$ ist gerecht, denn die Transitionen $n_0, h_0, n_1, h_1$ kommen in der Folge unendlich oft vor und keine der restlichen Transitionen ist für fast alle $i \geq 1$ aktiviert. Außerdem ist $w_1$ fair bezüglich $\{n_0, n_1, n_2\}$, da $n_0$ und $n_2$ unendlich oft in $w_1$ vorkommen und $n_1$ nie aktiviert ist. Dagegen ist $w_1$ nicht fair bezüglich $\{n_0, n_3\}$, da $n_3$ unendlich oft aktiviert ist (immer nach dem Schalten von $h_2$), aber nicht unendlich oft mal in $w_1$ vorkommt.

Der Ablauf $w_2$ ist offensichtlich unparteilich, gerecht und fair.

Wir geben nun zwei einfache Beziehungen zwischen den in Definition 3.82 gegebenen Konzepten.

**Lemma 3.83** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $T' \subseteq T$ eine Menge von Transitionen und $w$ ein Ablauf in $T$.*

*i) Wenn $w$ unparteilich (bez. $T'$) ist, dann ist $w$ fair (bez. $T'$).*

*ii) Wenn $w$ fair (bez. $T'$) ist, dann ist $w$ gerecht (bez. $T'$).*

*Beweis.* i) folgt sofort aus den Definitionen.

ii) Es sei $w$ ein Ablauf. Wenn $t$ für fast alle $m^w_i$ aktiviert ist, so ist $t$ unendlich oft aktiviert. Aus der Fairness von $w$ folgt nun, dass $t$ unendlich oft mal in $w$ vorkommt. Damit ist $w$ als gerecht nachgewiesen. □

[2]Eine Aussage gilt für fast alle $i \geq 0$, wenn sie nur für endlich viele $i$ nicht gilt. Dies bedeutet, dass es ein $j$ so gibt, dass die Aussage für alle $i \geq j$ gilt.

Wir diskutieren nun die Umkehrbarkeit der Aussagen aus Lemma 3.83. Aus unseren Beispielen ist zu ersehen, dass die Umkehrungen im Allgemeinen nicht gelten. Jedoch sind sie unter schwachen Zusatzvoraussetzungen gültig.

**Satz 3.84** *Wenn das Petri-Netz $N$ konfliktfrei ist, dann ist jeder gerechte Ablauf auch fair.*

*Beweis.* Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies Petri-Netz, $t$ eine Transition aus $T$ und $m$ eine erreichbare Markierung, bei der $t$ aktiviert ist. Ferner sei $m'$ eine von $m$ durch Schalten von $t' \neq t$ erreichbare Markierung. Da $N$ konfliktfrei ist, ist die Menge $\{t, t'\}$ nebenläufig. Nach Folgerung 3.15 sind dann $tt'$ und $t't$ Schaltfolgen für $m$. Daher ist $t$ auch bei $m'$ aktiviert. Dieser Prozess kann fortgesetzt werden. Damit ist gezeigt, dass eine Markierung, bei der $t$ nicht aktiviert ist, nur dann erreicht werden kann, wenn $t$ in der zugehörigen Schaltfolge enthalten ist.

Es sei nun $w$ ein gerechter Ablauf in $N$. Falls $t$ für fast alle $m_i^w$ aktiviert ist, so kommt $t$ wegen der Gerechtigkeit von $w$ in $w$ unendlich oft vor. Sei $t$ nun für unendlich viele, aber nicht für fast alle $m_i^w$ aktiviert. Dann muss $t$ immer wieder schalten, da sonst $t$ von einem $i$ an immer und damit für fast alle $m_i^w$ aktiviert wäre. Damit kommt $t$ unendlich oft mal in $w$ vor. □

**Lemma 3.85** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies Petri-Netz, $t$ und $t'$ zwei Transitionen aus $T$, $q$ ein Wort über $T$, in dem $t$ nicht vorkommt und $m$ eine erreichbare Markierung mit $(t')^- \leq m$ und $qt \in L(N, m)$. Dann existiert ein Wort $r$ über $T$ mit folgenden Eigenschaften: $t$ vorkommt in $r$ nicht vor, $|r| \leq |q|$ und $t'rt \in L(N, m)$.*

*Beweis.* Wir betrachten zuerst den Fall, dass $t'$ in $q$ nicht vorkommt. Wir zeigen durch Induktion über die Länge von $q$, dass $qt \in L(N, m + \Delta(t'))$. Für $q = \lambda$ folgt die Aussage daraus, dass dann $t$ und $t'$ bei $m$ aktiviert sind und wegen der Konfliktfreiheit das Wort $t't$ geschaltet werden kann (siehe Folgerung 3.15). Die Induktionsvoraussetzung ist dann, dass

$$qt \in L(N, m),\ (t')^- \leq m,\ \#_{t'}(q) = 0 \text{ impliziert } qt \in L(N, m + \Delta(t')).$$

Wir haben die Induktionsbehauptung

$$t^*qt \in L(N, m),\ (t')^- \leq m,\ \#_{t'}(q) = 0 \text{ impliziert } t^*qt \in L(N, m + \Delta(t'))$$

für jedes $t^* \in T$ zu zeigen (wir vergrößern die Länge von $q$ durch Anfügen eines Buchstaben $t^*$ zu Beginn des Wortes). Wegen $t^*qt \in L(N, m)$ ist $t^*$ bei $m$ aktiviert und es gilt $qt \in L(N, m + \Delta(t^*))$. Da $t'$ bei $m$ ebenfalls aktiviert ist, kann wegen der Konfliktfreiheit $t^*t'$geschaltet werden. Damit ist $t'$ bei $m + \Delta(t^*)$ aktiviert. Aus der Induktionsvoraussetzung (angewandt auf $m + \Delta(t^*)$) ergibt sich, dass $qt \in L(N, m + \Delta(t^*) + \Delta(t'))$. Da $t^*$ bei $m$ aktiviert ist, erhalten wir damit $t^*qt \in L(N, m + \Delta(t'))$. Wir wählen nun einfach $r = q$. Offenbar sind nach vorstehenden Überlegungen nun alle Bedingungen erfüllt.

Wenn $t'$ in dem Wort $q$ vorkommt, gibt es eine Zerlegung $q = ut'v$ mit $u \in (T \setminus \{t'\})^*$. Wir wählen nun $r = uv$. Dann gilt $|r| < |q|$. Es bleibt zu zeigen, dass $t'uvt \in L(N, m)$ gilt. Für $u = \lambda$ ist dies wegen $q = t'v$ trivial. Für die nichtleeren Wörter geben wir wieder einen Induktionsbeweis über die Länge, der analog zu dem Beweis im anderen Fall geführt wird. □

**Satz 3.86** *Wenn das Petri-Netz $N$ konfliktfrei und lebendig ist, dann ist jeder gerechte Ablauf auch unparteilich.*

*Beweis.* Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein konfliktfreies und lebendiges Petri-Netz und $w = (t_i)$ ein gerechter Ablauf in $N$.

Es sei $t$ eine Transition von $N$. Aus Satz 3.84 erhalten wir, dass $w$ fair ist. Wenn $t$ bei unendlich vielen Markierungen $m_i^w$ aktiviert ist, so kommt daher $t$ unendlich oft mal in $w$ vor.

Es sei $T'$ die Menge aller Transitionen $t$, die nur bei endlich vielen $m_i^w$ aktiviert sind. Dann gibt es ein $j$, so dass jedes $t' \in T'$ bei allen $m_k^w$ mit $k \geq j$ nicht aktiviert ist. Für jedes $i \geq j$ sei $l_i$ die Länge des kürzesten Wortes $q_i$, für das ein $t' \in T'$ mit $q_i t' \in L(N, m_i^w)$ existiert. Da das Netz lebendig ist, gibt es für jedes $t' \in T'$ Schaltfolgen $q'$ mit $q't' \in L(N, m_i^w)$; folglich existiert für derartige Schaltfolge eine mit minimaler Länge, d.h. $l_i$ existiert. Da aber kein $t' \in T'$ bei $m_i^w$ aktiviert ist, muss $l_i > 0$ für $i \geq j$ gelten. Wir wählen nun $k$ so, dass $l_k$ minimal unter den $l_i$, $i \geq j$, ist. Es seien $q$ ein Wort und $t \in T'$ eine Transition mit $|q| = l_k$ und $qt \in L(N, m_k^w)$. Offensichtlich ist $t \neq t_k$, da $t$ bei $m_k^w$ nicht aktiviert ist, aber $t_k$ aktiviert ist. Es gilt also noch $t_k^- \leq m_k^w$. Wegen der Minimimalität von $q$ hinsichtlich der Länge gilt sogar $q \in (T \setminus T')^*$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.85 erfüllt. Es gibt folglich ein $r$ mit $t_k r t \in L(N, m_k^w)$ und $|r| \leq |q|$. Damit ergibt sich $rt \in L(N, m_{k+1}^w)$. Damit ist $r$ eine bei der Bildung des Minimums zugelassene Schaltfolge. Wegen der Minimalität von $q$ gilt daher $|r| = |q|$. Aus dem Beweis von Lemma 3.85 ergibt sich, dass $t_k$ in $q$ nicht vorkommt und $r = q$ gewählt werden kann (nur in diesem Fall gilt $|r| = |q|$). Wegen $q = r$ und $rt \in L(n, m_{k+1}^w)$ erhalten wir analog zu Obigem

$$t \neq t_{k+1},\ t_{k+1}^- \leq m_{k+1}^w,\ q \in (T \setminus T')^*,\ qt \in L(n, m_{k+1}^w),$$

womit wir wie oben nachweisen können, dass $t_{k+1}$ nicht in $q$ vorkommt.

Wir fahren so fort und erhallten, dass keine der Transitionen $t_i$ mit $i \geq k$ in $q$ vorkommt. Nach Definition von $T'$ sind dies aber gerade alle Transitionen, die bei unendlich vielen $m_i^w$ aktiviert sind. Da in $q$ auch keine Transitionen aus $T'$ vorkommen, ist $q$ das leere Wort. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von $q$. Der Widerspruch kann nur dadurch aufgelöst werden, dass $T'$ leer ist.

Also sind alle Transitionen unendlich oft aktiviert, und kommen in $w$ unendlich oft vor. □

Wir geben nun einige Beziehungen zwischen Parteilichkeit und der Existenz von $T$-Invarianten.

**Satz 3.87** *i) Wenn das Petri-Netz $N$ eine realisierbare $T$-Invariante besitzt, deren Träger nicht alle Transitionen enthält, so gibt es in $N$ einen parteilichen Ablauf.*

*ii) Ist das Petri-Netz $N$ beschränkt und gibt es einen parteilichen Ablauf in $N$, so hat $N$ eine realisierbare $T$-Invariante, deren Träger nicht alle Transitionen enthält.*

*Beweis.* i) Wenn $x$ eine realisierbare $T$-Invariante von $N$ ist, so gibt es eine Markierung $m \in R(N, m_0)$ und eine Schaltfolge $q$ für $m$ mit $\pi(q)^T = x$ und $m\,[q > m$. Für ein beliebiges Wort $p$ mit $m_0\,[p > m$ ist dann $pq^\omega$ ein Ablauf in $N$. Da der Träger von $x$ nicht alle Transitionen enthält, kommen in $q$ nicht alle Transitionen vor. Damit kommen nicht alle Transitionen in $pq^\omega$ unendlich oft vor, d.h. $pq^\omega$ ist ein parteilicher Ablauf.

ii) Wenn $w = (t_i)$ eine parteiliche Ausführung ist, so gibt es eine Transition $t$ und ein $j \geq 1$ derart, dass $t \neq t_i$ für $i \geq j$ gilt. Da $N$ überdies beschränkt ist, gibt es zwei Zahlen $k_1$ und $k_2$ derart, dass $k_1 < k_2$ gilt und die Markierungen $m^w_{k_1}$ und $m^w_{k_2}$ übereinstimmen. Wir setzen $q = t_{k_1+1}t_{k_1+2}\dots t_{k_2}$. Damit gilt $\Delta(q) = 0$ für die Schaltfolge $q$ für $m^w_{k_1}$. Folglich ist $\pi(q)^T$ eine $T$-Invariante. Ferner kommt $t$ in $q$ nicht vor. Somit enthält der Träger von $\pi(q)^T$ nicht alle Transitionen. Der Vektor $\pi(q)^T$ erfüllt daher alle geforderten Eigenschaften. $\square$

**Folgerung 3.88** *i) Bei einem beschränkten Petri-Netz ist genau dann jeder Ablauf unparteilich, wenn jede realisierbare $T$-Invariante das Netz überdeckt.*

*ii) In einem beschränkten Petri-Netz, bei dem jede minimale $T$-Invariante das Netz überdeckt, ist jeder Ablauf in $N$ unparteilich.*

*Beweis.* i) folgt aus Satz 3.87 sofort.

ii) Wenn die minimalen $T$-Invarianten das Netz überdecken, so überdecken alle $T$-Invarianten das Netz, da diese als Linearkombination minimaler $T$-Invarianten mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden können. Damit folgt ii) aus i). $\square$

Wir haben bereits bei der einleitend betrachteten Folge in (3.4) festgestellt, dass einige Philosophen verhungern, obwohl sie unendlich oft essen, da ihre Denkphasen beliebig lang werden. Es ist also nicht nur von Interesse, wie oft eine Transition schaltet, sondern auch wie lang die Abschnitte werden können, in denen eine Transition nicht schaltet. Dies wird durch die Abweichung erfasst, die misst, wie oft eine Transition $t$ schalten kann, bevor $t'$ aktiviert ist.

