Grundlagen der Theoretischen Informatik

Till Mossakowski

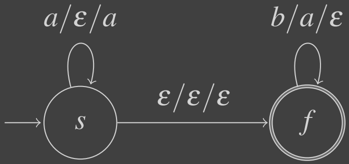
Fakultät für Informatik
Otto-von-Guericke Universität
Magdeburg

Wintersemester 2014/15

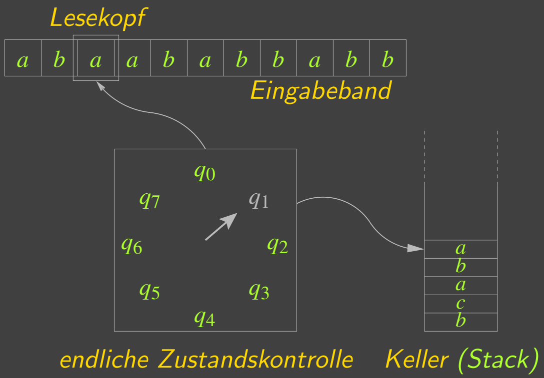
Kellerautomaten

Endliche Automaten haben „zuwenig Speicher“,
um Sprachen wie $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ erkennen zu können.

$a\ a\ \cancel{a}\ \cancel{a}\ \cancel{b}\ \cancel{b}\ b\ b$



Kellerautomaten lesen wie (nichtdeterministische) endliche Automaten die Eingabe Symbol für Symbol von links nach rechts. Kellerautomaten können aber zusätzlich Symbole auf einem Keller (Stack) verwalten und dadurch Information speichern.



Definition:

Ein Kellerautomat *ist ein 6-Tupel* $(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, *wobei gilt:*

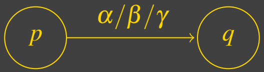
- K *ist eine endliche Menge von* Zuständen,
- Σ *ist ein Alphabet, das* Eingabealphabet,
- Γ *ist ein Alphabet, das* Kelleralphabet,
- $s \in K$ *ist der* Startzustand,
- $\Delta \subseteq (K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$ *ist die* Übergangsrelation,
- Δ *ist endlich und*
- $F \subseteq K$ *ist die Menge der* Endzustände.

Ein Kellerautomat ist also nach Definition nichtdeterministisch.

Graphische Darstellung der Übergangsrelation:

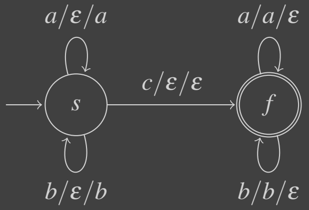
Zustand Startzustand Endzustand

$$((p, \alpha, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$$



Beispiel: $M = (\{s, f\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \Delta, s, \{f\})$

$$\begin{aligned}
\Delta:\ & ((s, a, \varepsilon), (s, a)) \\
& ((s, b, \varepsilon), (s, b)) \\
& ((s, c, \varepsilon), (f, \varepsilon)) \\
& ((f, a, a), (f, \varepsilon)) \\
& ((f, b, b), (f, \varepsilon))
\end{aligned}$$



Zustand	restliches Eingabewort	Kellerinhalt
s	$aabacabaa$	ε
s	$abacabaa$	a
s	$bacabaa$	aa
s	$acabaa$	baa
s	$cabaa$	$abaa$
f	$abaa$	$abaa$
f	baa	baa
f	aa	aa
f	a	a
f	ε	ε

Sei $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ ein Kellerautomat. Ein Element (q, w, α) von $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ heißt *Konfiguration* von M. Dabei ist q der aktuelle Zustand, w der noch nicht gelesene Teil der Eingabe und α der Kellerinhalt (von oben nach unten gelesen).

Wir definieren eine binäre Relation $\vdash_M$ auf $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, den Konfigurationen von M, wie folgt:

$$(p, x, \alpha) \vdash_M (q, y, \zeta)$$

genau dann wenn es einen Übergang $((p, a, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$ gibt und $x = ay$, $\alpha = \beta\eta$ und $\zeta = \gamma\eta$ für ein $\eta \in \Gamma^*$.

Wir sagen, (p, x, α) *geht in einem Schritt* in (q, y, ζ) *über*.

Ein Kellerautomat $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ *akzeptiert* ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann wenn $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ für ein $p \in F$.

Eine Folge von Konfigurationen $C_0, C_1, \ldots, C_n$, $n \geq 0$, mit $C_i \vdash_M C_{i+1}$ für $i = 0, 1 \ldots, n-1$ heißt eine *Berechnung* von M der *Länge* n.

Die von einem Kellerautomaten M *akzeptierte Sprache* ist $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$.

