Logik für Informatiker
Logic for computer scientists

Till Mossakowski

Wintersemester 2014/15

Die Logik der Quantoren

Die axiomatische Methode

Die Axiomatische Methode überbrückt die Lücke zwischen der Tarski's-Welt-Folgerung und der PL1-Folgerung, indem man in systematischer Weise Tatsachen über die Prädikate, die in unseren Argumenten vorkommen, zum Ausdruck bringt.

Die Sätze, die diese Tatsachen ausdrücken, werden als Axiome eingeführt. Sie beschränken die mögliche Interpretation der Prädikate.

Axiome können als zusätzliche Prämissen bei Folgerungen/Beweisen genutzt werden.

Die grundlegenden Formaxiome

1. $\neg\exists x\,(Cube(x) \wedge Tet(x))$
2. $\neg\exists x\,(Tet(x) \wedge Dodec(x))$
3. $\neg\exists x\,(Dodec(x) \wedge Cube(x))$
4. $\forall x\,(Tet(x) \vee Dodec(x) \vee Cube(x))$

Einführungs- und Beseitigungsaxiome von SameShape

1. $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$
2. $\forall x \forall y ((Dodec(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$
3. $\forall x \forall y ((Tet(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow SameShape(x, y))$

4. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Cube(x)) \rightarrow Cube(y))$
5. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Dodec(x)) \rightarrow Dodec(y))$
6. $\forall x \forall y ((SameShape(x, y) \wedge Tet(x)) \rightarrow Tet(y))$

Euklids Axiomatisierung der Geometrie

1. Von jedem Punkt nach jedem Punkt kann man eine Strecke ziehen.
2. Man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.
3. Man kann mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Parallelenpostulat: Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Für jede natürliche Zahl ist deren Nachfolger eine natürliche Zahl.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Falls K eine Menge ist, für die
   - 0 in K enthalten ist und
   - für jede natürliche Zahl in K auch deren Nachfolger in K ist,

   dann enthält K alle natürlichen Zahlen.

Formalisierung der Peano-Axiome

1. Es sei 0 eine Konstante.
2. Es sei *suc* ein einstelliges Funktionssymbol
3. $\forall n \neg suc(n) = 0$
4. $\forall m \forall n \, (suc(m) = suc(n) \rightarrow m = n)$
5. $(\Phi(x/0) \wedge \forall n \, (\Phi(x/n) \rightarrow \Phi(x/suc(n)))) \rightarrow \forall n \, \Phi(x/n)$
   falls Φ eine Formel mit der freien Variable x ist, und $\Phi(x/t)$ die Ersetzung von x durch t in Φ bezeichnet

Weitere berühmte Axiomensysteme

- Zermelo-Fraenkel-Axiomatisierung der Mengenlehre
- Axiomatisierungen in der Algebra: Monoid, Gruppe, Ring, Feld, Vektorraum ...
- Hoares Axiomatisierung einer imperativen Sprache mit den Konstrukten while-loop, if-then-else, Zuweisung

Mehrfache Quantifikationen

Mehrfache Quantoren in Aristotelischen Formen

Ein Würfel befindet sich links von einem Tetraeder.

$$\exists x\, \exists y\, [Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge LeftOf(x, y)]$$

$$\exists x\, [Cube(x) \wedge \exists y\, (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))]$$

Jeder Würfel befindet sich links von einem Tetraeder.

$$\forall x\, \forall y\, [(Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow LeftOf(x, y)]$$

$$\forall x\, [Cube(x) \rightarrow \forall y\, (Tet(y) \rightarrow LeftOf(x, y))]$$

Mehrfache Quantoren und konversationale Implikatur

Was besagt der Satz

$$\forall x\, \forall y\, [(Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))] \quad ?$$

Was besagt der Satz

$$\exists x\, \exists y\, (Cube(x) \wedge Cube(y)) \quad ?$$

Gemischte Quantoren

Jeder Würfel befindet sich links von einem Tetraeder.

$$\forall x\,[Cube(x) \rightarrow \exists y\,(Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))]$$

