Literatur

A. Beutelspacher: Kryptologie. Vieweg, 1991.

A. Salomaa, *Public-Key Cryptography*. Springer-Verlag, 1996.

D. Wätjen, Kryptographie. Grundlagen, Algorithmen, Protokolle. Spektrum-Verlag, 2003.

R. Merkle, M. Hellman: Hiding informations and signatures in trapdoor knapsacks. *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-24** (1978) 525–530.

R.L. Rivest / A. Shamir / L. Adleman, A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Comm. ACM* **21** (1978) 120–126.

J. Kari, Observations concerning a public-key cryptosystem based on iterated morphisms. *Theor. Comp. Sci.* **66**(1989) 45–53.

Funktion φ

α	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\varphi(\alpha)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
α	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
$\varphi(\alpha)$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
$\varphi(\alpha)$	18	19	20	21	22	23	24	25	

Bemerkungen zum deutschen Alphabet

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	1	2	3	4	5	6	7	8
6,51	1,89	3,06	5,08	17,40	1,66	3,01	4,76	7,55

J	K	L	M	N	O	P	Q	R
9	10	11	12	13	14	15	16	17
0,27	1,21	3,44	2,53	9,78	2,51	0,79	0,02	7,00

S	T	U	V	W	X	Y	Z
18	19	20	21	22	23	24	25
7,27	6,15	4,35	0,67	1,89	0,03	0,04	1,13

Ein verschlüsselter Text I

C T J C J C S C T J C O X V A J U I Q P A A D C H K D C C T C P

X H I V J I

9-mal : C

5-mal : J

3-mal : A, I, T

2-mal : D, H, P, V, X

1-mal : K, N, O, Q, S

0-mal : B, E, F, G, L, M, R, W, Y, Z

Affine Chiffrierung – Beispiel

α	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\varphi(\alpha)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a \cdot \varphi(\alpha) + b \bmod 26$	5	8	11	14	17	20	23	0	3
$v_{(3,5)}(\alpha)$	F	I	L	O	R	U	X	A	D

α	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
$\varphi(\alpha)$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$a \cdot \varphi(\alpha) + b \bmod 26$	6	9	12	15	18	21	24	1	4
$v_{(3,5)}(\alpha)$	G	J	M	P	S	V	Y	B	E

α		S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\varphi(\alpha)$	18	19	20	21	22	23	24	25	
$a \cdot \varphi(\alpha) + b \bmod 26$	7	10	13	16	19	22	25	2	
$v_{(3,5)}(\alpha)$	H	K	N	Q	T	W	Z	C	

Eine Fairplay-Tabelle

G	R	E	I	F
S	W	A	L	D
B	C	H	K	M
N	O	P	Q	T
U	V	X	Y	Z

Vigenère-Tabelle

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Ein verschlüsselter Text II a

U E Q P C V C K A H V N R Z U R N L A O
K I R V G J T D V R V R I C V I D L M Y
I Y S B C C O J Q S Z N Y M B V D L O K
F S L M W E F R Z A V I Q M F J T D I H
C I F P S E B X M F F T D M H Z G N M W
K A X A U V U H J H N U U L S V S J I P
J C K T I V S V M Z J E N Z S K A H Z S
U I H Q V I B X M F F I P L C X E Q X O
C A V B V R T W M B L N G N I V R L P F
V T D M H Z G N M W K R X V R Q E K V R
L K D B S E I P U C E A W J S B A P M B
V S Z C F U E G I T L E U O S J O U O H
U A V A G Z E Z I S Y R H V R Z H U M F
R R E M W K N L K V K G H A H F E U B K
L R G M B J I H L I I F W M B Z H U M P
L E U W G R B H Z O L C K V W T H W D S
I L D A G V N E M J F R V Q S V I Q M U
V S W M Z C T H I I W G D J S X E O W S
J T K I H K E Q

Ein verschlüsselter Text II b

U E Q P C V C K A H V N R Z U R N L A O
K I R V G J T D V R V R I C V I D L M Y
I Y S B C C O J Q S Z N Y M B V D L O K
F S L M W E F R Z A V I Q M F J T D I H
C I F P S E B X M F F T D M H Z G N M W
K A X A U V U H J H N U U L S V S J I P
J C K T I V S V M Z J E N Z S K A H Z S
U I H Q V I B X M F F I P L C X E Q X O
C A V B V R T W M B L N G N I V R L P F
V T D M H Z G N M W K R X V R Q E K V R
L K D B S E I P U C E A W J S B A P M B
V S Z C F U E G I T L E U O S J O U O H
U A V A G Z E Z I S Y R H V R Z H U M F
R R E M W K N L K V K G H A H F E U B K
L R G M B J I H L I I F W M B Z H U M P
L E U W G R B H Z O L C K V W T H W D S
I L D A G V N E M J F R V Q S V I Q M U
V S W M Z C T H I I W G D J S X E O W S
J T K I H K E Q