Beispiel: $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, wobei $K = \{s, q, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, B, \mathit{fin}\}$ und $F = \{f\}$ und

$$
\begin{aligned}
\Delta:\ & ((s, \varepsilon, \varepsilon), (q, \mathit{fin})) \\
& ((q, a, \mathit{fin}), (q, A\,\mathit{fin})) \\
& ((q, a, A), (q, AA)) \\
& ((q, a, B), (q, \varepsilon)) \\
& ((q, b, \mathit{fin}), (q, B\,\mathit{fin})) \\
& ((q, b, B), (q, BB)) \\
& ((q, b, A), (q, \varepsilon)) \\
& ((q, \varepsilon, \mathit{fin}), (f, \varepsilon))
\end{aligned}
$$

$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält gleichviele a und $b\}$

Zustand	restliches Eingabewort	Kellerinhalt
s	$ababbaaabb$	ε
q	$ababbaaabb$	fin
q	$babbaaabb$	A fin
q	$abbaaabb$	fin
q	$bbaaabb$	A fin
q	$baaabb$	fin
q	$aaabb$	B fin
q	$aabb$	fin
q	abb	A fin
q	bb	AA fin
q	b	A fin
q	ε	fin
f	ε	ε

Eine kontextfreie Grammatik, die die gleiche Sprache erzeugt:

$\Sigma = \{a,\, b\}$

$$\begin{aligned}
\mathit{fin} &\to aA\,\mathit{fin} \\
A &\to aAA \\
B &\to a \\
\mathit{fin} &\to bB\,\mathit{fin} \\
B &\to bBB \\
A &\to b \\
\mathit{fin} &\to \varepsilon
\end{aligned}$$

$$G = (\{A, B, \mathit{fin}\},\ \Sigma,\ R,\ \mathit{fin})$$

Eingeschränkte Kellerautomaten

Ein Kellerautomat $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ heißt *in eingeschränkter Normalform*, falls gilt:

- Es gibt ein sogenanntes *Kellerendesymbol* in Γ, das wir im Folgenden stets mit $\perp$ bezeichnen.
- $((s, \varepsilon, \varepsilon), (z, \perp)) \in \Delta$ für ein $z \in K$, $z \neq s$. Kein sonstiger Übergang benutzt den Zustand s.
- Es gibt genau einen Endzustand f. Alle Übergänge zu f entfernen $\perp$ vom Keller.
- Für alle Übergänge $((q, \alpha, \beta), (p, \gamma)) \in \Delta$ mit $q \neq s$ gilt $|\beta| = 1$ und $|\gamma| \in \{0, 2\}$.

Zwei Kellerautomaten M und M' heißen *äquivalent*, falls $L(M) = L(M')$.

Satz:

Sei M ein Kellerautomat. Dann gibt es einen zu M äquivalenten Kellerautomaten M' in eingeschränkter Normalform.

Beweisskizze: Wir konstruieren zu $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ einen Kellerautomaten $M' = (K', \Sigma, \Gamma', \Delta', s', \{f'\})$ wie folgt:

$K'' = K \cup \{s', f'\}$ mit $s', f' \notin K$.
O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $\perp \notin \Gamma$. Sei nun $\Gamma'' = \Gamma \cup \{\perp\}$.

Sei $\Delta'' = \Delta \cup \{((s', \varepsilon, \varepsilon), (s, \perp))\} \cup \{((f, \varepsilon, \perp), (f', \varepsilon)) \mid f \in F\}$.

Jeder Übergang $((q,a,\beta),(p,\gamma))$ in Δ'' mit

$$\beta = B_1 B_2 \dots B_n$$

$n > 1$, $B_i \in \Gamma'$, wird ersetzt durch die Übergänge

$$\begin{gathered}((q,\varepsilon,B_1),(q_{B_1},\varepsilon)),\\((q_{B_1},\varepsilon,B_2),(q_{B_1B_2},\varepsilon)),\\\vdots\\((q_{B_1B_2\dots B_{n-2}},\varepsilon,B_{n-1}),(q_{B_1B_2\dots B_{n-1}},\varepsilon)),\\((q_{B_1B_2\dots B_{n-1}},a,B_n),(p,\gamma))\end{gathered}$$

wobei die $q_{B_1B_2\dots B_i}$ neue Zustände sind. Nun entfernt kein Übergang mehr als ein Symbol vom Keller.

Jeder Übergang $((q,a,\beta),(p,\gamma))$ im neuen Δ'' mit

$$\gamma = C_1C_2\dots C_m$$

$m > 1$, $C_i \in \Gamma'$, wird ersetzt durch die Übergänge

$$\begin{array}{l}
((q,a,\beta),(r_1,C_m)),\\
((r_1,\varepsilon,\varepsilon),(r_2,C_{m-1})),\\
\qquad\vdots\\
((r_{m-2},\varepsilon,\varepsilon),(r_{m-1},C_2))\\
((r_{m-1},\varepsilon,\varepsilon),(p,C_1))
\end{array}$$

wobei die r_i neue Zustände sind. Nun legt jeder Übergang höchstens ein Symbol auf dem Keller ab.