**Definition 3.89** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Metz, $m$ eine Markierung von $N$ und $U$ und $W$ zwei Teilmengen von $T$.*

*i) Als* Abweichung der Transitionsmenge $U$ von $W$ bei $m$ in $N$ *bezeichnen wir die Zahl*

$$Abw(m, U, W) = \sup\{\#_U(q) \mid \#_W(q) = 0 \text{ und } q \in L(N, m^*) \text{ für ein } m^* \in R(N, m)\}.$$

*ii) Die* Relation $BA[m]$ der beschränkten Abweichung bei $m$ *wird als Menge aller Paare $(U, W)$ definiert, für die $Abw(m, U, W)$ endlich ist.*

Falls es keine Schranke für die Länge derartiger $q$ gibt, d.h. zu jeder Zahl $k$ gibt es ein $q_k$ mit den geforderten Eigenschaften und $|q| \geq k$, so ist das Supremum $\omega$.

Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $q$ mit einer Transition aus $U$ beginnt. Wäre dies nicht der Fall, d.h. $q = rtr'$ mit $\#_W(q) = 0$, $\#_U(r) = 0$, $t \in U$ und $q \in L(N, m^*)$ für ein erreichbare Markierung $m^*$. Es sei $m^*[r > m^*_1$. Dann gilt $\#_U(q) = \#_U(tr')$, $\#_W(tr') = 0$ und $tr' \in L(N, m^*_1)$, wobei $m^*_1$ eine erreichbare Markierung ist. Daher können wir anstelle von $q$ auch $tr'$ und erhalten den gleichen Wert für die Abweichung.

Falls $U = \{t\}$ und/oder $W = \{t'\}$, so schreiben wir anstelle von $abw(U, W)$ auch einfach $Abw(t, W)$ bzw. $Abw(U, t')$ bzw. $Abw(t, t')$

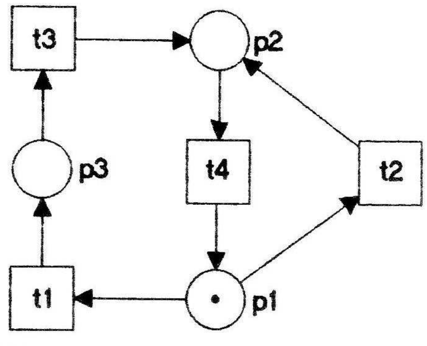


Abbildung 3.13: Petri-Netz $N_{10}$

**Beispiel 3.90** Wir betrachten das Netz $N_{10}$ aus Abbildung 3.13 Wir geben in der folgenden Tabelle einige Werte für die Abweichung einer Transition $t$ von einer anderen Transition $t'$. Zur Begründung des Wertes für $Abw(m_0, t, t')$ geben wir auch stets die Markierung $m*$ und die Folge $q$.

| $t$ | $t'$ | $Abw(m_0, t, t')$ | $m*$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $t_2$ | $\omega$ | $m_0$ | $(t_1t_3t_4)^k$ für beliebiges $k$ |
| $t_2$ | $t_1$ | $\omega$ | $m_0$ | $(t_2t_4)^k$ für beliebiges $k$ |
| $t_1$ | $t_3$ | 1 | $m_0$ | $t_1$ |
| $t_3$ | $t_1$ | 1 | $(0,0,1)$ | $t_3(t_4t_2)^r t_4$ für alle $r$ |
| $t_3$ | $t_4$ | 1 | $(0,0,1)$ | $t_3$ |
| $t_4$ | $t_3$ | $\omega$ | $m_0$ | $(t_2t_4)^k$ für beliebiges $k$ |

Wir geben nur eine Begründung für die erste, die dritte und die vierte Zeile der Tabelle; die analogen Betrachtungen in den anderen Fällen bleiben dem Leser überlassen.

Das Wort $t_1t_3t_4$ ist eine Schaltfolge für $m_0$ und produziert wieder die Anfangsmarkierung. Daher ist $t_1t_3t_4)^k$ für jede positive natürliche Zahl $k$ eine Schaltfolge für $m_0$. Da $m_0$ trivialerweise erreichbar ist und $t_2$ nicht in $(t_1t_3t_4)^k$ nicht vorkommt, ist jede Folge $(t_1t_3t_4)^k$ bei der Bildung des Supremums zugelassen. Damit ist die Anzahl des Vorkommens von $t_1$ in den zugelassenen Folge beliebig groß. Also gilt $Abw(m_0, t_1, t_2) = \omega$.

Nach jedem Schalten von $t_1$ muss als nächste Transition $t_3$ geschaltet werden. Folglich ist die maximale Anzahl des Schaltens von $t_1$ bevor $t_3$ geschaltet wird, genau 1.

Durch Schalten von $t_1$ erreichen wir die Markierung $(0, 0, 1)$, in der $t_3$ aktiviert ist. Nach dem Schalten von $t_3$ können wir nun beliebig oft die Folge $t_4t_2$ schalten, wodurch die Anzahl der Vorkommen von $t_1$ zwar Null bleibt, aber auch die Anzahl der Vorkommen von $t_3$ nicht erhöht wird. Die andere Möglichkeit ist $t_4t_1$ zu schalten. Daher kann bis zum erstmaligen Schalten von $t_1$ die Transition $t_3$ höchstens einmal schalten.

Wir geben nun ein paar einfache Relation für die Abweichungen von Transitionsmengen.

**Folgerung 3.91** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Metz, $m$ eine Markierung von $N$ und $U$ und $W$ zwei Teilmengen von $T$.*

*i) Wenn $U \subseteq W$ ist, so gilt $Abw(m, U, W) = 0$.*
*ii) Wenn $U$ eine bei $m$ lebendige Transition enthält, ergibt sich $Abw(m, U, \emptyset) = \omega$.*

*Beweis.* i) Wegen $U \subseteq W$ erfüllt jedes Wort $q$ mit $\#_W(q) = 0$ auch $\#_U(q) = 0$.

ii) Die bei $m$ lebendige Transition aus $U$ kann in $N$ beliebig oft geschaltet werden, d.h. dass es zu jeder Zahl $k$ eine Schaltfolge $q$ gibt, in der $t$ öfter als $k$-mal vorkommt. Damit gilt $\#_U(q) \geq k$. Andererseits ist natürlich $\#_\emptyset(q) = 0$. Damit wird $Abw(m, U, \emptyset)$ beliebig groß, d.h. $Abw(m, U, \emptyset) = \omega$. □

**Satz 3.92** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Metz, $m$ eine Markierung von $N$ und $U, W, U_1, U_2, W_1$ und $W_2$ Teilmengen von $T$.*
*i) Wenn $U_1 \subseteq U_2$ gilt, so ist $Abw(m, U_1, W) \leq Abw(m, U_2, W)$.*
*ii) Wenn $W_1 \subseteq W_2$ gilt, so ist $Abw(m, U, W_1) \geq Abw(m, U, W_2)$,*
*iii) Es gilt $Abw(m, U_1 \cup U_2, W) \leq Abw(m, U_1, W) + Abw(m, U_2, W)$.*

*Beweis.* i) Die Aussage folgt sofort aus $\#_{U_1}(q) \leq \#_{U_2}(q)$ für alle Wörter $q$ über $T$.

ii) Da $\#_{W_2}(q) = 0$ die Beziehung $\#_{W_1}(q) = 0$ impliziert, sind bei $Abw(m, U, W_2)$ weniger Wörter bei der Bildung des Supremums zugelassen als bei $Abw(m, U, W_1)$. Damit folgt die behauptete Relation.

iii) Die Behauptung folgt sofort aus $\#_{U_1 \cup U_2}(q) \leq \#_{U_1}(q) + \#_{U_2}(q)$ (Buchstaben aus dem Durchschnitt werden auf der linken Seite nur einmal, auf der rechten Seite zweimal gezählt). □

Für disjunkte Mengen $U_1$ und $U_2$ gilt zwar $\#_{U_1 \cup U_2}(q) = \#_{U_1}(q) + \#_{U_1}(q)$, aber in Satz 3.92 iii) kann auch in diesem Fall das (echte) Kleinerzeichen stehen. Im Netz $N_{10}$ aus Abbildung 3.13 gilt z.B.

$$Abw(m_0, t_1, t_4) = Abw(m_0, t_2, t_4) = Abw(m_0, \{t_1, t_2\}, t_4) = 1,$$

wie man leicht erkennt.

**Satz 3.93** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ eine gewöhnliche Zustandsmaschine, $m$ eine Markierung von $N$ und $t_1$ und $t_2$ zwei Transitionen aus $T$. Dann gilt $Abw(m, t_1, t_2) \in \{0, 1, \omega\}$.*

*Beweis.* Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ eine gewöhnlich Zustandmaschine, $m$ eine Markirung von $N$ und $t_1$ und $t_2$ zwei Transitionen aus $T$, für die $Abw(m, t_1, t_2) \geq 2$ gilt. Dann gibt es Wort $q$ mit

$$\#_{t_1}(q) \geq 2,\ \#_{t_2}(q) = 0 \text{ und } q \in L(N, m') \text{ für ein } m' \in R(N, m).$$

Offenbar muss $q$ eine Zerlegung $q = rt_1q't_1q''$ haben. Da in einer Zustandsmaschine jede Transition nur eine Stelle im Vor- bzw. Nachbereich hat und die Zustandsmaschine gewöhnlich ist, wird bei jedem Schalten einer Transition immer nur eine Marke vom Vorbereich auf den Nachbereich verschoben. Daher gilt mit $m'\,[r > m''$ die Beziehung $m''\,[t_1q' > m''$. Somit ist jedes Anfangsstück von $r(t_1q')^\omega$ eine bei der Bildung des Supremums zugelassene Schaltfolge. Folglich gilt $Abw(m, t_1, t_2) = \omega$.

Damit sind $0, 1$ und $\omega$ die einzigen möglichen Werte für $Abw(m, t_1, t_2)$ für Transitionen $t_1$ und $t_2$ einer gewöhnliche Zustandsmaschine. Offensichtlich gelten für das Netz $N_{11}$ aus Abbildung 3.14 die Beziehungen

$$Abw(m_0, t_1, t_3) = 0,\ Abw(m_0, t_3, t_4) = 1 \text{ und } Abw(m_0, t_4, t_1) = \omega$$

($t_1$ kann in $N_{11}$ bei keiner erreichbaren Markierung geschaltet werden; auf jedes Schalten von $t_3$ folgt ein Schalten von $t_4$ und $(t_3t_4)^k$ ist für jedes $k$ eine Schaltfolge für $m_0$). Hiermit sind die drei möglichen Werte auch realisierbar. □

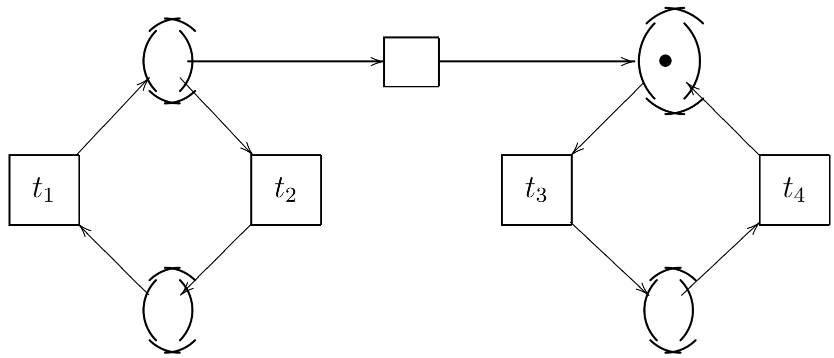


Abbildung 3.14: Netz $N_{11}$

Wir geben nun einen Zusammenhang zwischen der Abweichung und der Unparteilichkeit.

**Satz 3.94** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $m$ eine Markierung von $N$. Wenn jedes Paar $(t, t')$ von Transitionen in $BA[m_0]$ liegt, so ist jeder Ablauf in $N$ unparteilich.*

*Beweis.* Angenommen, es gibt einen parteilichen Ablauf $w = (t_i)$. Dann gibt es eine Transition $t \in T$, die in $w$ nur endlich oft vorkommt. Dann gibt es eine natürliche Zahl $j$ derart, dass für alle $i \geq j$ die Beziehung $t_i \neq t$ gilt. Wir setzen $U = T \setminus \{t\}$ und $q_k = t_{j+1} \dots t_k$ für $k > j$. Dann ergeben sich folgende Relationen

$$|q_k| = \#_U(q) = k - j + 1,\ q_k \in L(N, m_j^w),\ \#_t(q_k) = 0.$$

Hieraus folgt $abw(m_0, U, t) = \omega$, da $k$ beliebig groß gewählt werden kann. Da $U$ die Vereingung von endlich Einermengen ist, die jeweils aus genau einer Transition bestehen, folgt aus Satz 3.92 iii), dass für ein $t'$ in $U$ auch $Abw(m_0, t', t) = \omega$ gilt. □

Die Umkehrung von Satz 3.94 gilt im Allgemeinen nicht. Dazu betrachten wir das Netz $N_{12}$, das in Abbildung 3.15 mit seinem Überdeckungsgraphen gegeben ist. Wenn $k$ die Anzahl der Marken auf $p_1$ ist, so kann höchstens $k$-mal $t_1$ geschaltet werden, und dann muss wieder $t_2$ geschaltet werden. Analoges gilt für $t_2$ bezüglich der Marken auf $p_2$. Daher gibt es in jedem Ablauf $w = (t'_i)$ zu jeder Zahl $k$ Zahlen $i_1 \geq k$ und $i_2 \geq k$ mit $t'_{i_1} = t_1$ bzw. $t'_{i_2} = t_2$. Daher enthält jeder Ablauf unendlich viele Vorkommen von $t_1$ und $t_2$, d.h. jeder Ablauf ist unparteilich. Andererseits gilt $Abw(m_0, t_1, t_2) = \omega$, da auf $p_1$ eine beliebige Anzahl $k$ von Marken gebracht werden kann und dann $t_1$ auch $k$-mal hintereinander schalten kann.