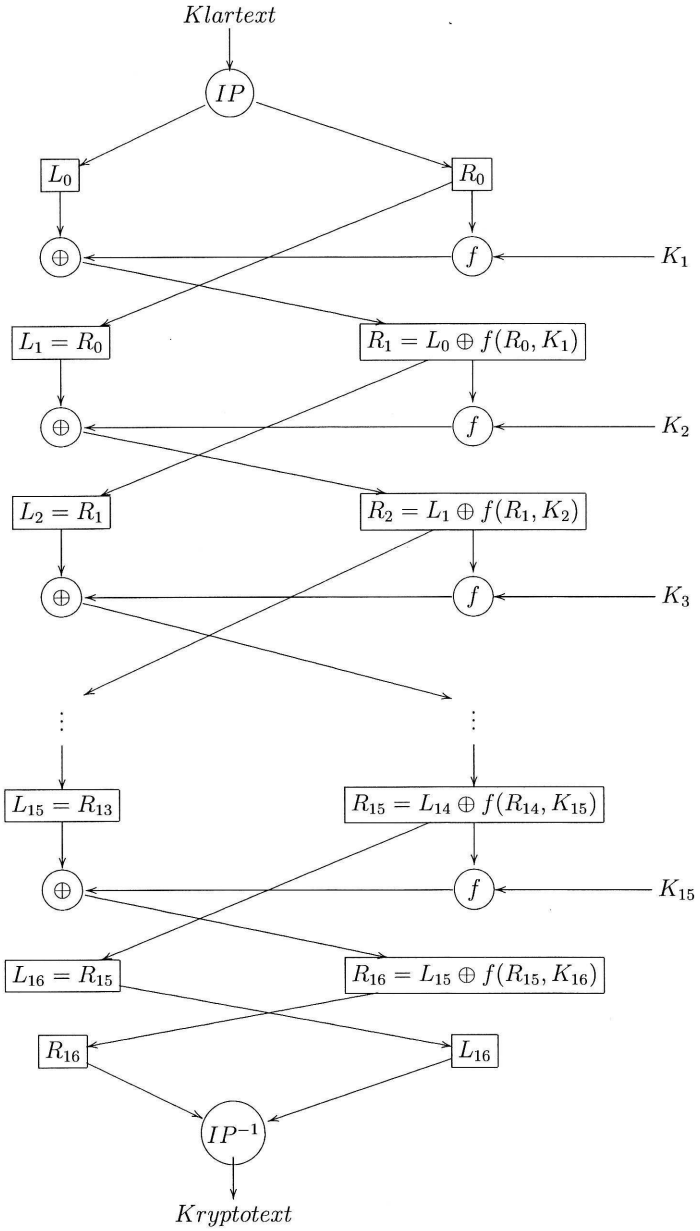
Folge	Abstand
JTD	$50 = 2 \cdot 5^2$
VIQM	$265 = 5 \cdot 53$
TDMHZGNMWK	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
MWK	$75 = 3 \cdot 5^2$
ZHUM	$40 = 2^3 \cdot 5$
KAH	$128 = 2^7$