Als nächstes kümmern wir uns um Übergänge, die kein Symbol vom Keller entfernen.

Jeden Übergang

$$((q,\alpha,\varepsilon),(p,\gamma))$$

im neuen Δ'' mit $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $\gamma \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ und $q \neq s'$ ersetzen wir durch die Übergänge in

$$\{((q,\alpha,\sigma),(p,\gamma\sigma)) \mid \sigma \in \Gamma''\}$$

Nun entfernt jeder Übergang, der nicht von s' ausgeht, genau ein Symbol vom Keller. Wir müssen nur noch die Übergänge betrachten, die nur genau ein Symbol auf dem Keller ablegen.

Wir brauchen ein weiteres Symbol, das nicht zu Γ gehört. Sei Ⓢ ein solches Symbol und sei $\Gamma' = \Gamma'' \cup \{Ⓢ\}$.

Für jeden Übergang

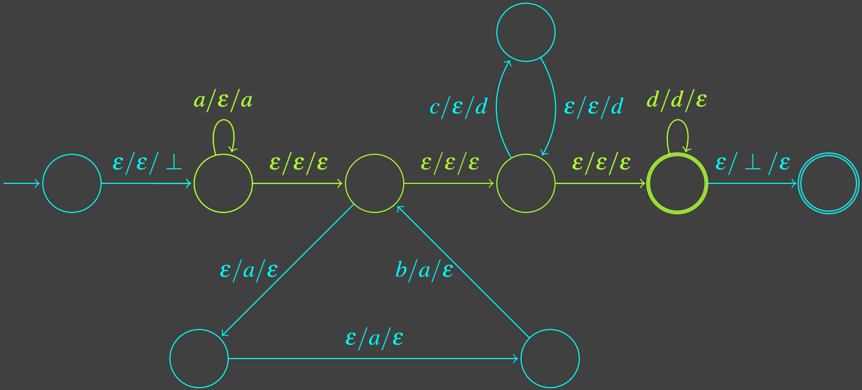
$$((q, \alpha, \beta), (p, \gamma))$$

im neuen Δ'' mit $q \neq s'$ und $|\gamma| = 1$ fügen wir einen neuen Zustand t hinzu und ersetzen den Übergang durch die Übergänge

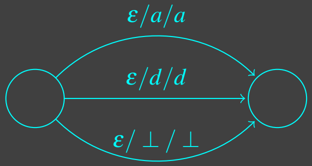
$$((q, \alpha, \beta), (t, Ⓢ\gamma)) \quad \text{und} \quad ((t, \varepsilon, Ⓢ), (p, \varepsilon))$$

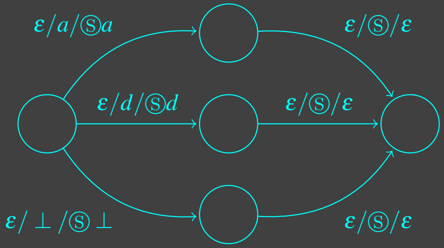
Sei nun Δ' das entsprechend modifizierte Δ'',
und K' die Erweiterung von K'' um die neuen Zustände.
Alle Übergänge in Δ' erfüllen unsere Anforderungen und es gilt $L(M') = L(M)$. ■