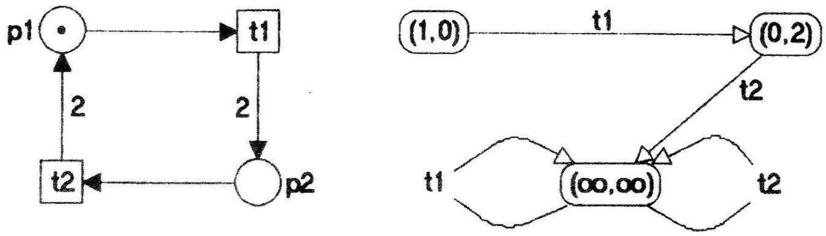


Abbildung 3.15: Petri-Netz $N_{12}$

**Satz 3.95** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein beschränktes Petri-Metz und $m$ eine Markierung von $N$. Wenn jeder Ablauf in $N$ unparteilich ist, so liegt jedes Paar $(t, t')$ von Transitionen in $BA[m_0]$.*

*Beweis.* Da $N$ beschränkt ist, ist $R(N, m_0)$ eine endliche Menge, die aus $K$ Markierungen bestehen möge.

Angenommen, es gibt Transtionen $t$ und $t'$ für die $Abw(m_0, t, t') = \omega$ gilt. Dann gibt es zu jeder Zahl $k$ eine erreichbare Markierung $m_k \in R(N, m_0)$ und ein Wort $q_k \in L(N, m_k)$, in dem $t$ mindestens $k$-mal und $t'$ nicht vorkommt. Wir wählen nun $k > K$. Dann gibt es eine Markierung $m'$, die beim Schalten von $q_k$ mindestens zweimal erreicht wird und daher Wörter $q, q', q''$ und $p$ derart, dass

$$q_k = qq'q'' \text{ und } m_0 \, [p > m_k \, [q > m' \, [q' > m'$$

gelten. Somit ist $w = pq(q')^\omega$ ein Ablauf in $N$, der aber nicht parteilich ist, da wegen $0 = \#_{t'}(q_k) \geq \#_{t'}(q') \geq 0$ die Transition $t'$ in $w$ nur endlioch oft vorkommt. Damit haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme erhalten. $\square$

Die Relation $BA[m_0]$ steht nach den beiden letzten Aussagen in engem Zusammenhang mit der Unparteilichkeit. Es ist daher von Interesse ein Verfahren zur Bestimmung von $BA[m_0]$ zu haben.

Es sei $G$ der Überdeckungsgraph des beschränkten Petri-Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$. $G$ habe die elementaren Kreise $k_1, k_2, \ldots k_r$ (dabei heißt ein Kreis $k$ elementar, wenn kein Teilweg von $k$ ein Kreis ist). Für $1 \leq i \leq r$ sei $q_i$ die Schaltfolge, die dem Kreis $k_i$ entspricht. Wir definieren dann für eine Teilmenge $U \subseteq T$ der Transitionen den Vektor

$$d(U) = (\#_U(q_1), \#_U(q_2), \ldots, \#_U(q_r))$$

und dessen Träger $supp(d(U))$ als die Menge der $i$ mit $\#_U(q_i) > 0$.

**Satz 3.96** *Es sei $N = (S, T, F.V, m_0)$ ein Petri-Netz mit dem Überdeckungsgraphen $G$.*

*i) Falls $G$ keinen Kreis enthält, so gilt $(U, W) \in BA[m_0]$ für beliebige $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$.*

*ii) Wenn $G$ die elementaren Kreise $k_1, k_2, \ldots k_r$ enthält, so gilt $(u, w) \in BA[m_0]$ genau dann, wenn $supp(d(U)) = supp(d(W))$ gilt.* $\square$

Wir verzichten hier auf einen Beweis, da dafür Kenntnisse über den Überdeckungsgraphen erforderlich sind, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht bereitstehen.

**Satz 3.97** *Für zwei gegebene Mengen $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$ von Transitionen eines Netzes $N = (S,T,F,V,m_0)$ ist es entscheidbar, ob $(U,W) \in BA[m_0]$ gilt.*

*Beweis.* Wir berechnen zuerst den Überdeckungsgraphen $HG$ von $N$. Als nächstes bestimmen wir die elementaren Kreise von $G$ (dies kann mittels der Breitensuche ähnlichen verfahren geschehen). Falls keine Kreise vorhanden sind, so gilt $(U,W) \in BA[m_0]$. Im anderen Fall berechnen wir $supp(d(U)$ und $supp(d(W)$. Stimmen diese beiden Mengen überein, so haben wir wegen Satz 3.96 $(U,W) \in BA[m_0]$; anderenfalls gilt $(U,W) \notin BA[m_0]$. □

Wir haben oben gesehen, dass die Abweichung kein Abstand sein kann, da sie nicht symmetrisch ist. Wir wollen nun eine Modifikation vornehmen, die einen Abstand lifert. Dabei werden wir auch noch eine Gewichtung der Transitionen vornehmen.

**Definition 3.98** *Es sei $N = (S,T,F.V.m_0)$ ein Petri-Netz, $U \subseteq T$ und $W \subseteq T$ zwei Mengen von Transitionen und $\chi$ eine Abbildung von $T$ in die Menge $\mathbf{N}$ der positiven natürlichen Zahlen.*

*i) Wir definieren den Spaltenvektor $\chi_{U,W}$ über den Transitionen durch*

$$\chi_{U,W} = \begin{cases} \chi(t) & \textit{falls } t \in U \textit{ und } t \notin W, \\ \chi(t) & \textit{falls } t \notin U \textit{ und } t \in W, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

*ii) Die* Synchronieabweichung der Transitionsmenge $U$ von der Transitionsmenge $W$ bezüglich $\chi$ *ist die Zahl*

$$SA(\chi,U,W) = \sup\{\pi(q) \cdot \chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \textit{ für ein } m \in R(N,m_0)\},$$

*und der* Synchronieabstand von $U$ und $W$ bezüglich $\chi$ *ist die Zahl*

$$D(\chi,U,W) = \max\{SA(\chi,U,W), SA(\chi,W,U)\}.$$

**Beispiel 3.99** Wir betrachten das Netz $N_{13}$ aus Abbildung 3.15. Es ist leicht zu sehen, dass alle Schaltfolgen Anfangsstücke des unendlichen Wortes $(t_1t_2t_1t_3)^\omega$ sind.

Wenn wir den Vektor $\chi = (1,1,1)$ wählen, so erhalten wir $SA(\chi,t_1,t_2) = \omega$, da für ein beliebiges $k$ das Wort $q = (t_1t_2t_1t_3)^k$ den Wert $\pi(q)\chi_{t_1,t_2} = 2k - k = k$ liefert, womit das Supremum bei $\omega$ liegt. Dagegen ist $SA(\chi,t_2,t_1) = 1$, denn bei jedem Wort aus mindestens zwei Buchstaben ist die Anzahl der $t_1$ mindestens so groß wie die Anzahl der $t_2$, während $t_2 \in L(N,m)$ mit $m_0\,[t_1 > m$ den Wert 1 liefert. Folglich gilt auch $D(\chi,t_1,t_2) = D(\chi(t_2,t_1) = \omega$.

Wählen wir dagegen $\chi = (1,2,2)$, so ergibt sich $SA(\chi,t,t') = 2$ und damit auch $D(\chi,t,t') = 2$ für beliebige verschiedene Transitionen $t$ und $t'$ aus $T$.

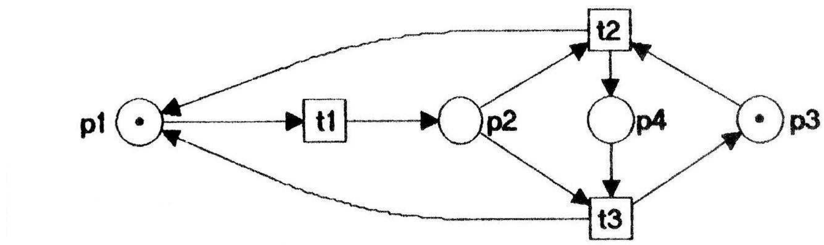


Abbildung 3.16: Petri-Netz $N_{13}$

Wir stellen nun eine Beziehung zwischen der Abweichung *Abw* und der Synchronieabweichung $SA$ her. Diese ergibt sich aus den folgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned}
SA(\chi, U, W) &= \sup\{\pi(q) \cdot \chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0)\} \\
&\geq \sup\{\pi(q) \cdot \chi_{U,W} \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q) = 0\} \\
&= \sup\{\sum_{t \in U \setminus W} \#_t(q)\chi_{U,W}(t) \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q) = 0\} \\
&\geq \sup\{\#_{U \setminus W}(q) \mid q \in L(N,m) \text{ für ein } m \in R(N,m_0),\ \#_W(q) = 0\} \\
&= Abw(m_0, U \setminus W, W)
\end{aligned}$$

Wir geben zuerst einige elementare Eigenschaften von $D$ an.

**Folgerung 3.100** *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, $U$ und $W$ Mengen von Transitionen und $\chi$ eine Funktion von $T$ in $\mathbf{N}$.*
*i) Es gilt $D(\chi,U,W) \geq SA(\chi,U,W) \geq 0$.*
*ii) Wenn $U \subseteq W$ gilt, dann ist $SA(\chi,U,W) = 0$.*

*Beweis.* i) Für das leere Wort $\lambda$ haben wir $\pi(\lambda) \cdot \chi_{U,W} = 0$. Damit muss das Supremum mindestens 0 sein.

ii) Entsprechend der Definition hat $\chi_{U,W}$ unter der Voraussetzung $U \subseteq W$ bei allen $s \in W \setminus U$ einen negativen Wert und sonst nur Nullen. Damit gilt für jedes Wort $q$ die Beziehung $\pi(q)\chi_{U,W} \leq 0$. Unter Beachtung von i) folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt, dass die Bezeichnung Synchronisationsabstand für $D(\chi,U,W)$ berechtigt ist.

**Satz 3.101** *Es seien $N = (S,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, $U$ und $W$ Mengen von Transitionen und $\chi$ eine Funktion von $T$ in $\mathbf{N}$. Wenn in $N$ keine Transition tot ist, so ist $D$ bez. $\chi$ ein Abstand in der Potenzmenge von $T$.*

*Beweis.* Wir haben zu zeigen, dass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

$$D(\chi,U,W) = 0 \text{ gilt genau dann, wenn } U = W \text{ ist.} \tag{3.5}$$
$$D(\chi,U,W) = D(\chi,W,U) \text{ gilt für alle } U,W \subseteq T. \tag{3.6}$$
$$D(\chi,U,W) \leq D(\chi,U,Y) + D(\chi,Y,W) \text{ gilt für alle } U,W,Y \subseteq T. \tag{3.7}$$

Wir zeigen (3.5). Wenn $U = W$ gilt, so folgt aus Folgerung 3.100 ii) sofort

$$SA(\chi, U, W) = SA(\chi, W, U) = 0.$$

Somit ist auch $D(\chi, U, W) = 0$.

Ist umgekehrt $D(\chi, U, W) = 0$, so ergibt sich aus der Definition von $D$ und Folgerung 3.100 i) $SA(\chi, U, W) = SA(\chi, W, U) = 0$. Daher gilt für alle Markierungen $m \in R(N, m_0)$ und alle Wörter $q \in L(N, m)$

$$\pi(q)\chi_{U,W} \leq 0 \quad \text{und} \quad \pi(q)\chi_{W,U} \leq 0. \tag{3.8}$$

Nun folgt aber aus der Definition von $\chi_{U,W}$ sofort $\chi_{U,W} = -\chi_{W,U}$. Falls also $\pi(q)\chi_{U,W} < 0$ für ein $q$ wäre, so wäre $\pi(q)\chi_{W,U} = -\pi(q)\chi_{U,W} > 0$ im Widerspruch zu (3.8). Damit haben wir $\pi(q)\chi_{U,W} = 0$. Analog zeigen wir $\pi(q)\chi_{W,U} = 0$.

Die Aussage (3.6) folgt sofort aus der Symmetrie in der Definition von $D(\chi, U, W)$.

Die Aussage (3.7) ist offenbar, wenn $D(\chi, U, Y) = \omega$ oder $D(\chi, Y, W)$ gilt. Wir können daher im Folgenden annehmen, dass $SA(\chi, U, Y)$ und $SA(\chi, Y, W)$ endlich sind. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U$, $W$ und $Y$ paarweise disjunkt sind, da den Transitionen im Durchschnitt von $A$ und $B$ bei $\chi_{A,B}$ der Wert 0 zugewiesen wird.