Der unverschlüsselte Text II c

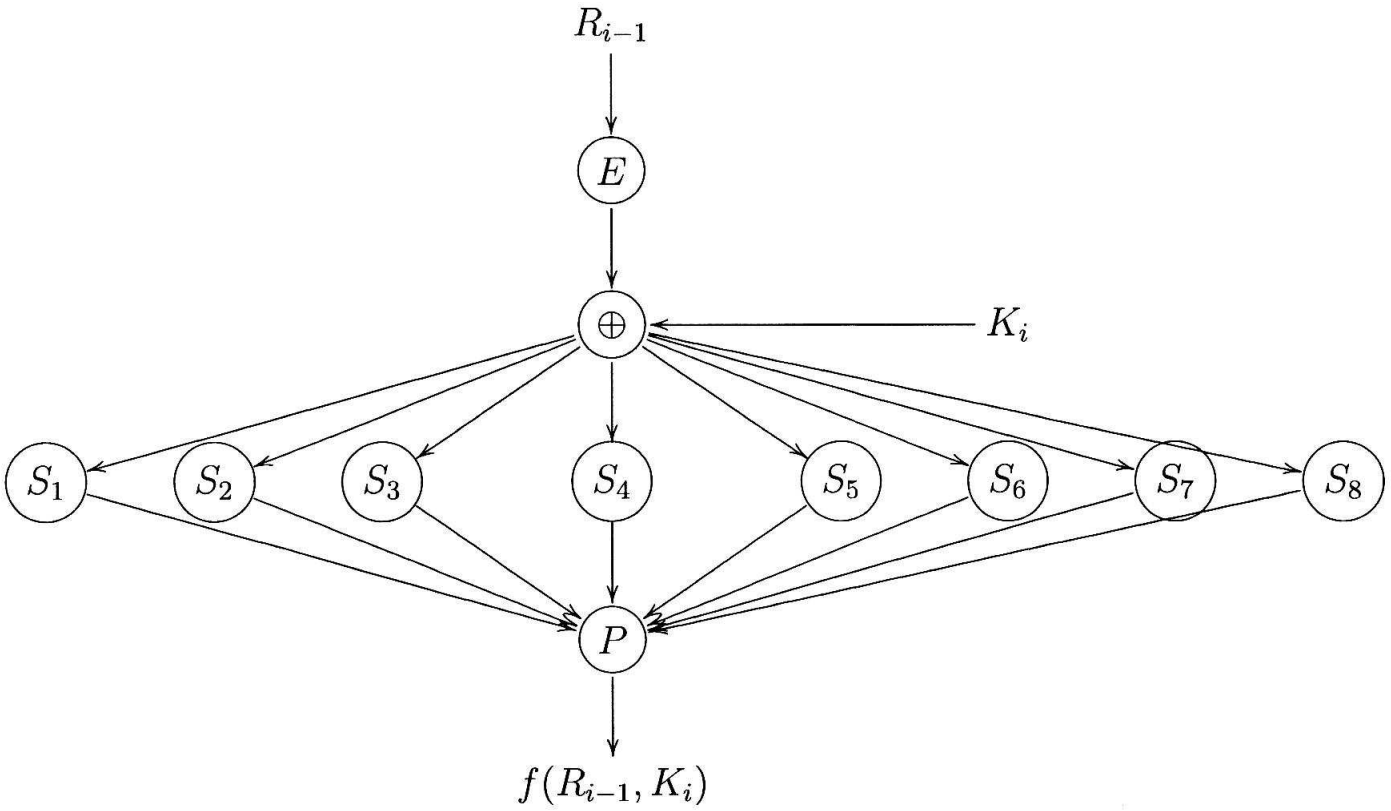
```
D E N H O E C H S T E N O R G A N I S A
T I O N S S T A N D E R F U H R D I E K
R Y P T O L O G I E I N V E N E D I G W
O S I E I N F O R M E I N E R S T A A T
L I C H E N B U E R O T A E T I G K E I
T A U S G E U E B T W U R D E E S G A B
S C H L U E S S E L S E K R E T A E R E
D I E I H R B U E R O I M D O G E N P A
L A S T H A T T E N U N D F U E R I H R
E T A E T I G K E I T R U N D Z E H N D
U K A T E N I M M O N A T B E K A M E N
E S W U R D E D A F U E R G E S O R G T
D A S S S I E W A E H R E N D I H R E R
A R B E I T N I C H T G E S T O E R T W
U R D E N S I E D U R F T E N I H R E B
U E R O S A B E R A U C H N I C H T V E
R L A S S E N B E V O R S I E E I N E G
E S T E L L T E A U F G A B E G E L O E
S T H A T T E N
```

DEN HÖCHSTEN ORGANISA-
TIONSSTAND ERFUHR DIE
KRYPTOLOGIE IN VENEDIG, WO
SIE IN FORM EINER STAAT-
LICHEN BÜROTÄTIGKEIT
AUSGEÜBT WURDE. ES GAB
SCHLÜSSELSEKRETÄRE,
DIE IHR BÜRO IM DOGENPA-
LAST HATTEN UND FÜR IHRE
TÄTIGKEIT RUND ZEHN
DUKATEN IM MONAT BEKAMEN.
ES WURDE DAFÜR GESORGT,
DASS SIE WÄHREND IHRER
ARBEIT NICHT GESTÖRT
WURDEN. SIE DURFTEN IHRE
BÜROS ABER AUCH NICHT
VERLASSEN, BEVOR SIE EINE
GESTELLTE AUFGABE GELÖST
HATTEN.