Beispiel für die ersten Schritte: $L = \{a^{3j}b^jc^kd^{2k} \mid j,k \geq 0\}$

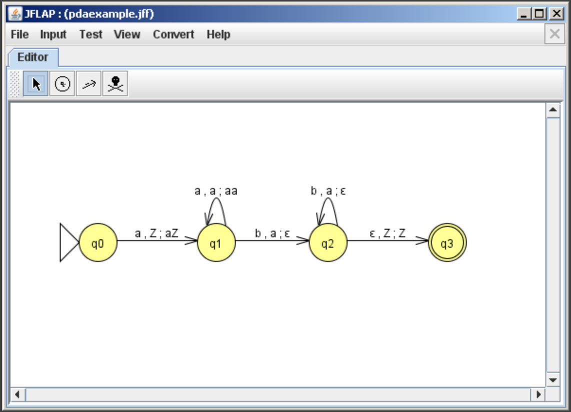


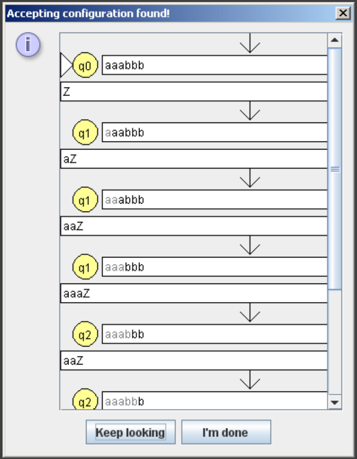

$\varepsilon/\varepsilon/\varepsilon$

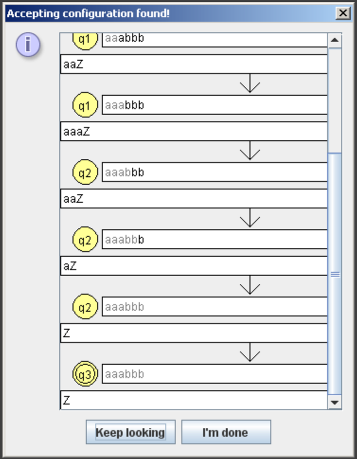

$\varepsilon/a/a$
$\varepsilon/d/d$
$\varepsilon/\perp/\perp$


$\varepsilon/a/\circledS a$
$\varepsilon/\circledS/\varepsilon$
$\varepsilon/d/\circledS d$
$\varepsilon/\circledS/\varepsilon$
$\varepsilon/\perp/\circledS\perp$
$\varepsilon/\circledS/\varepsilon$

Kellerautomaten in JFLAP starten nicht mit einem leeren Keller: Zu Beginn befindet sich auf dem Keller bereits JFLAPs Kellerendesymbol Z.




Accepting configuration found!
q0
aaabbb
Z
q1
aaabbb
aZ
q1
aaabbb
aaZ
q1
aaabbb
aaaZ
q2
aaabbb
aaZ
q2
aaabbb
Keep looking
I'm done


Accepting configuration found!
q1
aaabbb
aaZ
q1
aaabbb
aaaZ
q2
aaabbb
aaZ
q2
aaabbb
aZ
q2
aaabbb
Z
q3
aaabbb
Z
Keep looking
I'm done

Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen

Satz: [Kleene]
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist genau die Klasse der von Kellerautomaten akzeptierten Sprachen.

Wie zeigen zunächst

Satz:
Falls eine Sprache L von einem Kellerautomaten akzeptiert wird, dann ist L eine kontextfreie Sprache.

Beweis: Sei $L = L(M)$ für ein $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass M in eingeschränkter Normalform ist.

Wir definieren nun G mit $L(G) = L = L(M)$.
Sei $V = \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in K,\ A \in \Gamma\}$.

Wir werden G so definieren, dass aus $\langle q, A, p\rangle$ genau die Wörter ableitbar sind, die von M gelesen werden können, während M vom Zustand q mit A oben auf dem Keller in den Zustand p übergeht und dabei A vom Keller ersatzlos entfernt.

Sei $z \in K$ der Zustand, in den M von s aus unter Ablegen von $\perp$ auf dem Keller übergeht und sei $F = \{f\}$. Dann wird gelten

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \langle z, \perp, f\rangle \Rightarrow_G^* w\}$$

Für jeden Übergang $((q_i, \alpha, B), (q_j, \varepsilon)) \in \Delta$ mit $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ fügen wir die Regel

$$\langle q_i, B, q_j \rangle \to \alpha \tag{1}$$

zu R hinzu.

Für jeden Übergang $((q_i, \alpha, B), (q_j, C_1 C_2)) \in \Delta$ mit $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $C_1, C_2 \in \Gamma$ fügen wir für alle q_k und q_l aus K die Regel

$$\langle q_i, B, q_k \rangle \to \alpha \langle q_j, C_1, q_l \rangle \langle q_l, C_2, q_k \rangle \tag{2}$$

zu R hinzu.

Sei nun also $G = (V, \Sigma, R, \langle z, \perp, f\rangle)$, wobei R genau die oben beschriebenen Regeln enthält. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus folgendem

Lemma:
Seien $q, p \in K$, $A \in \Gamma$ und $x \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$\langle q, A, p\rangle \Rightarrow_G^* x \quad \textit{g.d.w.} \quad (q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Wir zeigen zuerst durch Induktion über die Länge n der Ableitung $\langle q, A, p\rangle \Rightarrow_G^* x$, dass $(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

Induktionsverankerung $n = 1$:
Da $x \in \Sigma^*$, muss eine Regel vom Typ (1) angewandt worden sein. Also muss es einen Übergang $((q,x,A),(p,\varepsilon))$ in Δ geben und somit gilt

$$(q,x,A) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

Induktionsschritt:
Im ersten Schritt der Ableitung muss eine Regel vom Typ (2) angewandt worden sein:

$$\langle q,A,p\rangle \to \alpha\langle q_j,C_1,q_l\rangle\langle q_l,C_2,p\rangle$$

Dann ist $((q,\alpha,A),(q_j,C_1C_2)) \in \Delta$. Ferner gibt es $x_1,x_2 \in \Sigma^*$, so dass $x = \alpha x_1 x_2$ und $\langle q_j,C_1,q_l\rangle \Rightarrow_G^* x_1$ und $\langle q_l,C_2,p\rangle \Rightarrow_G^* x_2$.