Es sei $L$ die Vereinigung aller Mengen $L(N, m)$ mit $m \in R(N, m_0)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
SA(\chi, U, W) &= \sup\{\pi(q)\chi_{U,W} \mid q \in L\} \\
&= \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&= \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) \\
&\qquad + \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&\leq \sup\{\sum_{t \in U} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&\qquad + \sup\{\sum_{t \in Y} \#_t(q)\chi(t) - \sum_{t \in W} \#_t(q)\chi(t) \mid q \in L\} \\
&= SA(\chi, U, Y) + SA(\chi, Y, W)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D(\chi, U, W) &= \sup\{SA(\chi, U, W),\ SA(\chi, W, U)\} \\
&\leq \sup\{SA(\chi, U, Y) + SA(\chi, Y, W),\ SA(\chi, W, Y) + SA(\chi, Y, U)\} \\
&\leq \sup\{SA(\chi, U, Y) + SA(\chi, Y, U)\} + \sup\{SA(\chi, W, Y), SA(\chi, Y, W)\} \\
&= D(\chi, U, Y) + D(\chi, Y, W).
\end{aligned}$$

Folglich ist (3.7) auch bewiesen. □

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen $D(\chi, U, W)$ endlich ist. Insbesondere fragen wir nach der Entscheidbarkeit dieser Eigenschaft. Wir beginnen mit ein paar einfachen Folgerungen aus $D(\chi, U, W)$.

**Satz 3.102** *Wenn $x$ eine realisierbare $T$-Invariante eines Petri-Netzes $N = (S, T, F, V, m_0)$, $\chi$ eine Funktion von $T$ in $\mathbf{N}$ ist und $SA(\chi, U, W) \neq \omega$ für zwei Mengen $U$ und $W$ von Transitionen gilt, so ist $\chi_{U,W}^T \cdot x \leq 0$.*

*Beweis.* Wenn $x$ eine realisierbare $T$-Invariante ist, so gibt es im Erreichbarkeitsgraphen von $N$ einen Kreis derart, dass $x$ der transponierte Parikhvektor der zum Kreis gehörenden Schaltfolge $q$ ist. Damit haben wir $m_0 [p > m [q > m$ für eine Schaltfolge $p$ und eine Markierung $m$. Da $q$ einen Kreis beschreibt, ist $q^n$ für jedes $n$ in $L(N, m)$. Damit ist wegen $\pi(q)^T = x$

$$SA(\chi, U, W) \geq \pi(q^n)\chi_{U,W} = n\pi(q)\chi_{U,W} = n(\pi(q)\chi_{U,W})^T = n\chi_{U,W}^T \pi(q)^T = n\chi_{U,W}^T x.$$

Da für $\chi_{U,W}^T x > 0$ der Wert $SA(\chi, U, W)$ größer als jede gegebene Zahl $n$ ist, erhalten wir $SA(\chi, U, W) = \omega$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit haben wir $\chi_{U,W}^T x \leq 0$. □

**Folgerung 3.103** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $x$ eine realisierbare $T$-Invariante von $N$ und $\chi$ eine Funktion von $T$ in $\mathbf{N}$, und es gelte $D(\chi, U, W) \neq \omega$ für zwei Mengen $U$ und $W$ von Transitionen. Dann ist $\chi_{U,W}^T \cdot x = 0$.*

*Beweis.* Nach Definition gilt $\chi_{U,W} = -\chi_{W,U}$. Aus der Voraussetzung $D(\chi, U, W) \neq \omega$ folgen $SA(\chi, U, W) \neq \omega$ und $SA(\chi, W, U) \neq \omega$. Damit erhalten wir aus Satz 3.102

$$0 \geq \chi_{W,U}^T \cdot x = -\chi_{U,W}^T \cdot x \geq 0,$$

woraus die Behauptung sofort folgt. □

**Satz 3.104** *Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein beschränktes Petri-Netz, $U$ und $W$ Teilmengen von $T$ und $\chi$ eine Funktion von $T$ in $\mathbf{N}$. Dann ist $D(\chi, U, W)$ genau dann endlich, wenn $\pi(r) \cdot \chi_{U,W} = 0$ für alle Wörter $r \in T^*$ gilt, die einen elementaren Kreise im Erreichbarkeitsgraphen von $N$ beschreiben.*

*Beweis.* Es sei zuerst $D(\chi, U, W)$ ein endlicher Wert. Da jeder Vektor $\pi(r)^T$ eine $T$-Invariante ist, erhalten wir $\chi_{U,W}^T \pi(r)^T = 0$ aus Folgerung 3.103. Somit gilt $\pi(r)\chi_{U,W} = 0$.

Es seien $K$ die Anzahl der Markierungen in $R(N, m_0)$ und $r_1, r_2, \ldots r_k$ die Parikh-Vektoren der Schaltfolgen zu elementaren Kreisen in $EG(N, m_0)$. Wir zeigen zuerst, dass

(*) zu jeder Markierung $m \in R(N, m_0)$ und jedem Wort $q \in L(N, m)$ eine Funktion $r_q$ von $T$ in $\mathbf{N}$ (geschrieben als Zeilenvektor $r_q$) und Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ so existieren, dass
$\pi(q) = r_q + \sum_{i=1}^k \alpha_i r_i$ und $0 \leq r_q(t) < K$ für $t \in T$ gelten.

Es sei $q = t_1 t_2 \ldots t_n \in L(N, m)$. Dann gilt

$$m_0 [* > m = m_0' [t_1 > m_1' [t_2 > m_2' [t_3 > \ldots [t_n > m_n'.$$

Es sei zuerst $n < K$ gilt, so gilt $\#_t(q) \leq |q| = n < K$ für jede Transition $t \in T$. Wir wählen nun $r_q = \pi(q)$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Damit ergeben sich

$$0 \leq \#_t(q) = r_q(t) < K \text{ für } t \in T \quad \text{und} \quad \pi(q) = r_q = r_q + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i,$$

womit die Aussage bewiesen ist.

Es sei nun $n \geq K$. Dann gilt sogar $n+1 > K$ und folglich sind zwei der $n+1$ Markierungen $m'_0, m'_1, \ldots, m'_n$ identisch, sagen wir $m'_i = m'_j$ mit $i < j$. Damit ergeben sich

$$m_0 \, [* > m'_0 \, [t_1 t_2 \ldots t_i > m'_i \, [t_{i+1} t_{i+2} \ldots t_j > m'_j \, [t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n > m'_n,$$

$t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n$ ist Schaltfolge für $m = m'_0$ und $t_{i+1} t_{i+2} \ldots t_j$ beschreibt einen Kreis $u$ in $EG(N, m_0)$. Als Kreis ist $u$ aus elementaren Kreisen zusammengesetzt. Daher haben

$$\pi(t_{i+1} t_{i+2} \ldots t_j) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i.$$

Ist die Länge des verbleibenden Wort $t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n \in L(N, m)$ kleiner als $K$, wählen wir wie oben $r_q = \pi(t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n)$ und erhalten

$$\pi(q) = \pi(t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n) + \pi(t_{i+1} t_{i+2} \ldots t_j) = r_q + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i$$

und wie oben $0 \leq r_q(t) < K$ für $t \in T$. Ist die Länge von $t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n$ größer als $K$, so können wir die gleiche Prozedur, die oben auf $q$ angewendet wurde, auf die Sequenz $t_1 t_2 \ldots t_i t_{j+1} t_{j+2} \ldots t_n$ anwenden und iteriert so weiterverfahren, bis sich ein Restwort mit einer Länge $< K$ ergibt.

Es seien nun $\chi, U, W$ so gegeben, dass $\pi(r) \cdot \chi_{U,W} = 0$ für alle Wörter $r \in T^*$ gilt, die einen elementaren Kreise im Erreichbarkeitsgraphen von $N$ beschreiben. Dann gilt unter Berücksichtigung von (*) und Folgerung 3.103 (man beachte, dass die $r_i^T$ $T$-Invarianten sind)

$$\pi(q)\chi_{U,W} = r_q \chi_{U,W} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i \chi_{U,W} = r_q \chi_{U,W} \leq \sum_{t \in U} r_q(t)\chi(t) < \sum_{t \in U} \chi(t) \cdot K = K'.$$

Daher ist das Supremum bei der Definition von $SA(\chi, U, W)$ durch $K'$ nach oben beschränkt. Analog weist man auch eine Schranke für $SA(\chi, W, U)$ nach, womit $D(\chi, U, W)$ beschränkt ist. □

**Folgerung 3.105** *Es ist entscheidbar, ob für ein Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$, Teilmengen $U$ und $W$ von $T$ und eine Funktion $\chi : T \to \mathbf{N}$ der Abstand $D(\chi, U, W)$ endlich ist.*

*Beweis.* Da der Erreichbarkeitsgraph eines beschränkten Netzes endlich ist, können wir den Erreichbarkeitsgraphen konstruieren und dann mittels Breitensuchen alle elementaren Kreise darin finden. Für alle diese Kreise $r$ können wir überprüfen, ob $\pi(r) \cdot \chi_{U,W} = 0$ gilt. Im positiven Fall ist $D(\chi, U, W)$ endlich; anderenfalls ist $D(\chi, U, W) = \omega$. □

# Kapitel 4

# Petri-Netze und formale Sprachen

In diesem Kapitel werden wir auf der einen Seite die Mengen von Schaltfolgen eines Petri-Netzes aus der Sicht der Theorie formaler Sprachen untersuchen, und auf der anderen Seite wollen wir mit Hilfe von Petri-Netzen ein Problem aus der Theorie formaler Grammatiken mit gesteuerten Ableitungen lösen. Zuerst wollen wir aber einige Notationen und Fakten aus der Theorie formaler Sprachen geben, die wir im Folgenden benutzen werden.

## 4.1 Einiges aus der Theorie formaler Sprachen

Hinsichtlich der Theorie der formalen Sprachen gehen wir davon aus, dass die Leserin / der Leser über die Grundkenntnisse aus einer Vorlesung zur Theoretischen Informatik verfügt (siehe z. B. [**?**]). Insbesondere erwarten wir die Kenntnis der Chomsky-Normalform für kontextfreie Grammatiken, der Äquivalenz der regulären Sprachen und der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen und der Schleifensätze (Pumpinglemmata) für reguläre und kontextfreie Sprachen. Wir geben hier nur kurz einige Bezeichnungen und einige Resultate an, die üblicherweise nicht in den Grundvorlesungen zur theoretischen Informatik vorkommen.

Ein endlicher Automat wird als Quintupel $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, F, \delta)$ spezifiziert, wobei $X$ die Menge der Eingabesymbole, $Z$ die Menge der Zustände, $z_0 \in Z$ der Anfangszustand, $F \subseteq Z$ die Menge der akzeptierenden Zustände und $\delta : Z \times X \to Z$ die Überführungsfunktion sind.

Eine Regelgrammatik wird als Quadrupel $G = (N, T, P, S)$ spezifiziert, wobei $N$ die Menge der Nichtterminale, $T$ die Menge der Terminale, $P$ die Menge der Regeln und $S$ das Startsymbol oder Axiom sind. Wir bezeichnen die Mengen der regulären, kontextfreien und kontextabhängigen Sprachen mit $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$ und $\mathcal{L}(CS)$.

**Lemma 4.1** *i)* $R_{a,b} = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\} \notin \mathcal{L}(REG)$.
*ii)* $R_{a,b,c} = \{a^r b^s c^t \mid r \geq s \geq t \geq 0\} \notin \mathcal{L}(CF)$.

*Beweis.* i) Wir nehmen an, dass $R_{a,b}$ regulär ist. Dann gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (\{a, b\}, Z, z_0, F, \delta)$, der $R_{a,b}$ akzeptiert. Die Anzahl der Zustände von $Z$ sei $k$. Wir betrachten das Wort $a^{k+1}b^{k+1}$. Wegen $a^{k+1}b^{k+1} \in R_{a,b}$ ist $\delta(a^{k+1}b^{k+1} \in F$. Wir betrachten die Zustände $z_q = \delta(z_0, a^{k+1}b^q)$, $1 \leq q \leq k+1$. Dies sind $k+1$ Zustände. Da es aber nur $k$ Zustände in $Z$ gibt, existieren Zahlen $i$ und $j$ mit $1 \leq i < j \leq k+1$ derart, dass $z_i = z_j$

gilt. Damit erhalten wir $\delta(z_i, b^{j-i}) = z_i$ und daraus zuerst $\delta(z_i, b^{n(j-i)}) = z_i$ für alle $n \geq 2$ und dann $\delta(z_0, a^{k+1}b^i b^{n(j-i)} b^{k+1-j}) \in F$. Damit wird $a^{k+1}b^{k+1+(n-1)(j-i)}$ akzeptiert. Also haben wir $a^{k+1}b^{k+1+(n-1)(j-i)} \in R_{a,b}$. Da aber $(n-1)(j-i) > 0$ ist, ist wegen der Struktur der Wörter in $R_{a,b}$ auch $a^{k+1}b^{k+1+(n-1)(j-i)} \notin R_{a,b}$. Der dadurch erhaltene Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch, womit die Aussage i) des Lemmas bewiesen ist.

ii) Wir verzichten hier auf einen vollständigen Beweis. Wir nehmen an, dass $R_{a,b,c}$ eine kontextfreie Sprache ist und $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform ist, die $R_{a,b,c}$ erzeugt. Die Grammatik $G$ habe $k$ Nichtterminale. Wir betrachten das in $R_{a,b,c}$ liegende Wort $w = a^{2^{k+2}} b^{2^{k+2}} c^{2^{k+2}}$. Dann enthält der Ableitungsbaum für $w$ einen Teilbaum der Tiefe $k+1$, dessen Blätter alle $c$ sind. In diesem Baum gibt es einen Pfad, der ein Nichtterminal doppelt enthält. Mittels dieses Nichtterminals können ein Pumping von zwei Teilwörtern $c^q$ und $c^p$ mit $p + q > 0$ erreichen. Hierdurch entsteht ein Wort mit mehr Vorkommen von $c$ als Vorkommen von $a$. Folglich wird ein Wort abgeleitet, dass nicht in $R_{a,b,c}$ liegt, womit wir einen Widerspruch hergeleitet haben. $\square$

Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine Regelgrammatik. Für eine Ableitung

$$D : S \Longrightarrow w_1 \Longrightarrow w_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow w_r = w$$

von $w \in T^*$ in $G$, defieren den *Arbeitsplatz von $w$ bei $D$* als

$$Ws_G(w, D) = max\{|w_i| \mid 1 \leq i \leq r\}$$

und den *Arbeitsplatz von $w$* als

$$Ws_G(w) = \min\{Ws_G(w, D) \mid D \text{ is a derivation of } w \text{ in } G\}.$$

Ohne Beweis geben wir die folgende Aussage an; ein Beweis ist in [**?**] zu finden.

