Logik

Übungsblatt 10
(für die 2. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2010/2011

Magdeburg, 14. Dezember 2010

1. Gegeben seien die Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{c\}$, $F_1 = \{f\}$, $R_1 = \{r_1\}$, $R_2 = \{r_2\}$, $F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$, die Interpretation $I = (U, \tau)$ durch $U = \{a, b\}^*$ und

$$\begin{aligned}
&\tau(c) = ab,\\
&\tau(f) = F\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^* \qquad \text{mit} \qquad F(u) = \begin{cases} aau' & \text{für } u = au',\\ u & \text{sonst,}\end{cases}\\
&\tau(r_1) = \{u \in \{a,b\}^* \mid u \text{ beginnt mit } a\},\\
&\tau(r_2) = \{(u,v) \mid |u| \leq |v|\}
\end{aligned}$$

sowie die Belegung α bez. I mit $\alpha(x) = bb$. Bestimmen Sie die Werte $w_\alpha^I(A)$ der Ausdrücke

a) $A = (r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
b) $A = (r_2(f(c), x) \vee r_2(c, f(x)))$,
c) $A = \forall x(r_1(f(c)) \wedge r_2(x, f(x)))$,
d) $A = \exists x(r_1(f(x)) \wedge r_2(f(x), x))$,
e) $A = (\exists x r_1(f(x)) \wedge \exists x r_2(f(x), x))$.

2. Es seien $\mathcal{S}$ eine Signatur mit

$$F_1 = \{f\}, \quad R_3 = \{r\}, \quad K = R_1 = F_2 = R_2 = F_3 = R_i = F_i = \emptyset \text{ für } i \geq 4,$$

sowie $A = \forall x \exists y r(x, y, f(z))$ ein prädikatenlogischer Ausdruck.

a) Man gebe eine Interpretation I_1 an, die Modell für $\{A\}$ ist.
b) Man gebe eine Interpretation I_2 an, die kein Modell für $\{A\}$ ist.

3. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\exists v \forall u\, r(u, v) \to \forall x \exists y\, r(x, y))$ eine Tautologie ist.

4. Beweisen Sie, dass der Ausdruck $(\forall x \exists y\, r(x, y) \to \exists v \forall u\, r(u, v))$ keine Tautologie ist.

5. Gegeben seien folgende prädikatenlogische Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
A_1 &= ((\forall x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x, y)),\\
A_2 &= ((\exists x \forall y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \exists x\, r(x, y)),\\
A_3 &= ((\exists x \exists y\, p(x, g(y, f(x))) \wedge \neg q(x)) \vee \neg \forall x\, r(x, y)).
\end{aligned}$$

Geben Sie zu den obigen Ausdrücken jeweils einen semantisch äquivalenten Ausdruck in pränexer Normalform an.