Nach Induktionsannahme folgt

$$(q_j,x_1,C_1) \vdash_M^* (q_l,\varepsilon,\varepsilon) \text{ und } (q_l,x_2,C_2) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

und somit

$$(q,\alpha x_1 x_2,A) \vdash_M (q_j,x_1x_2,C_1C_2) \vdash_M^* (q_l,x_2,C_2) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

Der Beweis der umgekehrten Richtung erfolgt durch Induktion über die Länge n der Berechnung $(q,x,A) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$ von M.

Induktionsverankerung $n = 1$:
Aus $(q,x,A) \vdash_M (p,\varepsilon,\varepsilon)$ folgt, dass $((q,x,A)),(p,\varepsilon)) \in \Delta$ und somit ist $\langle q,A,p\rangle \to x$ in R und es gilt

$$\langle q,A,p\rangle \Rightarrow_G x$$

Induktionsschritt
Sei $(q,x,A) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$ eine Berechnung in $n \geq 2$ Schritten.
Wir betrachten den ersten Schritt der Berechnung

$$(q,x,A) \vdash_M (q',x',\gamma) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

Der Schritt $(q,x,A) \vdash_M (q',x',\gamma)$ erfolgt unter Anwendung eines Übergangs $((q,\alpha,A),(q',\gamma))$ mit $x = \alpha x'$.

Da M in eingeschränkter Normalform ist, gilt $|\gamma| \in \{0,2\}$. Da die Berechnung $(q',x',\gamma) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$ aus mindestens einem Schritt besteht, muss $\gamma \neq \varepsilon$ gelten.

Also gilt

$$(q,x,A) \vdash_M (q',x',A_1A_2) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

mit $A_1,A_2 \in \Gamma$. Sei p' der Zustand, der erreicht wird, wenn nur noch A_2 auf dem Keller steht:

$$(q,x,A) \vdash_M (q',x',A_1A_2) \vdash_M^* (p',x'',A_2) \vdash_M^* (p,\varepsilon,\varepsilon)$$

Mit $x' = yx''$ gilt

$$(q', y, A_1) \vdash_M^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } (p', x'', A_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Aus der Induktionsannahme folgt

$$\langle q', A_1, p' \rangle \Rightarrow_G^* y \text{ und } \langle p', A_2, p \rangle \Rightarrow_G^* x''$$

Ferner gilt nach Konstruktion von G

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G \alpha \langle q', A_1, p' \rangle \langle p', A_2, p \rangle$$

und somit, wie zu zeigen war

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G \alpha \langle q', A_1, p' \rangle \langle p', A_2, p \rangle \Rightarrow_G^* \alpha y x'' = \alpha x' = x$$

Es gilt $w \in L(G)$ genau dann wenn $\langle z, \perp, f \rangle \Rightarrow_G^* w$ gilt, was nach dem eben bewiesenen Lemma genau dann der Fall ist, wenn $(z, w, \perp) \vdash_{M'}^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$, also genau dann wenn $(s, w, \varepsilon) \vdash_{M'}^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$, da ja M in eingeschränkter Normalform ist, und somit genau dann wenn $w \in L(M)$.

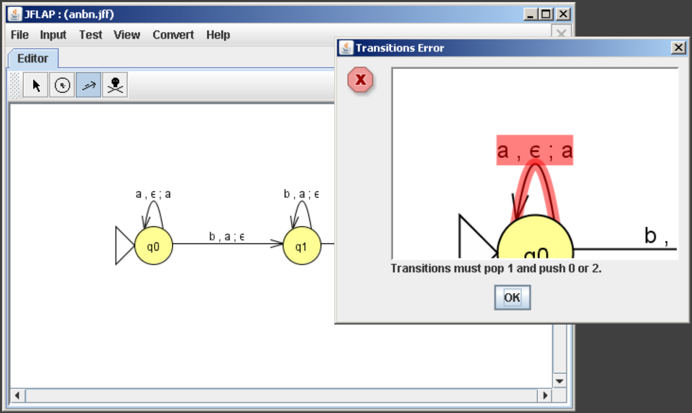
$\blacksquare$

JFLAP kann Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken transformieren. Es sei daran erinnert, dass Kellerautomaten in JLAP automatisch bereits Z als Kellerendesymbol auf dem Keller abgelegt haben, bevor die eigentliche Berechnung des Kellerautomaten beginnt.

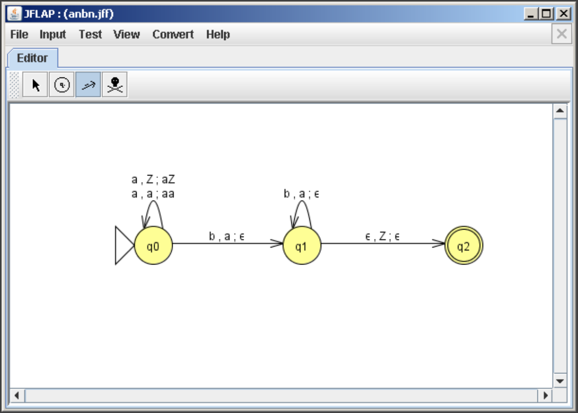
Wir betrachten einen Kellerautomaten, der