**Satz 4.2** *Wenn es für eine Regelgrammatik $G = (N, T, P, S)$ eine Konstante $k \in \mathbf{N}$ derart gibt, dass $Ws_G(w) \leq k|w|$ für alle $w \in L(G)$ gilt, so ist $L(G)$ eine kontextabhängige Sprache.* $\square$

## 4.2 Petri-Netz-Sprachen

Das Verhalten von Petri-Netzen wird in entscheidendem Maße von den im Netz realisierbaren Schaltfolgen bestimmt. Wir haben bereits im Abschnitt 3.1 für jedes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ die Menge

$$L(N, m_0) = \{q \mid m_0[q > m \text{ für eine Markierung } m\}$$

definiert. Offensichtlich ist $L(N, m_0)$ eine Sprache über dem Alphabet $T$. Wir nennen $L(N, m_0)$ die Sprache des Petri-Netzes. Da mit $N$ die Anfangsmarkierung $m_0$ festgelegt ist, schreiben wir nur einfach $L(N)$ anstelle von $L(N, m_0)$.

Petri-Netz-Sprachen haben die folgende einfache Eigenschaft, die oft den Nachweis gestattet, dass eine gegebene Menge keine Petri-Netz-Sprache ist.

**Lemma 4.3** *i) Es seien $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und $q$ ein Wort aus $L(N)$. Dann ist auch jedes Anfangsstück $q'$ von $q$ ein Wort aus $L(N)$. Insbesondere gilt $\lambda \in L(N)$.*
*ii) Für jedes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ gilt $L(N) = Pref(L(N))$.*[1]

*Beweis.* i) folgt aus der Tatsache, dass mit $q$ auch jedes Anfangsstück von $q$ eine Schaltfolge ist. ii) ergibt sich direkt aus i). □

Die folgende Aussage ergibt sich sofort aus der Definition der Lebendigkeit von Petri-Netzen.

**Lemma 4.4** *Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz. Dann ist $N$ genau dann lebendig, wenn $L(N)$ die folgende Eigenschaft $(*)$ besitzt.*
*$(*)$ Für jedes $q \in L(N)$ und jedes $t \in T$ gibt es ein $r \in T^*$ mit $qrt \in L(N)$.* □

**Folgerung 4.5** *Die Sprache eines lebendigen Petri-Netzes ist unendlich.* □

Wir definieren nun einige Mengen von Petri-Netz-Sprachen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(P) &= \{L(N) \mid n \text{ ist ein Petri-Netz}\},\\
\mathcal{L}(PB) &= \{L(N) \mid n \text{ ist ein beschränktes Petri-Netz}\},\\
\mathcal{L}(P) &= \{L(N) \mid n \text{ ist ein lebendiges Petri-Netz}\}.
\end{aligned}$$

Wir vergleichen zuerst die gerade definierten Familien von Petri-Netz-Sprachen untereinander und mit den Familien der der Chomsky-Hierarchie.

**Satz 4.6** *Es gilt das folgende Diagramm aus Abbildung 4.1, das wie folgt zu interpretieren ist: $A \to B$ steht für $A \subset B$; sind zwei Familien nicht durch einen gerichteten Weg verbinden, so sind sie unvergleichbar.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}(CS) & \\
\mathcal{L}(CF) \arrow[ur] & & \mathcal{L}(P) \arrow[ul] \\
\mathcal{L}(REG) \arrow[u] & & \\
 & \mathcal{L}(PB) \arrow[ul] \arrow[uur] & \mathcal{L}(PL) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 4.1: Hierachie der Petri-Netz-Sprachen

*Beweis.* Die Inklusionen $\mathcal{L}(REG) \subset \mathcal{L}(CF) \subset \mathcal{L}(CS)$ und ihre Echtheit sind aus der Vorlesung Theoretische Informatik bekannt (siehe z. B. [**?**]). Da beschränkte und lebendige Petri-Netze spezielle Petri-Netze sind, folgt aus den Definitionen von $\mathcal{L}(PB)$, $\mathcal{L}(PL)$ und $\mathcal{L}(P)$ sofort $\mathcal{L}(PB) \subseteq \mathcal{L}(P)$ und $\mathcal{L}(PL) \subseteq \mathcal{L}(P)$.

[1] Für eine Sprache $L \subseteq V^*$ ist $Pref(L)$ durch $Pref(L) = \{u \mid uv \in L \text{ für ein } v \in V^*\}$ definiert.

i) Es gibt eine reguläre Sprache $R$, die nicht in $\mathcal{L}(P)$ liegt.

Offensichtlich ist die endliche Sprache $R = \{t^5\}$ über dem einelementigen Alphabet $\{t\}$ regulär. Nach Lemma 4.3 i) ist $R$ aber keine Petri-Netz-Sprache. Also gilt $R \notin \mathcal{L}(P)$.

ii) $\mathcal{L}(PB) \subseteq \mathcal{L}(REG)$.

Es sei $L \in \mathcal{L}(PB)$. Dann gilt $L = L(N)$ für ein beschränktes Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$. Dann ist die Menge $R(N, m_0$ der erreichbaren Markierungen endlich. Wir konstruieren nun den endlichen Automaten

$$\mathcal{A} = (T, R(N, m_0), m_0, R(N, m_0), \delta),$$

wobei $\delta$ durch $\delta(m, t) = m'$ mit $m[t > m'$ definiert ist. Da jede erreichbare Markierung zu den akzeptierenden Zuständen gehört, ist jede Schaltfolge in der von $\mathcal{A}$ akzeptierten Menge. Folglich ist $T(\mathcal{A}) = L$ und damit $L$ regulär.

Da jede Sprache aus $\mathcal{L}(PB)$ regulär ist, gilt $\mathcal{L}(PB) \subseteq \mathcal{L}(REG)$.

Die Sprache $R$ aus i) erfüllt offenbar $R \notin \mathcal{L}(PB)$. Folglich ist die Inklusion $\mathcal{L}(PB) \subseteq \mathcal{L}(REG)$ sogar echt.

iii) Es gibt eine Sprache in $\mathcal{L}(PL)$, die nicht kontextfrei ist.

Wir betrachten das gewöhnliche Netz

$$N = (\{s_1, s_2\}, \{t_1, t_2, t_3\}, \{(t_1, s_1), (s_1, t_2), (t_2, s_2), (s_2, t_3)\}, V, (0, 0)).$$

Da in $N$ zu jedem Zeitpunkt die Folge $t_1t_2t_3$ geschaltet werden kann, ist $N$ lebendig. Die Petri-Netz-Sprache von $N$ ist

$$L(N) = \{u \mid \text{für jedes Wort } v \in Pref(u) \text{ gilt } \#_{t_1}(v) \geq \#_{t_2}(v) \geq \#_{t_3}(v)\}.$$

Wir zeigen nun, dass $L(N)$ nicht kontextfrei ist. Angenommen, $L(N)$ ist kontextfrei. Dann ist auch $L(N) \cap \{t_1\}^*\{t_2\}^*\{t_3\}^*$ als Durchschnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache kontextfrei. Wegen

$$L(N) \cap \{t_1\}^*\{t_2\}^*\{t_3\}^* = \{t_1^r t_2^s t_3^t \mid r \geq s \geq t \geq 0\}$$

erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 4.1 ii).

iv) Aus den Inklusionen $\mathcal{L}(REG) \subset \mathcal{L}(CF)$ und $\mathcal{L}(PL) \subseteq \mathcal{L}(P)$ und den Aussagen in i) und iii) folgt sofort die Unvergleichbarkeit von $\mathcal{L}(REG)$ und $\mathcal{L}(CF)$ einerseits und $\mathcal{L}(PL)$ und $\mathcal{L}(P)$ andererseits.

v) $\mathcal{L}(PL)$ und $\mathcal{L}(PB)$ sind unvergleichbar.

Die Sprache $L(N)$ aus iii) liegt in $\mathcal{L}(PL)$, aber ist nicht kontextfrei. Wegen $\mathcal{L}(PB) \subset \mathcal{L}(REG) \subset \mathcal{L}(CF)$ ist auch $L(N) \notin \mathcal{L}(PB)$.

Andererseits ist für das gewöhnliche Netz $N' = (\{s\}, \{t\}, \{(s, t)\}, V, (1))$ die Erreichbarkeitsmenge $R(N', (1))$ durch $\{(1), (0)\}$ gegeben. Somit ist $N'$ ein beschränktes Petri-Netz. Daher gilt $L(N') = \{\lambda, t\} \in \mathcal{L}(PB)$. Wegen Folgerung 4.5 gilt noch $L(N') \notin \mathcal{L}(PL)$.

vi) $\mathcal{L}(PL) \subset \mathcal{L}(P)$.

Wir haben schon festgestellt, dass $\mathcal{L}(PL) \subseteq \mathcal{L}(P)$ gilt. Die Sprache $L(N')$ aus v) liegt in $\mathcal{L}(PB)$ und folglich in $\mathcal{L}(P)$, aber nach i) nicht in $\mathcal{L}(PL)$. Damit gilt $\mathcal{L}(PL) \subset \mathcal{L}(P)$.

vii) $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(CS)$.

Es sei $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz. Dabei sei $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Mit jeder Transition $t$ und jeder Stelle $s$ assoziieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} M_t &= \{X_t, Y_t, Z_t\}, \\ M_{s,t} &= \{A_{t,s,1}, A_{t,s,2}, \dots, A_{t,s,t^-(s)+1}\}, \\ N_{s,t} &= \{B_{t,s,1}, B_{t,s,2}, \dots, B_{t,s,n(s,t)}\}, \end{aligned}$$

wobei $n(s,t)$ durch

$$n(s,t) = \begin{cases} -\Delta(t)(s) + 1 & \text{für } \Delta(t)(s) < 0 \\ 1 & \text{für } \Delta(t)(s) \geq 1 \end{cases}$$

definiert ist.

Wir konstruieren nun die Regelgrammatik $G = (N, T, P, S)$, wobei

$$N = \{\$, S, X, Y, Y', Z\} \cup \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \bigcup_{t \in T} M_t \cup \bigcup_{\substack{t \in T \\ s \in S}} M_{s,t} \cup \bigcup_{\substack{t \in T \\ s \in S}} N_{s,t}$$

gilt und $P$ aus allen Regeln der folgenden Art besteht:

$$S \to \$YXA_1^{m_0(s_1)}XA_2^{m_0(s_2)} \dots XA_n^{m_0(s_n)}X\$$$

(durch diese Regel wird eine Beschreibung der Anfangsmarkierung

$$m_0 = (m_0(s_1), m_0(s_2), \dots, m_0(s_n))$$

erzeugt),

$$\begin{aligned} &\$YX \to \$XA_{t,s_1,1} \quad \text{für} \quad t \in T, \\ &A_{t,s_i,r}A_i \to A_i'A_{t,s_i,r+1} \quad \text{für} \quad t \in T,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq r \leq t^-(s_i), \\ &A_{t,s_i,t^-(s_i)+1}A_i \to A_iA_{t,s_i,t^-(s_i)+1} \quad \text{für} \quad t \in T,\ 1 \leq i \leq n, \\ &A_{t,s_i,t^-(s_i)+1}X \to XA_{t,s_{i+1},1} \quad \text{für} \quad t \in T, 1 \leq i \leq n-1, \\ &A_{t,t^-(s_n)+1}X \to X_tX \quad \text{für} \quad t \in T \end{aligned}$$

(die Symbole $A_{t,s,r}$ wandern von links nach rechts über das Wort und markieren dabei durch Übergang zur gestrichenen Variante jeweils soviel Symbole $A_i$, wie $t^-(s)$ angibt; sind nicht genügend $A_i$ vorhanden, so wird die Ableitung blockiert, wenn $A_{t,s,r}$ mit $r \leq t^-(s)$ direkt vor einem $X$ steht; sind stets ausreichend viele Symbole $A_i$ vorhanden, so wird $X_t$ eingeführt),

$$\begin{aligned} &A_iX_t \to X_tA_i \quad \text{für} \quad t \in T,\ 1 \leq i \leq n, \\ &A_i'X_t \to X_tA_i \quad \text{für} \quad t \in T,\ 1 \leq i \leq n, \\ &XX_t \to X_tX \quad \text{für} \quad t \in T \end{aligned}$$