Data Encryption Standard I – Verschlüsselungsalgorithmus



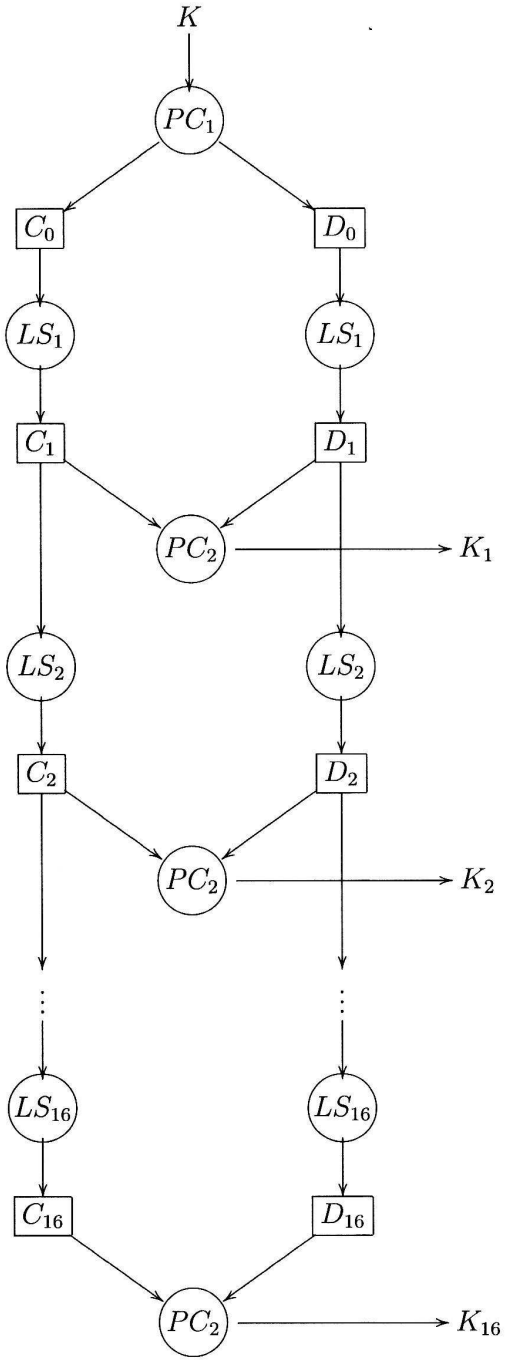
Data Encryption Standard II - Berechnungsschema von f



Data Encryption Standard III – Transformationen S_i

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0	14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7	S_1
1	0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8	
2	4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	9	
3	15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13	
0	15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10	S_2
1	3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5	
2	0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15	
3	13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9	
0	10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8	S_3
1	13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1	
2	13	6	4	9	8	15	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7	
3	1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12	
0	7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15	S_4
1	13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9	
2	10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4	
3	3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14	
0	2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	8	14	9	S_5
1	14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6	
2	4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14	
3	11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3	
0	12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	5	11	S_6
1	10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8	
2	9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6	
3	4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	1	7	6	0	8	13	
0	4	11	2	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1	S_7
1	13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6	
2	1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2	
3	6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12	
0	13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7	S_8
1	1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2	
2	7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8	
3	2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11	