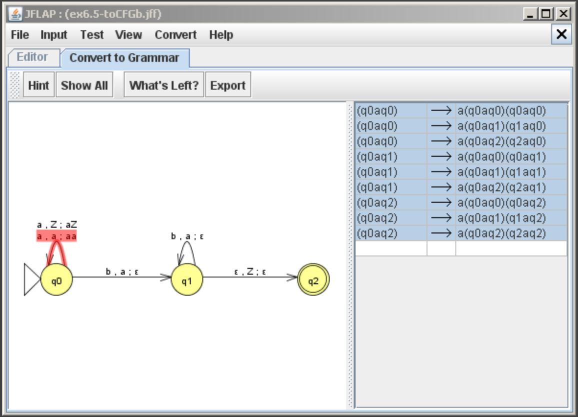
$$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

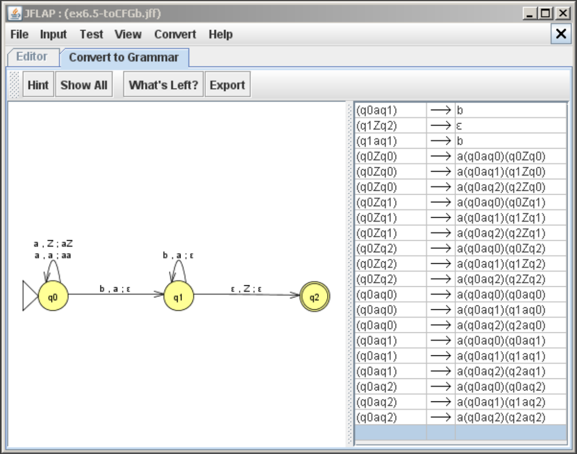
akzeptiert.



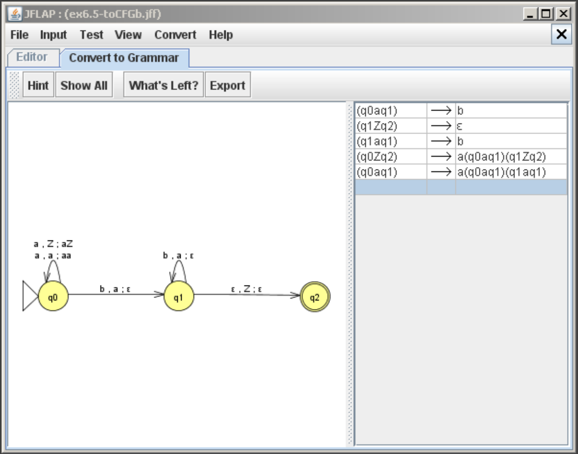
Die Kellerautomaten müssen in eingeschränkter Normalform sein, um in eine kontextfreie Grammatik transformiert werden zu können.


JFLAP : (anbn.jff)
File Input Test View Convert Help
Editor
a , Z ; aZ
a , a ; aa
b , a ; ε
b , a ; ε
ε , Z ; ε
q0
q1
q2


JFLAP : (ex6.5-toCFGb.jff)
File Input Test View Convert Help
Editor
Convert to Grammar
Hint
Show All
What's Left?
Export
a , Z ; aZ
a , a ; aa
b , a ; ε
b , a ; ε
ε , Z ; ε
q0
q1
q2
(q0aq0) ⟶ a(q0aq0)(q0aq0)
(q0aq0) ⟶ a(q0aq1)(q1aq0)
(q0aq0) ⟶ a(q0aq2)(q2aq0)
(q0aq1) ⟶ a(q0aq0)(q0aq1)
(q0aq1) ⟶ a(q0aq1)(q1aq1)
(q0aq1) ⟶ a(q0aq2)(q2aq1)
(q0aq2) ⟶ a(q0aq0)(q0aq2)
(q0aq2) ⟶ a(q0aq1)(q1aq2)
(q0aq2) ⟶ a(q0aq2)(q2aq2)



(q0aq1)	⟶	b
(q1Zq2)	⟶	ε
(q1aq1)	⟶	b
(q0Zq0)	⟶	a(q0aq0)(q0Zq0)
(q0Zq0)	⟶	a(q0aq1)(q1Zq0)
(q0Zq0)	⟶	a(q0aq2)(q2Zq0)
(q0Zq1)	⟶	a(q0aq0)(q0Zq1)
(q0Zq1)	⟶	a(q0aq1)(q1Zq1)
(q0Zq1)	⟶	a(q0aq2)(q2Zq1)
(q0Zq2)	⟶	a(q0aq0)(q0Zq2)
(q0Zq2)	⟶	a(q0aq1)(q1Zq2)
(q0Zq2)	⟶	a(q0aq2)(q2Zq2)
(q0aq0)	⟶	a(q0aq0)(q0aq0)
(q0aq0)	⟶	a(q0aq1)(q1aq0)
(q0aq0)	⟶	a(q0aq2)(q2aq0)
(q0aq1)	⟶	a(q0aq0)(q0aq1)
(q0aq1)	⟶	a(q0aq1)(q1aq1)
(q0aq1)	⟶	a(q0aq2)(q2aq1)
(q0aq2)	⟶	a(q0aq0)(q0aq2)
(q0aq2)	⟶	a(q0aq1)(q1aq2)
(q0aq2)	⟶	a(q0aq2)(q2aq2)