(das Symbol $X_t$ bewegt sich von rechts nach links über und überführt dabei alle $A'_i$ wieder in $A_i$),

$$\begin{aligned}
&\$X_tX \to \$XB_1^{\Delta(t)(s_1)}A_{t,s_1,1} \quad \text{für} \quad t\in T,\ \Delta(t)(s_1)\geq 0,\\
&B_{t,s_i,r}A_i \to B_{t,s_i,r+1} \quad \text{für} \quad t\in T,\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq r\leq n(t,s),\\
&B_{t,s_i,n(t,s)}A_i \to A_iB_{t,s_i,n(t,s)} \quad \text{für} \quad t\in T,\ 1\leq i\leq n,\\
&B_{t,s_i,n(s,t)}X \to XA_{i+1}^{\Delta(t)(s_{i+1})}B_{t,s_{i+1},1} \quad \text{für} \quad t\in T,\ 1\leq i\leq n-1, \Delta(t)(s_{i+1})\geq 0,\\
&B_{t,s_n,n(s,t)}X \to XY_t \quad \text{für} \quad t\in T
\end{aligned}$$

(wenn $\Delta(t)(s_i) < 0$ gilt, so werden $-\Delta(t)(s_i)$ Symbole $A_i$ gestrichen; ist $\Delta(t)(s_i)\geq 0$, so werden $\Delta(t)(s_i)$ Symbole $A_i$ zusätzlich eingeführt; folglich wird die Anzahl der $A_i$ um $\Delta(t)(s_i)$ geändert; nach dieser Änderung wird wird $Y_t$ erzeugt),

$$\begin{aligned}
&Y_tt' \to t'Y_t \quad \text{für} \quad t,t'\in T,\\
&Y_t\$ \to Zt\$ \quad \text{für} \quad t\in T
\end{aligned}$$

(das Symbol $Y_t$ bewegt sich weiter nach rechts und fügt vor der Endmarkierung \$ ein $t$ ein und wird zu $Z$ geändert),

$$\begin{aligned}
&tZ \to Zt \quad \text{für} \quad t\in T,\\
&A_iZ \to ZA_i \quad \text{für} \quad 1\leq i\leq n,\\
&XZ \to ZX, \$Z \to \$Y
\end{aligned}$$

(das Symbol $Z$ wandert nach links und wird vor der Anfangsmarkierung in $Y$ geändert; insgesamt wird damit ein Wort $\$YXA_1^{m_1}XA_{m_2}X\dots XA_n^{m_n}Xq\$$ mit $q\in T^*$ ins Wort $\$YXA_1^{m'_1}XA_{m'_2}X\dots XA_n^{m'_n}Xqt\$$ überführt, wobei die Markierung $m=(m_1,m_2,\dots,m_n)$ durch Schalten von $t$ in die Markierung $m'=(m'_1,m'_2,\dots,m'_n)$ übergeht),

$$\begin{aligned}
&\$YX \to Y',\ Y'X\to Y',\ Y'\$\to\lambda,\\
&Y'A_i \to Y' \quad \text{für} \quad 1\leq i\leq n,\\
&Y't \to tY' \quad \text{für} \quad t\in T
\end{aligned}$$

(das Symbol $Y'$ wird erzeugt, bewegt sich von links nach rechts und löscht dabei alle Symbole, die nicht in $T$ liegen).

Aus den Erklärungen zu den Regeln folgt, dass

$$\$YXA_1^{m_0(s_1)}XA_2^{m_0(s_2)}\dots XA_n^{m_0(s_n)}X\$ \Longrightarrow^* \$YXA_1^{u_1}XA_{u_2}X\dots XA_n^{u_n}Xp\$ \Longrightarrow p$$

genau dann gilt, wenn $m_0[p > (u_1,u_2,\dots,u_n)$ gültig ist. Hieraus ergibt sich $L(G)=L(N)$.

Wenn $k=\max\{\Delta(t)(s) \mid t\in T,\ s\in S\}$ ist, so wird bei jedem Hinzufügen einer Transition der vordere Teil aus Nichtterminalen höchstens um $n\times k$ Symbole verlängert. Daher hat jede Satzform einer Ableitung von $p$ höchstens die Länge $kn|p|+n+4+|p|p$. Aus Satz 4.2 folgt nun, dass $L(G)$ und damit auch $L(N)$ kontextabhängig ist.

Damit ist $\mathcal{L}(P)\subseteq\mathcal{L}(CS)$. Da die Sprache $R$ aus i) in $\mathcal{L}(CS)$ aber nicht in $\mathcal{L}(P)$ liegt, ist die Inklusion sogar echt. □

Wir geben nun Abschlusseigenschaften bezüglich der in der Theorie formaler Sprachen üblichen mengentheoretischen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Durchschnitt mit regulären Mengen und der algebraisch motivierten Operationen Konkatenation, Homomorphismen und inversen Homomorphismen.

**Satz 4.7** *Die Mengen $\mathcal{L}(P)$, $\mathcal{L}(PB)$ und $\mathcal{L}(PL)$ sind nicht abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Mengen.*

*Beweis.* i) Vereinigung

Wir betrachten die gewöhnlichen Netze

$$N_1 = (\{s_1\}, \{t_1\}, \{(s_1, t_1), (t_1, s_1)\}, V, (1)) \text{ und } N_2 = (\{s_2\}, \{t_2\}, \{(s_2, t_2), (t_2, s_2)\}, V, (1)).$$

Offensichtlich sind die Netze beschränkt und lebendig. Folglich sind die zugehörigen Petri-Netz-Sprachen

$$L(N_1) = \{t_1^n \mid 0 \leq n\} \text{ und } L(N_2) = \{t_2^n \mid 0 \leq n\}$$

sowohl in $\mathcal{L}(P)$ als auch in $\mathcal{L}(PB)$ und $\mathcal{L}(PL)$.

Wir beweisen nun, dass

$$L_1 = L(N_1) \cup L(N_2) = \{t_1^n \mid 0 \leq n\} \cup \{t_2^n \mid 0 \leq n\}$$

nicht in $\mathcal{L}(P)$ liegt.

Wir nehmen an, dass es ein Petri-Netz $N = (S, t_1, t_2, F, V, m_0)$ mit $L(N) = L_1$ gibt. Wir merken zuerst an, dass $\Delta(t_1) \geq 0$ gilt. Dies folgt daraus, dass im anderen Fall eine Stelle $s$ mit $\Delta(t_1)(s) < 0$ existiert, für die nach $k$-maligem Schalten von $t_1$ dann $m_0(s) + k \cdot \Delta(t_1)(s)$ Marken auf $s$ liegen und für hinreichend großes $k$ wird dieser Wert kleiner als $t_1^-(s)$, d.h. $t_1$ wäre nicht mehr aktiviert; aber aus der Struktur von $L(N)$ folgt, dass $t_1$ nach beliebig oftmaligen Schalten von $t_1$ immer aktiviert ist. Es sei $m_1$ durch $m_0[t_1 > m_1$ definiert. Wegen $m_1 = m_0 + \Delta(t_1) \geq m_0$ und der Schaltbarkeit von $t_2$ bei $m_0$ ist $t_2$ auch bei $m_1$ aktiviert. Somit ist $t_1t_2$ eine Schaltfolge in $N$ und damit in $L(N)$. Andererseits ist $t_1t_2$ nicht in $L_1$. Dies widerspricht $L(N) = L_1$.

ii) Konkatenation

Wir betrachten erneut die Netze $N_1$ und $N_2$ aus i) und die Sprache

$$L_2 = L(N_1) \cdot L(N_2) = \{t_1^n t_2^m \mid n \geq 0,\ m \geq 0\}.$$

Wir nehmen erneut an, dass es ein Petri-Netz $N' = (S', \{t_1, t_2\}, F', V', m_0')$ mit $L(N') = L_2$ gibt. Wie in Teil i) kann gezeigt werden, dass $\Delta(t_1) \geq 0$ und $\Delta(t_2) \geq 0$ gelten. Es sei $m_1$ die Markierung nach Schalten von $t_1$. Wegen $m_1 = m_0 + \Delta(t_1) \geq m_0$ ist $t_2$ bei $m_1$ aktiviert. Die Markierung $m_2$ entstehe aus $m_1$ durch Schalten von $t_2$. Dann gilt auch $m_2 = m_1 + \Delta(t_2) \geq m_1 \geq m_0$, womit $t_1$ bei $m_2$ aktiviert ist. Damit ist $t_1t_2t_1$ eine Schaltfolge in $N$, aber $t_1t_2t_1$ liegt nicht in $L_2$. Der damit erhaltene Widerspruch zeigt, dass $L_2$ keine Petri-Netz-Sprache ist.

iii) Durchschnitt mit regulären Mengen

Wir betrachten wieder das Netz $N_1$ aus i) und betrachten die Sprache

$$R = L(N_1) \cup \{t_1^5\} = \{t_1^5\},$$

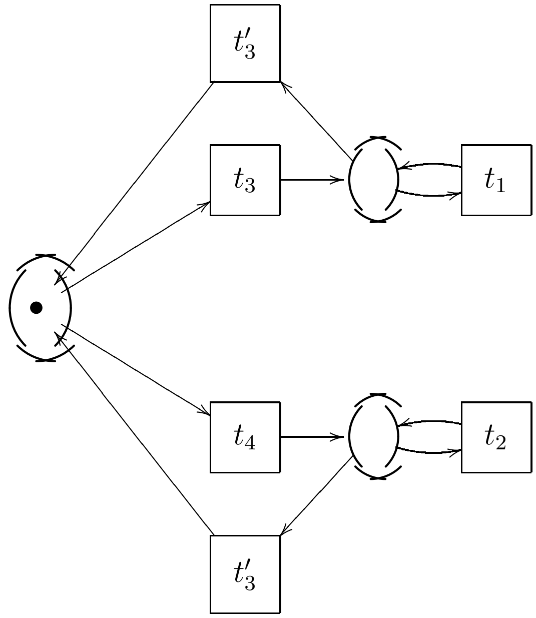


Abbildung 4.2: Netz $K$

die als Durchschnitt einer Petri-Netz-Sprache mit einer regulären Menge entsteht. Im Teil i) des Beweises von Satz 4.6 haben wir bereits nachgewiesen, dass $R$ keine Petri-Netz-Sprache ist.

iv) Homomorphismen

Wir betrachten das Netz $K$ aus Abbildung 4.2. Es ist leicht zu sehen, dass $K$ beschränkt ist (zu jedem Zeitpunkt ist genau eine Marke im Netz) und die zu $K$ gehörige Petri-Netz-Sprache

$$\begin{aligned} L(K) \;=\; \{q_1 q_2 \dots q_k \mid & \; k \geq 0,\; q_i \in \{t_3 t_1^n t_3' \mid n \geq 0\} \cup \{t_4 t_1^n t_4' \mid n \geq 0\} \text{ für } 1 \leq i \leq k-1, \\ & q_k \in Pref(\{t_3 t_1^n t_3' \mid n \geq 0\} \cup \{t_4 t_1^n t_4' \mid n \geq 0\})\} \end{aligned}$$

ist. Aufgrund der Struktur von $L(K)$ ist auch sofort zu sehen, dass $K$ beschränkt ist (vgl. Lemma 4.4).

Wir definieren den Homomorphismus $h$ durch

$$h(t_1) = t_1,\; h(t_2) = t_2,\; h(t_3) = h(t_4) = \lambda,\; h(t_3') = h(t_4') = t.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} h(L(K)) \;=\; & \{t_{i_1}^{n_1} t t_{i_2}^{n_2} t \dots t_{i_k}^{n_k} t \mid k \geq 1,\; i_j \in \{1,2\} \text{ für } 1 \leq j \leq k,\; n_j \geq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq k\} \\ & \cup \{t_{i_1}^{n_1} t t_{i_2}^{n_2} t \dots t_{i_k}^{n_k} \mid k \geq 1,\; i_j \in \{1,2\} \text{ für } 1 \leq j \leq k,\; n_j \geq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq k\}. \end{aligned}$$

In $h(L(K))$ steht zwischen zwei verschiedenen $t_i$ und $t_j$ immer ein $t$. Wir nehmen jetzt wieder an, dass es ein Netz $N''$ mit $L(N'') = h(L(K))$ gibt. Analog zum Teil i) dieses Beweises können wir zuerst $\Delta(t_1) \geq 0$ und $\Delta(t_2) \geq 0$ für $N''$ zeigen und dann nachweisen, dass $t_1 t t_2 t_1$ eine Schaltfolge in $N''$ ist. Wegen $t_1 t t_2 t_1 \notin h(L(K))$ haben wir den gewünschten Widerspruch erhalten. $\square$

**Satz 4.8** *Die Menge $\mathcal{L}(P)$ ist abgeschlossen unter Durchschnitten und inversen Homomorphismen.*

*Beweis.* i) Durchschnitt

Es seien $L_1$ und $L_2$ zwei Sprachen aus $\mathcal{L}(P)$. Ferner seien $N_1 = (S_1, T_1, F_1, V_1, m_1)$ und $N_2 = (S_2, T_2, F_2, V_2, m_2)$ zwei Petri-Netze mit $L(N_1) = L_1$ und $L(N_2) = L_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ gilt.