Data Encryption Standard IV – Berechnung der K_i



Ein verschlüsselter Text III a

D E R I N D E R K A M V O R D E M

L E T T E N E R S A H D E N U N G

A R N U N D B E Z A H L T E D A S

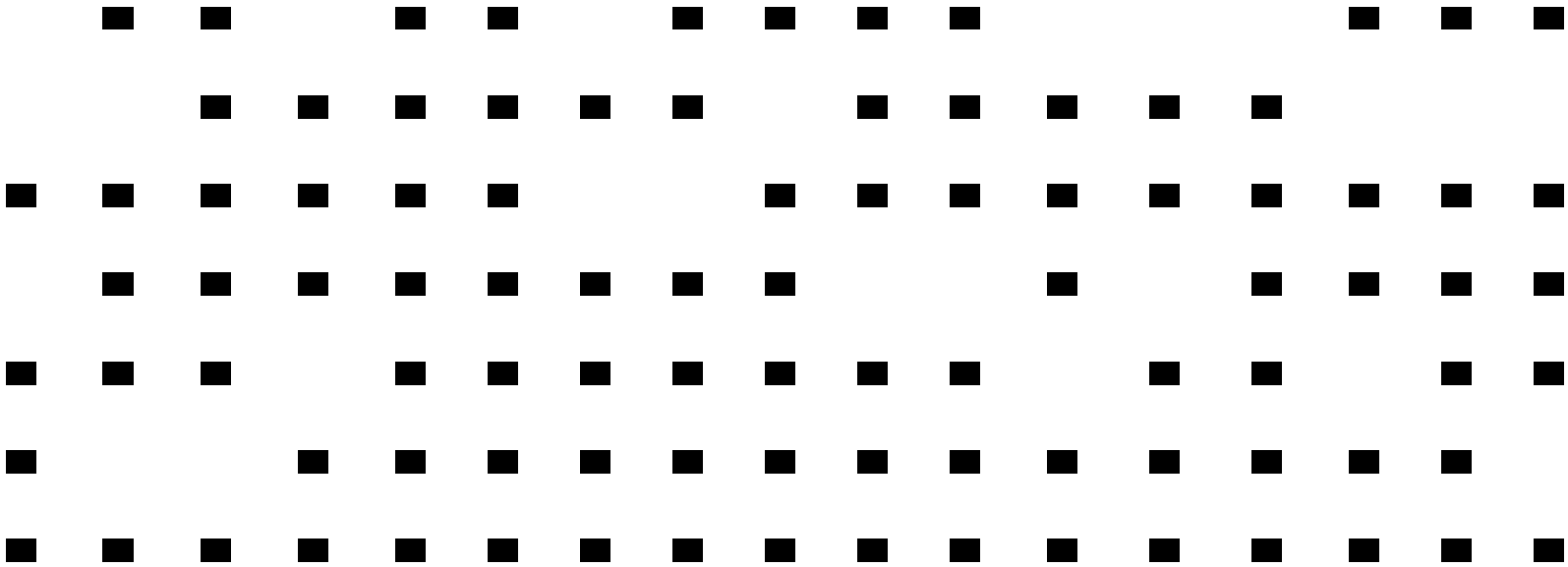
G E L D I M K L E I N E N R A U M

D E S T U R M E S . A U F D E R B

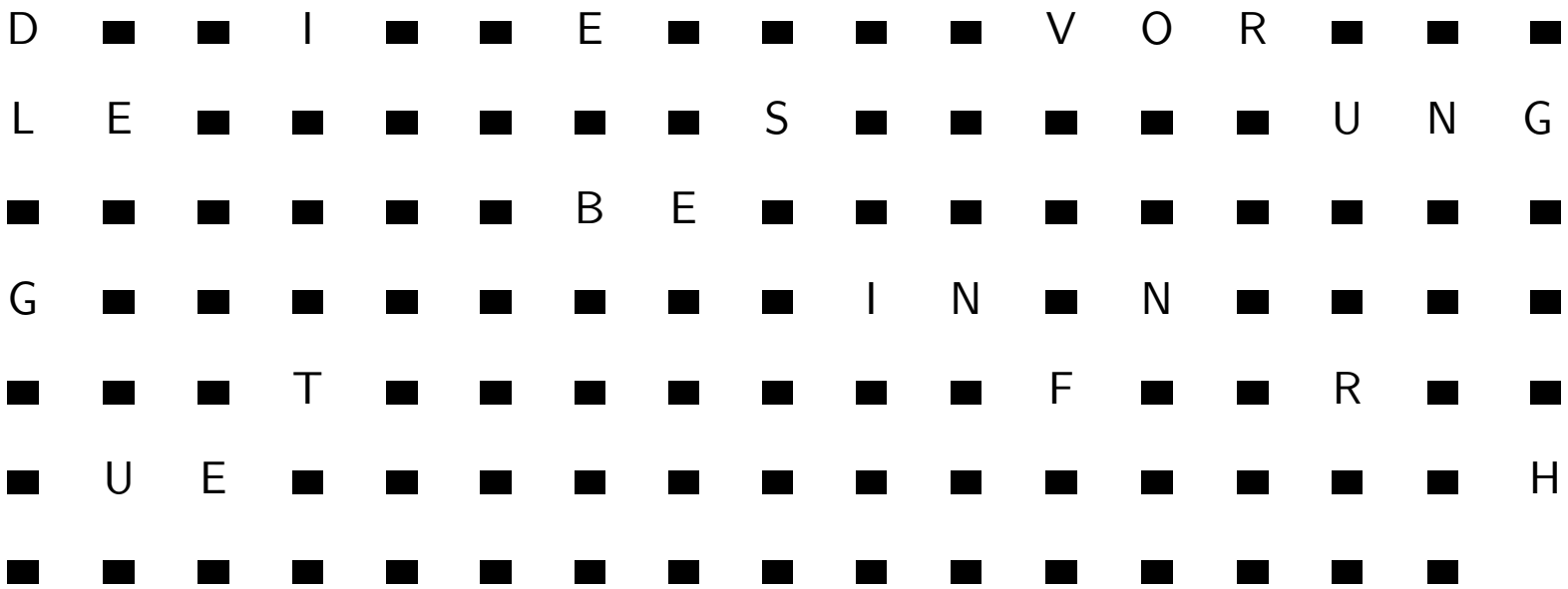
L A U E N L I E G E S A S S D E R

H E S S E G E L A N G W E I L T .