JFLAP : (ex6.5-toCFGb.jff)
File Input Test View Convert Help
Editor
Convert to Grammar
Hint
Show All
What's Left?
Export
(q0aq1) → b
(q1Zq2) → ε
(q1aq1) → b
(q0Zq2) → a(q0aq1)(q1Zq2)
(q0aq1) → a(q0aq1)(q1aq1)
a , Z ; aZ
a , a ; aa
b , a ; ε
b , a ; ε
ε , Z ; ε
q0
q1
q2

Der Satz von Kleene folgt zusammen mit dem eben bewiesenen Satz aus folgendem

Satz:
Für jede kontextfreie Sprache L *gibt es einen Kellerautomaten, der* L *akzeptiert.*

Beweis: Eine Sprache L ist kontextfrei genau dann wenn es eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ gibt mit $L = L(G)$. Wir konstruieren einen Kellerautomaten $M = (\{p, q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \Delta, p, \{q\})$, so dass $L(M) = L(G)$.

Wir benutzen den Keller zum Simulieren einer Ableitung. Der Kellerinhalt ist stets ein Suffix eines Wortes einer Linksableitung.

$$\begin{aligned}\Delta = \quad & \{\ ((p,\varepsilon,\varepsilon),(q,S))\ \} \\ \cup\ & \{\ ((q,\varepsilon,A),(q,x)) \mid A \rightarrow x \text{ in } R\ \} \\ \cup\ & \{\ ((q,a,a),(q,\varepsilon)) \mid a \in \Sigma\ \}\end{aligned}$$

Beispiel: $G = (V, \Sigma, R, S)$ mit $R = \{S \to SS \mid aSb \mid \varepsilon\}$

p	$abaabb$	ε
q	$abaabb$	S
q	$abaabb$	SS
q	$abaabb$	$aSbS$
q	$baabb$	SbS
q	$baabb$	bS
q	$aabb$	S
q	$aabb$	aSb
q	abb	Sb
q	abb	$aSbb$
q	bb	Sbb
q	bb	bb
q	b	b
q	ε	ε

Beispiel: $G = (V, \Sigma, R, S)$ mit $R = \{S \to SS \mid aSb \mid \varepsilon\}$

p	$abaabb$	
q	$abaabb$	S
q	$abaabb$	SS
q	$abaabb$	$aSbS$
q	$abaabb$	$aSbS$
q	$abaabb$	abS
q	$abaabb$	abS
q	$abaabb$	$abaSb$
q	$abaabb$	$abaSb$
q	$abaabb$	$abaaSbb$
q	$abaabb$	$abaaSbb$
q	$abaabb$	$abaabb$
q	$abaabb$	$abaabb$
q	$abaabb$	$abaabb$

Lemma:
Sei $w \in \Sigma^*$ *und sei* $\alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$*. Dann gilt*

$$S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha \quad \textit{genau dann wenn} \quad (q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$$

Wir zeigen zunächst durch Induktion über die Länge n der Linksableitung $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* w\alpha$, dass $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ gilt.

Induktionsverankerung: Ist $n=0$, so ist $w=\varepsilon$ und $\alpha=S$ und es gilt somit $(q,w,S)\vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$.

Induktionsschritt: Sei nun

$$S = u_0 \overset{L}{\Rightarrow} u_1 \overset{L}{\Rightarrow} \cdots \overset{L}{\Rightarrow} u_n \overset{L}{\Rightarrow} u_{n+1} = w\alpha$$

eine Linksableitung und A das am weitesten links stehende Nichtterminal in u_n. Dann gibt es $x \in \Sigma^*$ und $\beta,\gamma \in (V\cup\Sigma)^*$ und eine Produktionsregel $A \to \gamma$, so dass $u_n = xA\beta$ und $u_{n+1} = x\gamma\beta$.

Nach Induktionsannahme gilt

$$(q,x,S) \vdash_M^* (q,\varepsilon,A\beta)$$

und wegen $A \to \gamma$ ferner

$$(q,\varepsilon,A\beta) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\gamma\beta)$$

Wegen $w\alpha = u_{n+1} = x\gamma\beta$ und $\alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$ muss es ein $y \in \Sigma^*$ geben, so dass $w = xy$ und $y\alpha = \gamma\beta$. Somit gilt

$$(q,w,S) \vdash_M^* (q,y,\gamma\beta)$$

Wegen $y\alpha = \gamma\beta$ gilt schließlich

$$(q,w,S) \vdash_M^* (q,y,\gamma\beta) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$$

Die Rückrichtung zeigen wir ebenfalls durch Induktion. Einen Übergang der Art $((q,\varepsilon,A),(q,x))$ für eine Regel $A \to x$ in R nennen wir einen Übergang vom Typ (R). Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl n der Übergänge vom Typ (R) in $(q,w,S) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$.