Der Durchschnitt $L_1 \cap L_2$ ist offenbar eine Sprache über $T_1 \cap T_2$, da eine Transition aus $T_1 \setminus T_2$ bzw. aus $T_2 \setminus T_1$ nicht in $L_2$ bzw. $L_1$ vorkommen kann. Folglich können wir die Transitionen aus $(T_1 \setminus T_2) \cup (T_2 \setminus T_1)$ streichen.

Wir konstruieren nun das Petri-Netz

$$N = (S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2, F_1' \cup F_2', V, m_0),$$

wobei folgende Beziehungen bestehen:

- $F_1' = (F_1 \cap (S_1 \times (T_1 \cap T_2))) \cup (F_1 \cap ((T_1 \cap T_2) \times S_1))$,
  $F_2' = (F_2 \cap (S_2 \times (T_1 \cap T_2))) \cup (F_2 \cap ((T_1 \cap T_2) \times S_2))$,
- $V(s,t) = V_1(s,t)$ und $V(t,s) = V_1(t,s)$ für $s \in S_1$,
  $V(s,t) = V_2(s,t)$ und $V(t,s) = V_2(t,s)$ für $s \in S_2$,
- $m(s) = m_1(s)$ für $s \in S_1$ und
  $m(s) = m_2(s)$ für $s \in S_2$.

Entsprechend der Konstruktion ist eine Transition $t \in T_1 \cap T_2$ in $N$ genau dann aktiviert, wenn sie sowohl im $N_1$ entsprechenden Teilnetz und im $N_2$ entsprechenden Teilnetz aktiviert ist. Folglich ergibt sich, dass eine Schaltfolge aus $N$ sowohl Schaltfolge in $N_1$ als auch Schaltfolge in $N_2$ ist. Daher gilt $L(N) = L(N_1) \cap L(N_2)$, und $L(N_1) \cap L(N_2) \in \mathcal{L}(P)$ ist gezeigt.

ii) Inverse Homomorphismen.

Es seien $L$ eine Sprache aus $\mathcal{L}(P)$ und $N = (S, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz mit $L(N) = L$. Ferner sei ein Homomorphismus $h : (T')^* \to T^*$ gegeben. Dann ist $T' = T_1 \cup T_2$, wobei

$$T_1 = \{A \mid A \in T',\ h(A) \neq \lambda\} \quad \text{und} \quad T_2 = \{A \mid A \in T',\ h(A) = \lambda\}.$$

Es sei $q \in T^+$. Wenn $m_1$ und $m_2$ zwei Markierungen von $N$ sind, so dass $q \in L(N, m_1)$ und $q \in L(N, m_2)$, so liegt $q$ auch in $L(N, m)$, wobei $m$ durch die Setzungen $m(s) = \min\{m_1(s), m_2(s)\}$ für $s \in S$ definiert ist, da die minimale Anzahl von Marken ausreichend ist, um $q$ schalten zu können. Damit gibt es für jede Schaltfolge $q$ eine minimale Markierung $H(q)$ mit $q \in L(N, H(q))$. Dabei ist $H(q)$ durch

$$H(q)(s) = \min\{m'(s) \mid q \in L(N, m')\}$$

definiert.

Wir betrachten das Netz $N_1 = (S, T_1, F_1, V_1, m_0)$. Dabei sind $F_1$ und $V_1$ wie folgt bestimmt. Für $A$ in $T_1$ mit $h(A) = q$ setzen wir

$$A^- = H(q) \quad \text{und} \quad A^+ = \Delta q + H(q).$$

Durch diese Setzungen sind $F_1$ und $V_1$ eindeutig bestimmt. Dann erhalten wir

$$\Delta(A) = A^+ - A^- = \Delta(q) + H(q) - H(q) = \Delta(q).$$

Dadurch ist $A_1 A_2 \ldots A_n$ genau dann eine Schaltfolge in $N_1$, wenn $h(A_1)h(A_2)\ldots h(A_n)$ eine Schaltfolge in $N$ ist. Somit haben wir $L(N_1) = h_1^{-1}(L(N))$ für den Homomorphismus $h_1 : T_1^* \to T^*$.

Es bleibt nun, eine Erweiterung des Netzes $N_1$ vorzunehmen, damit auch die Transitionen aus $T_2$ erfasst werden. Da $h(A) = \lambda$ für $A \in T_2$ gilt, haben wir die Konstruktion so vorzunehmen, dass $A \in T_2$ immer aktiviert ist. Dies geschieht einfach durch Hinzunahme einer Stelle $p$, die mit jedem $A \in T_2$ in beiden Richtungen jeweils mit der Vielfachheit 1 verbunden wird und in der Anfangsmarkierung eine Marke erhält. Es ist nun dieses Netz mit $N_1$ so zu verbinden, dass ein zusammenhängendes Netz entsteht, die Schaltungen aber unabhängig voneinander erfolgen können. Diese Verbindung schaffen wir durch eine zusätzliche Transition $z$, deren Nachbereich aus einer beliebigen Stelle aus $S$ besteht, deren Vorbereich aus $p$ besteht und $V(p,z) = 2$ erfüllt. Da auf $p$ stets nur eine Marke liegt, kann $z$ nie geschaltet werden. Für das so konstruierte Netz $N'$ gilt $L(N') = h^{-1}(L(N)) = h^{-1}(L)$. □

Die Frage der Abgeschlossenheit unter dem Kleene-Abschluss lassen wir offen.

Nach den Abschlusseigenschaften wenden wir uns nun den Entscheidbarkeitsproblemen zu. Dabei beschränken wir uns auf das Mitglieds-, Leerheits-, Endlichkeits- und Universalitätsproblem, die wie folgt spezifiziert sind:

Mitgliedsproblem:
Gegeben: Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$, $q \in T^*$
Frage: Gilt $q \in L(N)$?

Leerheitsproblem:
Gegeben: Petri-Netz $N$,
Frage: Enthält $L(N)$ ein nichtleeres Wort?

Endlichkeitsproblem:
Gegeben: Petri-Netz $N$,
Frage: Ist $L(N)$ endlich?

Leerheitsproblem:
Gegeben: Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$,
Frage: Gilt $L(N) = T^*$ ?

Wir bemerken, dass wir das Leerheitsproblem gegenüber der üblichen Variante aus der Theorie formaler Sprachen leicht modifiziert haben. Das liegt daran, dass jede Petri-Netz-Sprache das leere Wort enthält. Folglich ist $L(N)$ nie leer. Es bleibt daher die Frage, ob $L(N) \setminus \{\lambda\}$ leer ist. Dies ist offenbar unsere obige Frage.

Offenbar gilt $q \in L(N)$ genau dann, wenn $q$ eine Schaltfolge in $N$ (mit Start in $m_0$) ist, d.h. wenn wir in $N$ der Reihe nach die Transitionen von $q$ schalten können. Dies ist einfach zu überprüfen. Daher gilt die folgende Aussage.

**Satz 4.9** *Das Mitgliedsproblem ist für beliebige Petri-Netze $N = (S, T, F, V, m_0)$ und beliebige Wörter $q \in T^*$ entscheidbar.* □

Wenn es ein nichtleeres Wort $q$ in $L(N)$ gibt, so ist $q = tq'$ für ein $t \in T$ und ein $q \in T^*$ und $t$ liegt auch in $L(N)$. Folglich enthält $L(N)$ genau dann ein nichtleeres Wort, wenn es ein $t \in T$ mit $t \in L(N)$ gibt. Da für jedes $t \in T$ die Frage „Ist $t$ in $L(N)$?“ entscheidbar ist, erhalten wir den folgenden Satz.

**Satz 4.10** *Das Leerheitsproblem ist für beliebige Petri-Netze entscheidbar.* □

**Satz 4.11** *Das Endlichkeitsproblem ist für beliebige Petri-Netze entscheidbar.* □

*Beweis.* Wir entscheiden zuerst, ob das Petri-Netz $N = (S, T, F, V, m_0)$ beschränkt ist. Falls es beschränkt ist, so können wir aus dem endlichen Erreichbarkeitsgraphen einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ konstruieren, der $L(N)$ akzeptiert (siehe Beweis von Satz 4.6, Teil ii)). Da für endliche Automaten (oder für die dazu äquivalenten regulären Grammatiken) entscheidbat ist, ob $T(\mathcal{A})$ endlich ist oder nicht, können wir die Endlichkeit von $L(N)$ entscheiden.

Wenn $N$ nicht beschränkt ist, so gibt es eine Stelle $s$, auf die beliebig viele Marken geschaltet werden können. Es sei $r = \max\{\Delta(t)(s) \mid t \in T\}$. Bei einem Schalten einer Transition kommen also höchstens $r$ zusätzliche Marken auf $s$ geschaltet werden. Um $k$ Marken $s$ zu erreichen, sind somit $n$ Schaltungen erforderlich, wobei $n$ die kleinste Zahl mit $k - m_0(s) \geq n \cdot r$ ist. Offenbar wächst mit $k$ auch $n$ und wir haben daher in $L(N)$ beliebig lange Schaltfolgen, womit $L(N)$ als unendlich nachgewoiesen ist. □

**Satz 4.12** *Das Universalitätsproblem ist für beliebige Petri-Netze entscheidbar.* □

*Beweis.* Wir beweisen die folgende Aussage: *Für ein Ptri-Netz $N(S, T, F, V, m_0)$ gilt $L(N) = T^*$ genau dann, wenn $\Delta(t) \geq 0$ für alle $t \in T$ gilt und jedes $t \in T$ bei $m_0$ aktiviert ist.* Da diese Eigenschaft offensichtlich entscheidbar ist, erhalten wir sofort die Aussage des Satzes.

Sei zuerst $L(N) = T^*$. Dann ist $t \in L(N)$ für jede Transition $t$. Damit ist jede Transition $t$ aktiviert bei $m_0$. Außerdem haben wir $t^n \in L(N)$ für jede Transition $t$ und jede natürliche Zahl $n$. Wie im Beweis von Satz 4.8 (Teil i)) können wir nun nachweisen, dass $\Delta(t) \geq 0$ gilt.

Ist umgekehrt jede Transition $t$ bei $m_0$ aktiviert, so kann jede Transition bei $m_0$ geschaltet. Somit ist jedes Wort der Länge 1 in $L(N)$. Sei nun schon bewiesen, dass alle Wörter der Länge $n$ in $L(N)$ liegen. Wir betrachten ein beliebiges Wort $q$ der Länge $n+1$. Dann gilt $q = q't$ für ein $q \in T^n$ und $t \in T$. Wegen $\Delta(t) \geq 0$ für jedes $t \in T$ erhalten wir auch

$$\Delta(t_1 t_2 \ldots t_k) = \Delta(t_1) + \Delta(t_2) + \cdots + \Delta(t_k) \geq 0$$

für jedes Wort $t_1 t_2 \ldots t_k \imath n T^*$. Damit ist $\Delta(q') \geq 0$. Somit gilt für die nach Schalten von $q'$ erhaltene Markierung $m$ die Beziehung $m = m_0 + \Delta(q') \geq m_0$. Daher ist $t$ aktiviert bei $m$ und $q = q't$ eine Schaltfolge in $N$. Folglich gilt $q \in L(N)$. Deshalb liegt jedes Wort der Länge $n + 1$ in $L(N)$. Damit haben wir $L(N) = T^*$. □

## 4.3 Petri-Netze und Sprachen mit Auswahlkontext

Es ist bekannt, dass nicht alle Aspekte und Phenomena, die bei natürlichen und Programmiersprachen auftreten, durch kontextfreie Sprachen beschrieben werden können. Wir geben ein Beispiel.

Wir betrachten die Programmiersprache ALGOL60, einer der klassische deklarativen Programmiersprachen (ähnliche Konstruktionen lassen sich aber auch für andere Programmiersprachen durchführen). Bei ALGOL60 ist es erforderlich, jede auftretende Variable zu deklarieren. Wir betrachten das Programm

```
begin  integer x;
       y := 1
end
```

wobei die beiden auftretenden Variablen $x$ und $y$ jeweils durch ein Wort über $\{a, b\}$ gegeben seien. Damit das Programm richtig ist, muss an beiden Stellen des Auftretens einer Variablen jeweils das gleiche Wort stehen. Wenn wir den Durchschnitt von ALGOL60 mit der regulären Menge $S$ aller obigen Programme bilden und durch einen Homomorphismus $h$ dann alle von $a$ und $b$ verschiedenen Symbole löschen ergibt sich

$$R = h''(ALGOL \cap S) = \{xx \mid x \in \{a, b\}^*\}$$

Wenn ALGOL60 kontextfrei wäre, so würde auch $R$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Damit ist ALGOL60 keine kontextfreie Sprache.

Zur Beschreibung von natürlichen Sprachen und Programmiersprachen bedarf es also Mechanismen, die auch gewisse nicht-kontextfreie Sprachen erzeugen können. Dies ist sicher für die kontextsensitiven Grammatiken der Fall, die aber zwei negative Aspekte haben: Einige Entscheidbarkeitsprobleme sind für kontextsensitive Grammatiken unentscheidbar bzw. sehr schwer; so sind z.B. das Endlichkeits- und das Leerheitsproblem unentscheidbar. Zum anderen gibt es für kontextsensitive Grammatiken keine vernünftigen Ableitungsbäume, da mehrere Nichtterminale aus verschiedenen Schichten des Baumes von einer Regel betroffen sein können. Ableitungsbäume haben sich aber als sehr gutes Instrument für die Analyse von Sätzen in natürlichen Sprachen bzw. von Programmen erwiesen.