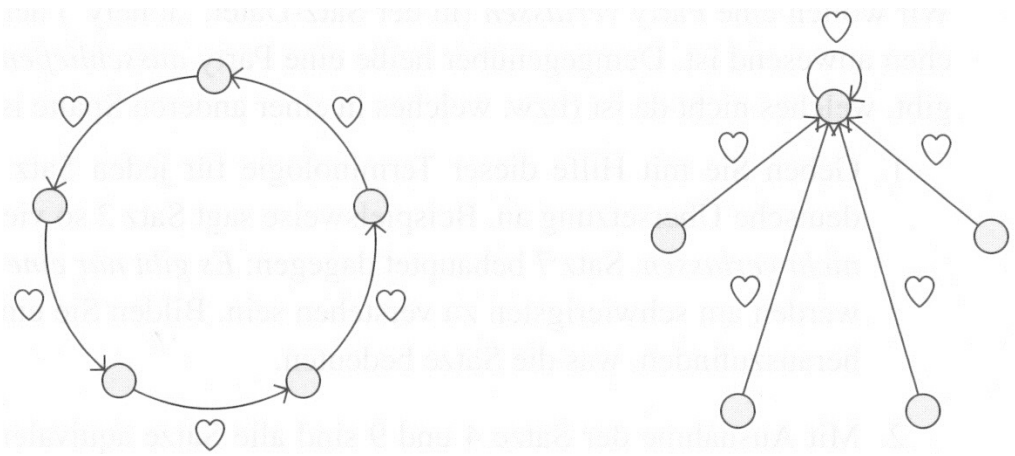
$$\forall x\,\exists y\,[Cube(x) \rightarrow (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))]$$

Die Reihenfolge gemischter Quantoren

$$\forall x\, \exists y\, Mag(x, y)$$

ist nicht logisch äquivalent zu

$$\exists y\, \forall x\, Mag(x, y)$$



Eine Situation, in der $\forall x\, \exists y\, Mag(x, y)$ wahr ist, im Vergleich mit einer Situation, in der $\exists y\, \forall y\, Mag(x, y)$ gilt.

Es gibt genau ein ...

Es gibt genau einen Würfel.

$$\exists x\,(Cube(x) \wedge \forall y\,(Cube(y) \rightarrow y = x))$$

Übersetzen mit der Schritt-für-Schritt-Methode

Jeder Würfel befindet sich links von einem Tetraeder.

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall x\,(Cube(x) \rightarrow x \text{ befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder})$$

$$x \text{ befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder} \rightsquigarrow \exists y\,(Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))$$

$$\forall x\,(Cube(x) \rightarrow x \text{ befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall x\,(Cube(x) \rightarrow \exists y\,(Tet(y) \wedge LeftOf(x,y)))$$

Paraphrasierung ist manchmal notwendig

Jeder Bauer, der einen Esel besitzt, schlägt ihn.

$\forall x\,(Bauer(x) \wedge \exists y\,(Esel(y) \wedge Besitzt(x,y)) \rightarrow Schlägt(x,y))$ falsch!

Paraphrasieren:
Jeder Esel wird von jedem Bauern, der ihn besitzt, geschlagen.

$\forall x\,(Esel(x) \rightarrow \forall y\,((Bauer(y) \wedge Besitzt(y,x)) \rightarrow Schlägt(y,x)))$

Mehrdeutigkeit und Kontextabhängigkeit

Jede Minute wird in New York ein Mann überfallen.
Wir werden ihn heute Abend interviewen.

Schwache Lesart:

$$\forall x\,(Minute(x) \rightarrow \exists y\,(Mann(y) \wedge \ddot{U}berfallenW\ddot{a}hrend(y,x)))$$

Starke Lesart:

$$\exists y\,(Mann(y) \wedge \forall x\,(Minute(x) \rightarrow \ddot{U}berfallenW\ddot{a}hrend(y,x)))$$

Pränexe Form

Jeder Würfel, der sich links yon einem Tetaeder befindet,
ist hinter einem Dodekaeder.

$$\forall x\,[(Cube(x) \wedge \exists y\,(Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))) \rightarrow \exists y\,(Dodec(y) \wedge BackOf(x,y))]$$

Die Überführung in eine pränexe Form verschiebt alle Quantoren an den Satzanfang:

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,[(Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge LeftOf(x,y)) \rightarrow (Dodec(z) \wedge BackOf(x,z))]$$

Pränexe Form: Regeln für Konjunktion und Disjunktion

$$\forall x\, Q \wedge P \rightsquigarrow \forall x\, (Q \wedge P) \qquad \exists x\, Q \wedge P \rightsquigarrow \exists x\, (Q \wedge P)$$

$$P \wedge \forall x\, Q \rightsquigarrow \forall x\, (P \wedge Q) \qquad P \wedge \exists x\, Q \rightsquigarrow \exists x\, (P \wedge Q)$$

$$\forall x\, Q \vee P \rightsquigarrow \forall x\, (Q \vee P) \qquad \exists x\, Q \vee P \rightsquigarrow \exists x\, (Q \vee P)$$

$$P \vee \forall x\, Q \rightsquigarrow \forall x\, (P \vee Q) \qquad P \vee \exists x\, Q \rightsquigarrow \exists x\, (P \vee Q)$$

Man beachte, dass x keine freie Variable in P sein darf.