Induktionsverankerung: Ist $n = 0$, so folgt aus $(q,w,S) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$ unmittelbar $w = \varepsilon$, $\alpha = S$ und wegen der Reflexivität von $\overset{L}{\Rightarrow}^*$ und $S = w\alpha$ trivialerweise $S \overset{L}{\Rightarrow}^* w\alpha$.

Induktionsschritt: Sei $(q,w,S) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$ eine Berechnung mit $n+1$ Übergängen vom Typ (R). Wir betrachten den letzten solchen Übergang: Sei $A \to \gamma$ die zugehörige Regel der Grammatik. Dann gibt es $x,y \in \Sigma^*$ und $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ so dass $w = xy$ und

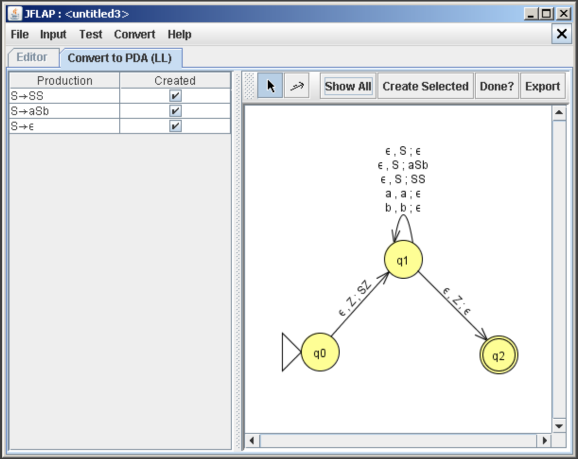
$$(q,w,S) \vdash_M^* (q,y,A\beta) \vdash_M (q,y,\gamma\beta) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$$

Es gilt also $(q,x,S) \vdash_M^* (q,\varepsilon,A\beta)$. Nach Induktionsannahme gilt $S \overset{L}{\Rightarrow}^* xA\beta$ und wegen $A \to \gamma$ somit $S \overset{L}{\Rightarrow}^* x\gamma\beta$.

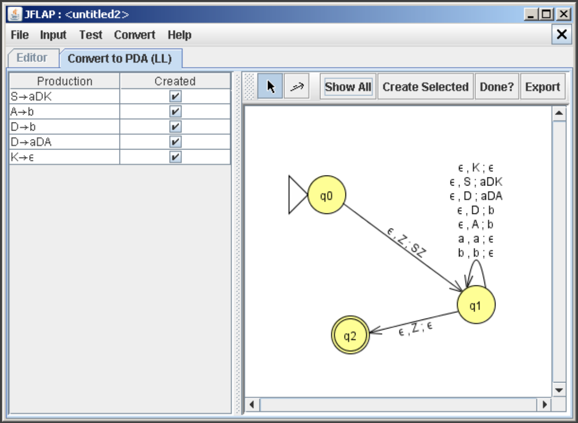
Aus $(q,y,\gamma\beta) \vdash_M^* (q,\varepsilon,\alpha)$ folgt $y\alpha = \gamma\beta$ und somit $S \overset{L}{\Rightarrow}^* xy\alpha = w\alpha$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Der Satz folgt nun unmittelbar aus dem Lemma mit $\alpha = \varepsilon$. ∎

Auch mit JFLAP lassen sich wie eben beschrieben kontextfreie Grammatiken in Kellerautomaten transformieren.



Das geht natürlich auch mit einer Grammatik, die wir aus einem Kellerautomaten erzeugt haben.



Abschlusseigenschaften

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter

(a) Vereinigung,
(b) Konkatenation und
(c) Kleene Star.

Es genügt, die Beweise für kontextfreie Grammatiken zu führen.
Wir skizzieren lediglich die Beweisideen.

(a) Vereinigung

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken und o.B.d.A. gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ferner sei $S \notin V_1 \cup V_2$.

Sei nun $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$ mit

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2\}$$

Dann gilt $$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$$

(b) Konkatenation

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken und o.B.d.A. gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ferner sei $S \notin V_1 \cup V_2$.

Sei nun $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$ mit

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$$

Dann gilt $$L(G) = L(G_1)L(G_2)$$

(c) Kleene Star

Sei $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ eine kontextfreie Grammatik. Ferner sei $S \notin V_1$.

Sei $G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, R, S)$ mit

$$R = R_1 \cup \{S \to \varepsilon,\ S \to SS_1\}$$

Dann gilt $$L(G) = L(G_1)^*$$