Daher ist man an Erweiterungen der kontextfreien Grammatiken interessiert, die zum einen Ableitungsbäume ermöglichen (d.h. jede angewendete Regel muss kontextfrei sein) und zum anderen möglichst einfach zu entscheidende Probleme haben. Wir präsentieren eine derartige Grammatik.

**Definition 4.13** *i) Eine Grammatik mit Auswahlkontext ist ein Quadrupel* $G = (N, T, P, S)$*, wobei*

- $N$*,* $T$*,* $S$ *die Menge der Nichtterminale, die Menge der Terminale bzw. das Startwort (Axiom) sind,*
- $P$ *eine endliche Menge von Paaren* $p = (r_p, E_p)$ *ist, wobei jeweils* $r_p = A_p \to w_p$ *eine kontextfreie Regel ist, und* $E_p$ *eine Teilmenge von* $N$ *ist.*

*ii) Für zwei nichtleere Wörter $x$ und $y$ über $N \cup T$ sagen wir, dass $y$ aus $x$ durch Anwendung von $p = (A \to w, E)$ erzeugt wird (geschrieben als $X \Longrightarrow_p y$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*
*— $x = uAv$, $y = uwv$ (kontextfreie Ersetzung)*
*— jedes Symbol aus $E$ kommt in $uv$ vor.*
*Wir sagen, dass $y$ aus $x$ in $G$ durch einen Ableitungsschritt entsteht (geschrieben als $x \Longrightarrow_G y$), wenn es eine Regel $p$ mit $x \Longrightarrow_p y$ gibt.*

*iii) Die von einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Auswahlkontext erzeugte Sprache $L(G)$ ist*

$$L(G) = \{w \mid S \Longrightarrow_G^* w,\ w \in T^*\},$$

*wobei $\Longrightarrow_G^*$ der reflexive und transitive Abschluss von $\Longrightarrow_G$ ist.*

Bei einer Regel $p = (A \to w, E)$ heißt $E$ der geforderte Kontext der Regel $A \to w$.

Die Definition der Grammatiken mit Auswahlkontext ist speziell darauf abgestellt, einen Zusammenhang zwischen Deklaration und Benutzung von Variablen in Programmiersprachen zu ermöglichen, d.h. den Grund dafür, dass oben im dritten Beispiel eine nicht kontextfreie Sprache auftritt, zu eliminieren. Dies geschieht dadurch, das eine Benutzung einer Variablen entsprechend einer Regel nur möglich ist, wenn diese schon in der Satzform vorkommt.

Wir bemerken weiterhin, dass Grammatiken mit Auswahlkontext eine Erweiterung der kontextfreien Grammatiken sind, denn bei der Wahl von $E = \emptyset$ für jede Regel, ergibt sich eine kontextfreie Grammatik, da nun keine Bedingungen mehr für die Anwendung von Regeln vorliegen (also jede Regel jederzeit anwendbar ist); und umgekehrt kann jede kontextfreie Grammatik als eine Grammatik mit Auswahlkontext aufgefasst werden, bei der alle geforderten Kontexte leer sind.

Wir zeigen nun, dass Grammatiken mit Auswahlkontext Sprachen erzeugen können, die nicht kontextfrei sind.

**Beispiel 4.14** Wir betrachten die Grammatik mit Auswahlkontext

$$G_1 = (\{S, A, A', A_a, A_b, B, B'\}, \{a, b, c\}, \{p_0, p_1, \ldots, p_{10}\}, S)$$

mit den Regeln

$$\begin{array}{lll}
p_0 = (S \to AB, \emptyset), & p_1 = (A \to aA_a, \{B\}), & p_2 = (A \to bA_b, \{B\}),\\
p_3 = (B \to aB', \{A_a\}), & p_4 = (B \to bB', \{A_b\}), & p_5 = (A_a \to A, \{B'\}),\\
p_6 = (A_b \to A, \{B'\}), & p_7 = (B' \to B, \{A\}) & p_8 = (A \to A', \{B\}),\\
p_9 = (B \to \lambda, \{A'\}), & p_{10} = (A' \to \lambda, \emptyset). &
\end{array}$$

Offensichtlich beginnt jede Ableitung mit der einzigen Regel für $S$, d.h. wir erhalten $S \Longrightarrow AB$. Wir wollen etwas allgemeiner von einer Satzform $wAwB$ ausgehen (das in einem Schritt erhaltene Wort $AB$ wird gerade bei $w = \lambda$ erhalten). Wir können keine der Regeln mit linker Seite $B$ anwenden, da der jeweilige geforderte Kontext $A_a$ bzw. $A_b$ bzw.$A'$ in der Satzform nicht vorhanden ist. Folglich muss eine Regel mit linker Seite $A$ verwendet werden. Wir unterscheiden drei Fälle.

*Fall 1.* Es wird die Regel $p_1$ angewendet. Dadurch erhalten wir $waA_awB$. Da die einzige Regel für $A_a$ den geforderten Kontext $B'$ hat, ist eine Regel für $B$ anzuwenden. Es kommt nur Regel $p_3$ in Frage, da bei den anderen Regeln wieder der geforderte Kontext fehlt. Daher ergibt sich $waA_awaB'$. Jetzt ist nur Regel $p_5$ anwendbar, wodurch $waAwaB'$ entsteht. Nun ist Regel $p_7$ anzuwenden, und wir erhalten $waAwaB$. Damit haben wir wieder die Ausgangssituation erhalten, nur dass das Wort an beiden Stellen um den Buchstaben $a$ verlängert wurde.

*Fall 2.* Es wird die Regel $p_2$ angewendet. Dann ergibt sich analog zu Fall 1 als einzig mögliche Ableitung

$$wAwB \Longrightarrow_{p_2} wbA_bwB \Longrightarrow_{p_4} wbA_bwbB' \Longrightarrow_{p_6} wbAwbB' \Longrightarrow_{p_7} wbAwbB,$$

d.h. wir haben das Wort an beiden Stellen um den Buchstaben $b$ verlängert.

*Fall 3.* Es wird die Regel $p_8$ angewendet. Dann ergibt sich die eindeutige Ableitung

$$wAwB \Longrightarrow_{p_8} wA'wB \Longrightarrow_{p_9} wA'w \Longrightarrow_{p_{10}} ww$$

(man beachte, dass die Anwendung von $p_{10}$ auf $wA'wB$ zwar möglich ist, aber $wwB$ liefert, worauf keine Regel mehr anwendbar ist und somit kein terminales Wort erreicht werden kann).

Aufgrund der drei Fälle ist sofort zu sehen, dass

$$L(G_1) = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

gilt.

**Beispiel 4.15** Wir betrachten die Grammatik

$$G_2 = (\{S, A, B, A', B'\}, \{a, b, c\}, \{q_0, q_1, \ldots, q_\}\}, S),$$

wobei die Regeln durch

$$\begin{array}{lll} p_0 = (S \to AB, \emptyset), & p_1 = (A \to aA'b, \{B\}), & p_2 = (B \to B'c, \{A'\}), \\ p_3 = (A' \to A, \{B'\}), & p_4 = (B' \to B, \{A\}), & p_5 = (A \to A'', \{B\}), \\ p_6 = (B \to c, \{A''\}), & p_7 = (A'' \to ab, \emptyset) & \end{array}$$

gegeben sind. Es ist leicht – in Analogie zum vorhergehenden Beispiel – zu sehen, dass ausgehend von einem Wort der Form $a^nAb^nBc^n$ mit $n \geq 0$ (durch Anwendung der einzigen Regel für das Axiom entsteht ein Wort dieser Form mit $n = 0$) nur die beiden folgenden Ableitungen möglich sind:

$$a^nAb^nBc^n \Longrightarrow a^naA'bb^nBc^n \Longrightarrow a^naA'bb^nB'cc^n \Longrightarrow a^{n+1}Ab^{n+1}B'c^{n+1} \Longrightarrow a^{n+1}Ab^{n+1}Bc^{n+1},$$
$$a^nAb^nBc^n \Longrightarrow a^nA''b^nBc^n \Longrightarrow a^nA''b^ncc^n \Longrightarrow a^nabb^nc^{n+1} = a^{n+1}b^{n+2}c^{n+1}.$$

Hieraus folgt sofort

$$L(G_2) = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}.$$

Es sei eine Grammatk $G = (N, T, P, S)$ mit Auswahlkontext gegeben. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass bei jeder Regel $p = (A_p \to w_p, E_p)$ die Beziehung $A_p \notin E_p$ gilt (die Forderung nach der Existenz von $A_p$ in der Satzform, auf die die Regel angewendet werden soll, ist nicht notwendig, da nur bei Existenz von $A_p$ die Regel $A_p \to w_p$ anwendbar ist). Wir definieren den Homomorphismus

$h : (N \cup T)^* \to N^*$ durch $h(A) = A$ für $A \in N$ und $h(a) = \lambda$ für $a \in T$. Für ein Wort $w \in N \cup T)^*$ wird $h(w)$ offenbar, dadurch gebildet, dass alle Terminale in $w$ gestrichen werden.

Wir konstruieren nun das Petri-Netz $H = (N, P, F, V, m_0)$, bei dem die Menge der Stellen durch die Menge der Nichtterminale von $G$ und die Menge der Transitionen durch die Regeln von $G$ gegeben ist und $F$,$V$ und $m_0$ durch folgende Setzungen definiert sind. Für eine Regel $p = (A_p \to w_p, E_p)$

$$
\begin{aligned}
p^-(A) &= \begin{cases} 1 & \text{for } A \in E_p \\ 1 & \text{for } A = A_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \\
p^+(A) &= \begin{cases} 1 + \#_A(h(w_p)) & \text{for } A \in E_p \\ \#_A(h(w_p)) & \text{otherwise} \end{cases}, \\
m_0(A) &= \begin{cases} 1 & \text{for } S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bei der Anfangsmarkierung ist genau eine Marke im Netz, die auf der Stelle $S$ liegt. Offensichtlich ist die Transition $p$ aktiviert, wenn auf jeder Stelle $A$ aus $E_p$ und auf der Stelle $A_p$ jeweils mindestens eine Marke liegt, d.h. wenn $p$ als Regel anwendbar ist. Beim Schalten von $p$ wird die Marke von $A_p$ abgezogen, jeweils eine Marke auf den $A$ aus $E_p$ wird abgezogen und wieder hingelegt und zusätzlich werden auf jede Stelle $A$ soviel Marken abgelegt, wie $A$ in $w_p$ vorkommen. Aus diesen Bemerkungen folgt, dass jeder Ableitung

$$S = w_0 \Longrightarrow_{p_1} w_1 \Longrightarrow_{p_2} w_2 \Longrightarrow_{p_3} w_3 \Longrightarrow_{p_4} \dots \Longrightarrow_{p_{k-1}} w_{k-1} \Longrightarrow_{p_k} w_k \in T^*$$

eine Folge

$$m_0[p_1 > m_1[p_2 > m_2[p_3 > m_3[p_4 > \cdots [p_{k-1} > m_{k-1}[p_k > m_k$$

mit

$$m_i(A) = \#_A(h(w_i))$$

entspricht und umgekehrt. Da $w_k$ in $T^*$ liegt, gilt $\#_A(w_k) = 0$ für alle $A \in N$. Daher wird genau dann ein Wort über dem Terminalalphabet erzeugt, wenn die 0-Markierung in $H$erreichbar ist. Somit ist die von $G$ erzeugte Sprache $L(G)$ genau dann nicht leer, wenn die 0-Markierung in $H$ erreichbar ist. Da die Erreichbarkeit einer Markierung in einem Netz nach Satz 3.31 entscheidbar ist, erhalten wir den folgenden Satz.

**Satz 4.16** *Das Leerheitsproblem für Grammatiken mit Auswahlkontext ist entscheidbar.*

Da die Regeln einer Grammatik mit Auswahlkontext kontextfrei sind, können wir für diese Grammatiken Ableitungsbäume definieren. Außerdem sind wir in der Lage auch einige nicht-kontextfreie Sprache zu erzeugen (darunter die Sprachen, die man aus der Sicht natürlicher Sprachen für erforderlich hält). Während das Leerheitsproblem für kontextsensitive Grammatiken unentscheidbar ist, ist es für Grammatiken mit Auswahlkontext entscheidbar. Damit sind Grammatiken mit Auswahlkontext ein möglicher Kandidat zur Beschreibung von natürlichen und Programmiersprachen.

# Literaturverzeichnis


[1] B. Baumgarten, *Petri-Netze. Grundlagen und Anwendungen.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990.

[2] M. Jantzen, The large marking problem. *Petri Net Newsletter* **14** (1983) 24–25.

[3] S. R. Kosaraju, Decidability of reachability in vector addition systems. *Proc. 14th Ann. ACM STOC* (1982) 267-281.

[4] E. W. Mayr, An algorithm for the general petri net reachability problem. *SIAM J. Comput.* **13** (1984) 441-460.

[5] H. Müller, The reachability problem for VAS. In: *Lecture Notes in Computer Science* **188** (1984) 376–391.

[6] W. Reisig, *Petrinetze. Eine Einführung.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[7] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley, 1986.

[8] P. H. Starke, *Petri-Netze.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[9] P. H. Starke, *Analyse von Petri-Netz-Modellen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1990.

[10] J. Wehler, *Petri Nets.* Vorlesungsskript, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1999.