Falls x eine freie Variable in P ist, können wir die Bedingung erreichen, indem wir folgende Regel anwenden.

$\forall x\, Q \rightsquigarrow \forall y\, Q[y/x]$

Dabei bedeutet $Q[y/x]$, dass in Q alle freien Vorkommen von x durch y ersetzt werden.

Pränexe Form: Regeln für Negation, Implikation, Äquivalenz

$\neg\forall x\, P \rightsquigarrow \exists x\, \neg P$ $\qquad$ $\neg\exists x\, P \rightsquigarrow \forall x\, \neg P$

$\forall x\, Q \to P \rightsquigarrow \exists x\, (Q \to P)$ $\qquad$ $\exists x\, Q \to P \rightsquigarrow \forall x\, (Q \to P)$

$P \to \forall x\, Q \rightsquigarrow \forall x\, (P \to Q)$ $\qquad$ $P \to \exists x\, Q \rightsquigarrow \exists x\, (P \to Q)$

$P \leftrightarrow Q \rightsquigarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Man beachte, dass in der zweiten und dritten Zeile x keine freie Variable in P sein darf.

Pränexe Form: Beispiele

Wie lautet eine Pränexe Form von

$$\exists x\, Cube(x) \rightarrow \forall y\, Small(y)$$

$$\forall x\, [(Cube(x) \wedge \exists y\, (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))) \rightarrow \exists y\, (Dodec(y) \wedge BackOf(x, y))]$$

Beweismethoden für Quantoren

Beweismethoden für Quantoren

Allbeseitigung

Ausgehend von $\forall x\, S(x)$ kann auf $S(c)$ geschlossen werden, sofern c einen Gegenstand des Gegenstandsbereiches bezeichnet.

Existenzeinführung

Ausgehend von $S(c)$ kann man auf $\exists x\, S(x)$ geschlossen werden, sofern c einen Gegenstand des Gegenstandsbereiches bezeichnet.

Beispiel

$$\begin{array}{|l} \forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\ \forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\ \mathrm{Cube}(d) \\ \hline \exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)] \end{array}$$

Existenzielle Instantiierung (Existenzbeseitigung)

Existenzbeseitigung

Ausgehend von $\exists x\, S(x)$ können wir in einem Unterbeweis $S(c)$ annehmen, unter der Bedingung, dass c ein neuer Name ist, der noch nicht verwendet wurde.

Beispiel:

Als Scotland Yard herausfand, dass ein Serienmörder sein Unwesen trieb, nannten sie ihn "Jack the Ripper", und man verwendete diesen Namen, um über ihn Überlegungen anzustellen. Niemand glaubte, dies bedeute, dass Scotland Yard wusste, wer der Mörder war.
Beachten Sie, dass die Verwendung dieses Namens durch Scotland Yard eine schreiende Ungerechtigkeit gewesen wäre, falls der Stadtschneider schon Jack the Ripper genannt worden wäre.

Beispiel

$$\begin{array}{|l}
\forall x\,[\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x)] \\
\forall x\,[\mathrm{Large}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, b)] \\
\exists x\,\mathrm{Cube}(x) \\
\hline
\exists x\,[\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{LeftOf}(x, b)]
\end{array}$$

Universelle Generalisierung (Alleinführung)

Alleinführung

Wenn wir einen neuen Namen c einführen, der vorher noch nicht benutzt wurde und dann den Satz $S(c)$ beweisen, können wir auf $\forall x\, S(x)$ schließen.

