Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Die Booleschen Junktoren

Die Negation – Wahrheitstafel

P	¬P
TRUE	FALSE
FALSE	TRUE

Das Henkin-Hintikka Spiel

"Checkmate!"

Das Henkin-Hintikka Spiel

Ist ein Satz in einer gegebenen Welt wahr?

- Spieler: Sie und der Computer (Tarski's World)
- Sie behaupten, ein Satz ist wahr (oder falsch), Tarski's world wird das Gegenteil behaupten.
- In jeder Runde wird der Satz reduziert und es entsteht ein einfacherer.
- Wenn ein atomarer Satz erreicht ist, kann sein Wahrheitswert direkt in der gegebenen Welt überprüft werden.

Sie haben eine Gewinnstrategie genau dann, wenn Ihre Behauptung wahr ist.

Die Negation – Spielregeln

Form	Ihre Entscheidung	Spieler am Zug	Ziel
$\neg P$	in beiden Fällen	—	Ersetze $\neg P$ durch P und kehre die Entscheidung um.

Die Konjunktion – Wahrheitstafel

P	Q	$P \wedge Q$
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE

Die Konjunktion – Spielregeln

Form	Ihre Entscheidung	Spieler am Zug	Ziel
$P \wedge Q$	TRUE FALSE	Tarski's World Sie	Wähle eines von P, Q, das falsch ist.

Die Disjunktion – Wahrheitstafel

P	Q	$P \vee Q$
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE

Die Disjunktion – Spielregeln

Form	Ihre Entscheidung	Spieler am Zug	Ziel
$P \vee Q$	TRUE	Sie	Wähle eines von P, Q, das wahr ist.
	FALSE	Tarski's World	

Die Logik der Booleschen Junktoren

Formalisierung

- Der deutsche Ausdruck und legt manchmal eine zeitliche Ordnung nahe, der PL1-Ausdruck $\wedge$ tut dies nie.
- Die deutschen Ausdrücke aber, jedoch, hingegen, dennoch und außerdem sind alle stilistische Varianten von und.
- Die deutsche Wendung sowohl ... als auch wird bisweilen wie Klammern verwendet, um einen andernfalls mehrdeutigen Satz zu klären.
- Das oder in der deutschen Sprache kann das inklusive oder ($\vee$) oder das exklusive oder (entweder ... oder) bedeuten: $A \ xor \ B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Aussagenlogische Formeln

Definition

Gegeben eine Menge $\mathcal{A}$ von atomaren Formeln, definieren wir die Menge der aussagenlogischen Formeln über $\mathcal{A}$ induktiv wie folgt:

1. jede Formel aus $\mathcal{A}$ ist eine aussagenlogische Formel;
2. wenn P eine aussagenlogische Formel ist, dann auch $\neg$P;
3. wenn P und Q aussagenlogische Formeln sind, dann auch (P $\vee$ Q);
4. wenn P und Q aussagenlogische Formeln sind, dann auch (P $\wedge$ Q).

Bemerkungen:

- Die äußersten Klammern können weggelassen werden.
- Zusätzliche Klammern dürfen eingeführt werden.
- Bei mehrfachen Disjunktionen oder Konjunktionen können die Klammern weggelassen werden: $P \wedge Q \wedge R$.

Strukturelle Induktion über Formeln

Prinzip der strukturellen Induktion über aussagenlogische Formeln:

Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der atomaren Formeln und E eine Eigenschaft aussagenlogischer Formeln. Wenn gilt

1. jede Formel aus $\mathcal{A}$ hat die Eigenschaft E;
2. wenn P die Eigenschaft E hat, dann auch $\neg$P;
3. wenn P und Q die Eigenschaft E haben, dann auch (P $\vee$ Q);
4. wenn P und Q die Eigenschaft E haben, dann auch (P $\wedge$ Q);

dann hat jede aussagenlogische Formel (über $\mathcal{A}$) die Eigenschaft E.