Ein verschlüsselter Text III b



Ein verschlüsselter Text III c



Perfekte Sicherheit

Definition: Wir sagen, dass die Verschlüsselungen aus $\mathcal{S}$ (bzw. die Schlüssel zu $\mathcal{S}$) hinsichtlich $\mathcal{T}$ und $\mathcal{K}$ perfekte Sicherheit bieten, falls

$$p_k(t) = p(t) \text{ für jeden Kryptotext } k \in \mathcal{K} \text{ und jeden Klartext } t \in \mathcal{T}$$

gilt.

Satz: Es sei $\mathcal{S}$ ein Schlüsselsystem mit $\#(\mathcal{T}) = \#(\mathcal{K}) = \#(\mathcal{K})$, in dem alle Schlüssel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommen und in dem es zu jedem Klartext t und jedem Kryptotext k genau eine Transformation $\tau \in \mathcal{S}$ gibt, für die $\tau(t) = k$ gilt. Dann bietet $\mathcal{S}$ perfekte Sicherheit bez. $\mathcal{T}$ und $\mathcal{K}$.

Schieberegister I

Definition:

i) Unter einem Schieberegister der Länge m verstehen wir

– m Speicherelemente k_1, k_2, . . . k_m, von denen jedes zu einem Zeitpunkt t, $t \geq 0$, genau ein Element $k_i(t) \in \{0, 1\}$ enthält,

– m Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ aus $\{0, 1\}$ und

– m Werte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus $\{0, 1\}$.

ii) Die Speicherelemente sind durch $k_i(0) = x_i$ für $1 \leq i \leq m$ initialisiert.

Die Veränderung in einem Speicherelement erfolgt taktweise entsprechend den folgenden Formeln:

– $k_1(t+1) = c_1k_1(t) \oplus c_2k_2(t) \oplus \ldots \oplus c_mk_m(t)$,

– $k_i(t+1) = k_{i-1}(t)$ für $2 \leq i \leq m,\ t \geq 0$.

iii) Die von einem Schieberegister ausgegebene Folge ist $k_t(0)k_t(1)k_t(2)\ldots$

Zwei Sätze

Satz.
Die Aufgabe des Kryptoanalysten, zu einem gegeben Kryptotext k den Klartext t zu finden, liegt in der Komplexitätsklasse NP (der nichtdeterministisch in polynomialer Zeit lösbaren Probleme).

Satz.
Wenn die Aufgabe des Kryptoanalysten NP-vollständig ist,
dann gilt NP=co-NP.

Super-Wachstum

Definition: i) Ein Vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt monoton wachsend, falls $a_i < a_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ gilt.

ii) Ein Vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt super-wachsend, falls

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_j < a_i$$

für $2 \leq i \leq n$ gilt.

Satz: Ist das Rucksack-Problem durch einen super-wachsenden Vektor A und a_{n+1} gegeben, so ist eine Lösung des Problems in linearer Zeit bestimmbar.

Modulare Multiplikation

Definition: Es seien der Vektor $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gegeben. Ferner seien (t, m) ein Paar natürlicher Zahlen mit

$$ggT(t, m) = 1 \quad \text{und} \quad m > \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

i) Wir sagen, dass der Vektor

$$B = (ta_1 \bmod m,\ ta_2 \bmod m,\ \ldots, ta_n \bmod m)$$

aus A durch modulare Multiplikation mit (t, m) entsteht. t und m heißen Faktor bzw. Modulus der modularen Multiplikation.

ii) Falls sogar $m > \sum -i = 1^n a_i$ gilt, so sprechen wir von strenger modularer Multiplikation.

Eine Transformation

Satz:

Es seien A ein super-wachsender Vektor und b eine natürliche Zahl. Der Vektor B entstehe aus A durch strenge modulare Multiplikation mit (t, m).

i) Das Rucksack-Problem (B, b) besitzt höchstens eine Lösung.

ii) Wenn das Rucksack-Problem (B, b) eine Lösung besitzt, dann stimmt sie mit der Lösung von $(A, t^{-1}b)$ überein.

Super-Erreichbarkeit

Definition: Ein Vektor B heißt super-erreichbar, wenn es einen super-wachsenden Vektor A gibt, aus dem B mittels strenger modularer Multiplikation gewonnen werden kann.

Definition: Für einen Vektor $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$, eine natürliche Zahlen m und t mit $m \geq \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ und $ggT(t, m) = 1$ und eine natürliche Zahl $k \geq 0$ definieren den Vektor

$$A(k) = (a_1 + k\lfloor ta_1/m \rfloor, a_1 + k\lfloor ta_1/m \rfloor, \ldots, a_1 + k\lfloor ta_1/m \rfloor)\,.$$

Die Folge der Vektoren $A(k)$, $k \geq 0$, heißt wachsende Folge zu A bez. (t, m).