Beispiel:

Theorem

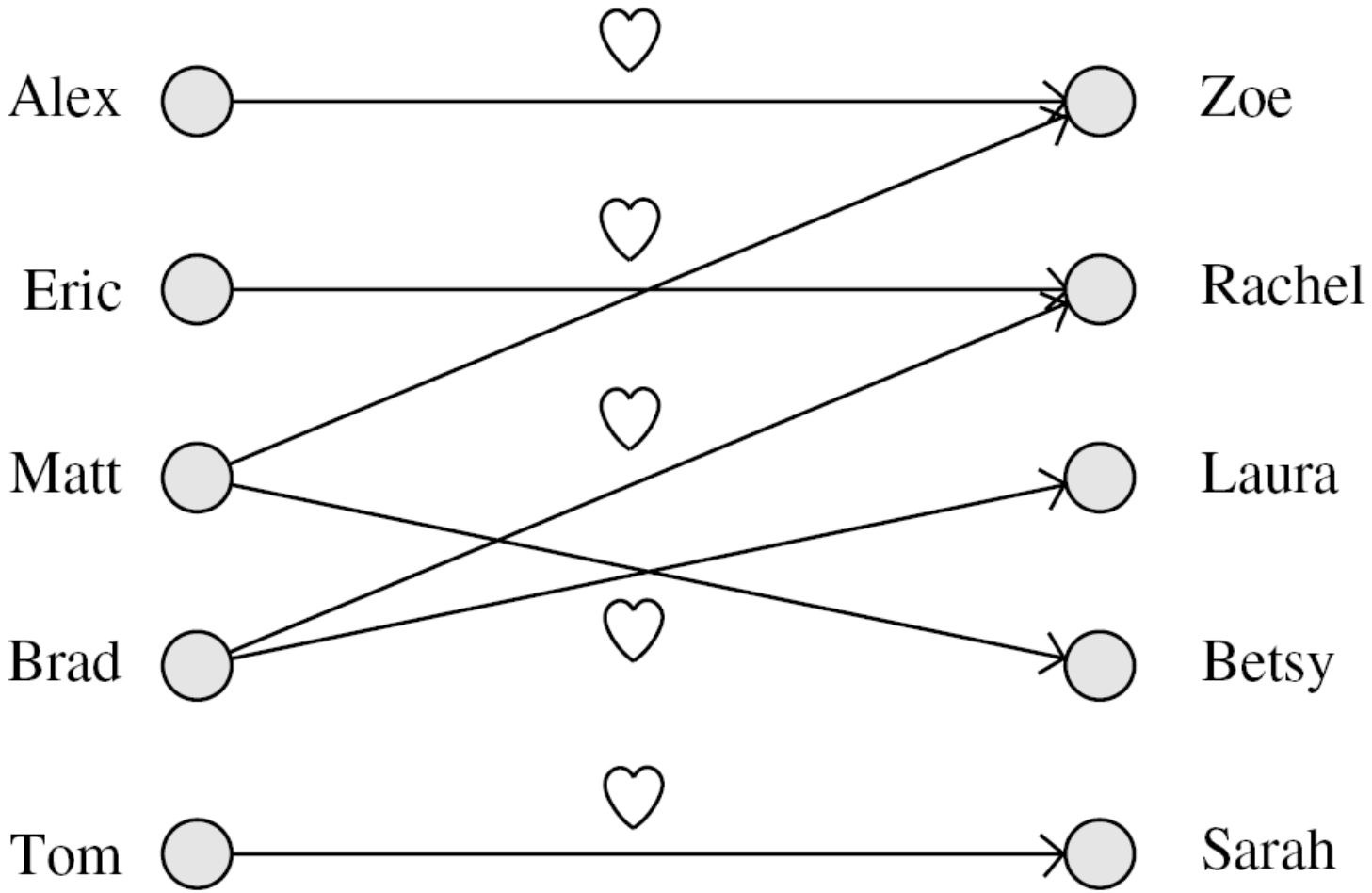
Jede positive gerade Zahl ist die Summe von zwei ungeraden Zahlen.

Beweis

Es sei n eine gerade Zahl mit $n > 0$, d. h. $n = 2m$ mit $m > 0$.
Falls m ungerade ist, dann gilt $n = m + m$, also die Behauptung.
Falls m gerade ist, setzen wir $n = (m - 1) + (m + 1)$.

Beweise mit gemischten Quantoren

$$\begin{array}{|l} \exists y\,[\mathrm{Girl}(y) \wedge \forall x\,(\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \mathrm{Likes}(x,y))] \\ \hline \forall x\,[\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{Girl}(y) \wedge \mathrm{Likes}(x,y))] \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \forall x\,[\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{Girl}(y) \wedge \mathrm{Likes}(x,y))] \\ \hline \exists y\,[\mathrm{Girl}(y) \wedge \forall x\,(\mathrm{Boy}(x) \rightarrow \mathrm{Likes}(x,y))] \end{array}$$

Ein (Gegen-)Beispiel