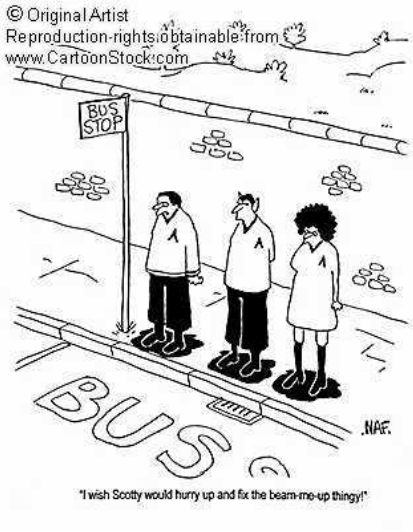
Logische Notwendigkeiten (Wahrheiten)

Ein Satz ist

- logisch notwendig oder eine logische Wahrheit, wenn er unter allen Umständen (in allen Welten) wahr ist,
- logisch möglich oder erfüllbar, wenn es Umstände (oder Situationen, Welten) gibt, in denen die Aussage wahr ist,
- logisch unmöglich, oder unerfüllbar, wenn er unter keinen Umständen (in keiner Welt) wahr ist.

Logisch möglich

Logisch und physikalisch möglich



Logisch unmöglich

$P \wedge \neg P$ $\qquad$ $a \neq a$

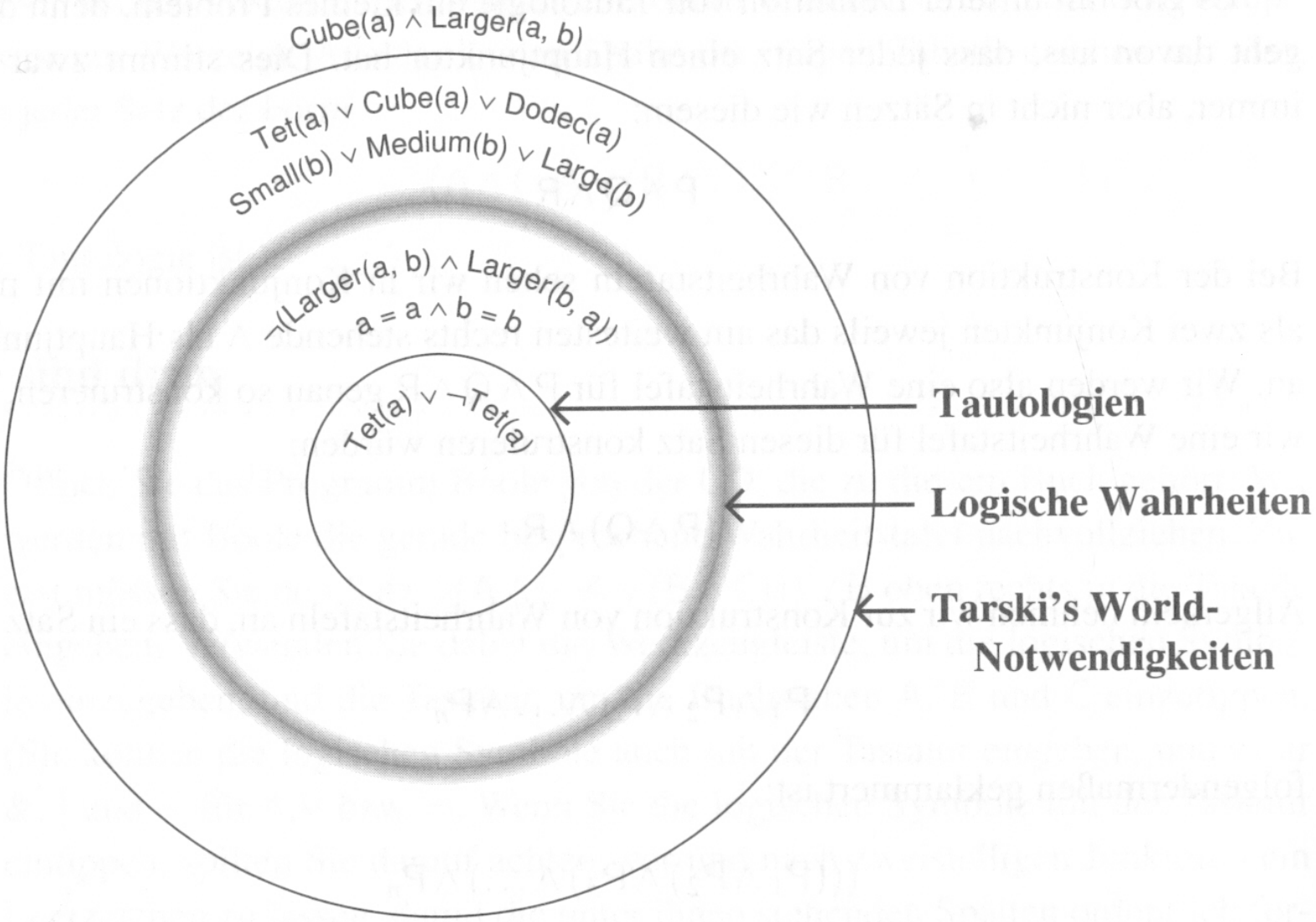
Logisch notwendig

$P \vee \neg P$ $\qquad$ $a = a$

Logik, Boolesche Logik und Tarski's World

Ein Satz ist

- logisch notwendig oder eine logische Wahrheit, wenn er unter allen Umständen (in allen Welten) wahr ist,
- TW-notwendig, wenn er in allen Welten von Tarski's World wahr ist,
- eine Tautologie, wenn er wahr ist für alle Bewertungen der atomaren Sätze mit $\{\mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}$.


Cube(a) ∧ Larger(a, b)
Tet(a) ∨ Cube(a) ∨ Dodec(a)
Small(b) ∨ Medium(b) ∨ Large(b)
¬(Larger(a, b) ∧ Larger(b, a))
a = a ∧ b = b
Tet(a) ∨ ¬Tet(a)
Tautologien
Logische Wahrheiten
Tarski's World-
Notwendigkeiten

Die Wahrheitstafelmethode

- Ein Satz ist genau dann eine Tautologie, wenn in allen Zeilen seiner vollständigen Wahrheitstafel der Wahrheitswert TRUE steht.
- Wahrheitstafeln können mit dem Programm Boole erstellt werden.

Tautologische Äquivalenz und Folgerung

- Zwei Sätze P und Q sind tautologisch äquivalent genau dann, wenn in jeder Zeile der gemeinsamen Wahrheitstafel unter ihren Hauptjunktoren jeweils derselbe Wahrheitswert steht.