Einige Aussagen I

Es seien $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ ein Vektor und m und t natürliche Zahlen mit $m \geq \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ und $ggT(t, m) = 1$.

Lemma: Ist A ein (super-)wachsender Vektor, so ist auch jeder Vektor $A(k)$, $k \geq 0$, der wachsenden Folge bez. (m, t) (super-)wachsend.

Lemma: Falls der Vektor B durch eine modulare Multiplikation mit (t, m) aus dem Vektor A gewonnen werden kann. so entsteht B für jede natürliche Zahl $k \geq 0$ durch modulare Multiplikation mit $(t, mk + t)$ aus dem Vektor $A(k)$ der wachsenden Folge bez. (t, m). Diese Aussage gilt auch, wenn modulare Multiplikation durch strenge modulare Multiplikation ersetzt wird.

Einige Aussagen II

Lemma: Es seien $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ ein Vektor und m und t natürliche Zahlen mit $m \geq \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ und $ggT(t, m) = 1$. Ferner sei B aus A mittels modularer Multiplikation mit (t, m) entstanden.

Dann gibt es genau dann ein $k \geq 0$ derart, dass B aus dem superwachsenden Vektor $A(k)$ der wachsenden Folge von A bez. (t, m) durch strenge modulare Multiplikation entsteht, wenn

$$\text{mit } m \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ auch } \sum_{i=1}^{n} \lfloor ta_i/m \rfloor < t \text{ gilt}$$

und

$$\text{für jedes } i,\ 1 \leq i \leq n, \text{ mit } a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j \text{ auch } \sum_{j=1}^{i-1} \lfloor ta_j/m \rfloor < \lfloor ta_i/m \rfloor \text{ gilt.}$$

Einige Aussagen III

Lemma: Es seien $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ ein Vektor und m und t natürliche Zahlen mit $m \geq \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ und $ggT(t, m) = 1$. Ferner sei B aus A mittels modularer Multiplikation mit (t, m) entstanden.

Falls B aus einem super-wachsenden Vektor $A(k)$ der wachsenden Folge von A bez. (t, m) durch strenge modulare Multiplikation entsteht, so sind alle $A(l)$ mit $l \geq \max\{z, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ super-wachsend und B entsteht aus jedem $A(l)$ durch strenge modulare Multiplikation.

Lemma: Der Vektor $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ entstehe aus dem Vektor $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ durch (strenge) modulare Multiplikation mit (t, m). Ferner seien

$A_1 = (\lfloor ta_1/m \rfloor, \lfloor ta_2/m \rfloor, \ldots, \lfloor ta_n/m \rfloor, \;\; t_1 = -m \bmod m \;\; \text{und} \;\; m_1 = t\,.$

Falls $t < m$ und $t > \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ gilt, so entsteht B auch durch (strenge) modulare Multiplikation mit (t_1, m_1) aus A_1.

Einige Aussagen IV

Folgerung: Wenn $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ super-erreichbar ist, dann entsteht B aus einem super-wachsenden Vektor A durch strenge modulare Multiplikator mit einem Faktor, der kleiner als $\max\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$.

Definition: Es seien A ein Vektor und t und m natürliche Zahlen mit $ggT(t, m) = 1$. Wir definieren induktiv eine Folge von Vektoren $A(-k)$ durch folgende Setzungen:

— Es gilt $A(-0) = A$.

— Ist $A(-k) = (d_1, d_2, \ldots d_n)$ bereits definiert und gilt $m - kt > \max\{d_1, d_2, \ldots d_n\}$, so setzen wir

$$A(-k-1) = (d_1 - \lfloor td_1/(m-kt) \rfloor, d_2 - \lfloor td_2/(m-kt) \rfloor, \ldots, d_n - \lfloor td_n/(m-kt) \rfloor)\,.$$

Die Folge der $A(-k)$ heißt fallende Folge zu A bez. (t, m).

Einige Aussagen V

Lemma:

i) Ist der Vektor $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ monoton wachsend, dann sind auch die Vektoren $A(-k)$ jeder fallenden Folge zu A monoton wachsend.

ii) Ist $A(-k)$ ein Element der fallende Folge von A bez. (t, m). Dann ist A das k-te Elemente der wachsenden Folge von $A(-k)$ bez. $(t, m - kt)$.

Lemma:

Der Vektor $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ resultiere aus A durch modulare Multiplikation mit (t, m), wobei

$$m > 2 \cdot \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\} \text{ und } t \leq \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$$

gelte. Dann resultiert B auch aus dem Vektor $A(-1)$ durch modulare Multiplikation mit $(t, m - t)$.