- Q ist eine tautologische Folgerung aus $P_1, \ldots, P_n$ genau dann, wenn in jeder Zeile einer gemeinsamen Wahrheitstafel, in der alle $P_1, \ldots, P_n$ den Wert TRUE erhalten, auch Q den Wert TRUE erhält.
- Wenn Q eine tautologische Folgerung aus $P_1, \ldots, P_n$ ist, dann ist Q auch eine logische Folgerung aus $P_1, \ldots, P_n$.
- Es gibt logische Folgerungen, die keine tautologische Folgerungen sind.

de Morgansche Gesetze und die doppelte Negation

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

Substitution von Äquivalentem

Substitution von Äquivalentem: Wenn P und Q logisch äquivalent sind ($P \Leftrightarrow Q$), dann sind die Sätze, die sich ergeben, wenn das eine im Kontext eines größeren Satzes für das andere ersetzt wird, auch logisch äquivalent, also $S(P) \Leftrightarrow S(Q)$.

Wir können also de Morgan und das Gesetz der doppelten Negation auch im Kontext größerer Sätze anwenden.

Negations-Normalform (NNF)

Definition

Ein Satz ist in Negations-Normalform (NNF), falls sich alle Vorkommen von $\neg$ direkt auf atomare Sätze beziehen.

Lemma

Wenn P in NNF ist, dann lässt sich auch $\neg P$ in eine äquivalente Formel in NNF umwandeln.

Beweis.

Strukturelle Induktion über den Aufbau der Formeln; dabei Anwendung der de Morganschen Gesetze und des Gesetzes der doppelten Negation. $\square$

Negations-Normalform (NNF), Teil 2

Theorem

Für jede aussagenlogische Formel gibt es eine äquivalente Formel in NNF.

Beweis.

Strukturelle Induktion über den Aufbau der Formeln, unter Anwendung von obigem Lemma. □