Einige Aussagen VI

Folgerung:

Wenn $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ durch modulare Multiplikation aus einem Vektor entsteht, dann gibt es einen Vektor A aus dem B durch modulare Multiplikation mit (t, m) entsteht, wobei

$$t \leq \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\} \text{ und } m \leq 2 \cdot \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$$

gelten.

Einige Aussagen VII

Satz: Der Vektor $B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ ist genau dann super-erreichbar, wenn es einen monoton wachsenden Vektor A, natürliche Zahlen t und m mit $t \leq \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\},\ m \leq 2 \cdot \max\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ und $ggT(t, m) = 1$ derart gibt, dass B aus A durch modulare Multiplikation mit (t, m) entsteht und A die Bedingung erfüllt, dass

$$\text{mit } m \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ auch } \sum_{i=1}^{n} \lfloor ta_i/m \rfloor < t \text{ gilt}$$

und

$$\text{für jedes } i,\ 1 \leq i \leq n, \text{ mit } a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j \text{ auch } \sum_{j=1}^{i-1} \lfloor ta_j/m \rfloor < \lfloor ta_i/m \rfloor \text{ gilt.}$$

T0L-Systeme

Definition: Ein T0L-System ist ein Quadrupel $G = (V, \sigma_0, \sigma_1, w)$, wobei
– V ein Alphabet ist,
– σ_0 und $sigma_1$ endliche Substitutionen von V^* in V^* sind, und
– w ein nichtleeres Wort über V ist.

Ein T0L-System heißt DT0L-System, falls σ_0 und σ_1 Morphismen sind.

Satz: i) Das Parsing-Problem

Gegeben: T0L-System $G = (V, \sigma_0, \sigma_2, w)$ und $v \in V^*$
Gesucht: Binärwort $x \in \{0,1\}^*$ mit $v \in \sigma_G(x)$
(oder man treffe die Aussage, dass ein derartiges Wort nicht existiert)

ist **NP**-vollständig.

ii) Das Parsing-Problem ist für DT0L-Systeme in polynomialer Zeit lösbar.

Rückwärts eindeutige DT0L-Systeme

Definition: Ein DT0L-System $G = (V, h_0, h_1, w)$ heißt rückwärts eindeutig, wenn aus

$$h_{i_n}(h_{i_{n-1}}(\ldots(h_{i_1}(w))\ldots)) = h_{j_m}(h_{j_{m-1}}(\ldots(h_{j_1}(w))\ldots))$$

folgt, dass

$$m = n \quad \text{und} \quad i_k = j_k \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

gelten.

Satz: Es ist algorithmisch nicht entscheidbar, ob ein gegebenes DT0L-System rückwärts eindeutig ist.

Einige Fakten I

Fakt 1.
Für zwei Primzahlen p und q möge $x = a \bmod p$ und $x = a \bmod q$ gelten. Dann gilt auch $x = a \bmod pq$.

Fakt 2.
i) Für n und m gelte $ggT(n, m) = 1$. Dann ist $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
ii) Für eine Primzahl p und eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Fakt 3.
Für jede Primzahl p und jedes $a \in M_p$ gilt $a^{p-1} = 1 \bmod p$.

Fakt 4.
Für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 2$ und $a \geq 1$ mit $ggT(a, n) = 1$ gilt die Beziehung $a^{\varphi(n)} = 1 \bmod n$.

Einige Fakten II

Fakt 5.
Für eine natürliche Zahl n sei $p(n)$ die Anzahl der Primzahlen, die $\leq n$ sind. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(p(n) - \frac{n}{\ln n}\right) = 0\,,$$

wobei $\ln$ den natürlich Logarithmus bedeutet.

Fakt 6.
i) Für zwei natürliche Zahlen n und m mit $n \geq m \geq 1$ lässt sich ihr größter gemeinsamer Teiler $ggT(n,m)$ in logarithmischer Zeit in n berechnen.
ii) Für natürliche Zahlen n und m mit $n \geq m \geq 1$ und $ggT(m,n) = 1$ lässt sich in logarithmischer Zeit in n eine Zahl a mit $ma = 1 \bmod n$ berechnen.

Zeugen für Primzahleigenschaft

Wir nennen eine Zahl u einen *Zeugen* dafür, dass eine Zahl m eine Primzahl ist, falls u die Bedingungen $ggT(u,m) = 1$ und $u^{m-1} = 1 \bmod m$ erfüllt.

Lemma:
Für eine gegebene Zahl $m \geq 2$ sind entweder alle Zahlen oder höchstens die Hälfte aller Zahlen u mit $1 \leq u \leq m-1$ und $ggt(u,m) = 1$ ein Zeuge dafür, dass m eine Primzahl ist.