

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

Till Mossakowski

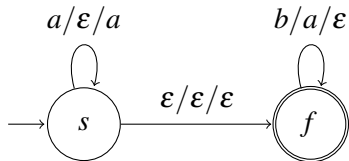
Fakultät für Informatik  
Otto-von-Guericke Universität  
Magdeburg

Wintersemester 2014/15

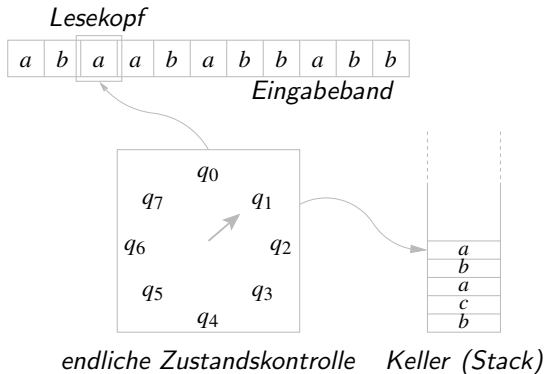
# Kellerautomaten

Endliche Automaten haben „zuwenig Speicher“, um Sprachen wie  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  erkennen zu können.

~~$a a a a b b b b$~~



Kellerautomaten lesen wie (nichtdeterministische) endliche Automaten die Eingabe Symbol für Symbol von links nach rechts. Kellerautomaten können aber zusätzlich Symbole auf einem Keller (Stack) verwalten und dadurch Information speichern.



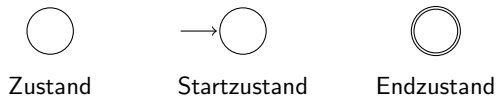
Definition:

Ein Kellerautomat ist ein 6-Tupel  $(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ , wobei gilt:

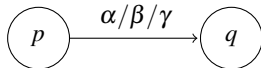
- $K$  ist eine endliche Menge von Zuständen,
- $\Sigma$  ist ein Alphabet, das Eingabealphabet,
- $\Gamma$  ist ein Alphabet, das Kelleralphabet,
- $s \in K$  ist der Startzustand,
- $\Delta \subseteq (K \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$  ist die Übergangsrelation,
- $\Delta$  ist endlich und
- $F \subseteq K$  ist die Menge der Endzustände.

Ein Kellerautomat ist also nach Definition nichtdeterministisch.

Graphische Darstellung der Übergangsrelation:



$$((p, \alpha, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$$



Beispiel:  $M = (\{s, f\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \Delta, s, \{f\})$

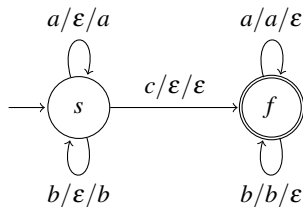
$\Delta: ((s, a, \varepsilon), (s, a))$

$((s, b, \varepsilon), (s, b))$

$((s, c, \varepsilon), (f, \varepsilon))$

$((f, a, a), (f, \varepsilon))$

$((f, b, b), (f, \varepsilon))$



Zustand	restliches Eingabewort	Kellerinhalt
<i>s</i>	<i>aabacabaa</i>	$\epsilon$
<i>s</i>	<i>abacabaa</i>	<i>a</i>
<i>s</i>	<i>bacabaa</i>	<i>aa</i>
<i>s</i>	<i>acabaa</i>	<i>baa</i>
<i>s</i>	<i>cabaa</i>	<i>abaa</i>
<i>f</i>	<i>abaa</i>	<i>abaa</i>
<i>f</i>	<i>baa</i>	<i>baa</i>
<i>f</i>	<i>aa</i>	<i>aa</i>
<i>f</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>f</i>	$\epsilon$	$\epsilon$

Sei  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$  ein Kellerautomat. Ein Element  $(q, w, \alpha)$  von  $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$  heißt *Konfiguration* von  $M$ . Dabei ist  $q$  der aktuelle Zustand,  $w$  der noch nicht gelesene Teil der Eingabe und  $\alpha$  der Kellerinhalt (von oben nach unten gelesen).

Wir definieren eine binäre Relation  $\vdash_M$  auf  $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ , den Konfigurationen von  $M$ , wie folgt:

$$(p, x, \alpha) \vdash_M (q, y, \zeta)$$

genau dann wenn es einen Übergang  $((p, a, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$  gibt und  $x = ay$ ,  $\alpha = \beta\eta$  und  $\zeta = \gamma\eta$  für ein  $\eta \in \Gamma^*$ .

Wir sagen,  $(p, x, \alpha)$  geht in einem Schritt in  $(q, y, \zeta)$  über.



Ein Kellerautomat  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$  akzeptiert ein Wort  $w \in \Sigma^*$  genau dann wenn  $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$  für ein  $p \in F$ .

Eine Folge von Konfigurationen  $C_0, C_1, \dots, C_n$ ,  $n \geq 0$ , mit  $C_i \vdash_M C_{i+1}$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  heißt eine *Berechnung* von  $M$  der *Länge*  $n$ .

Die von einem Kellerautomaten  $M$  akzeptierte Sprache ist  $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$ .

Beispiel:  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ , wobei  $K = \{s, q, f\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{A, B, \textcircled{fin}\}$  und  $F = \{f\}$  und

$$\begin{aligned} \Delta : & ((s, \varepsilon, \varepsilon), (q, \textcircled{fin})) \\ & ((q, a, \textcircled{fin}), (q, A\textcircled{fin})) \\ & ((q, a, A), (q, AA)) \\ & ((q, a, B), (q, \varepsilon)) \\ & ((q, b, \textcircled{fin}), (q, B\textcircled{fin})) \\ & ((q, b, B), (q, BB)) \\ & ((q, b, A), (q, \varepsilon)) \\ & ((q, \varepsilon, \textcircled{fin}), (f, \varepsilon)) \end{aligned}$$

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleichviele } a \text{ und } b\}$$

Zustand	restliches Eingabewort	Kellerinhalt
$s$	$ababbaaabb$	$\varepsilon$
$q$	$ababbaaabb$	$\textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$babbaaabb$	$A \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$abbaaabb$	$\textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$bbaaabb$	$A \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$baaabb$	$\textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$aaabb$	$B \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$aabb$	$\textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$abb$	$A \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$bb$	$AA \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$b$	$A \textcircled{\textit{fin}}$
$q$	$\varepsilon$	$\textcircled{\textit{fin}}$
$f$	$\varepsilon$	$\varepsilon$

Eine kontextfreie Grammatik, die die gleiche Sprache erzeugt:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\textcircled{fin} \rightarrow aA\textcircled{fin}$$

$$A \rightarrow aAA$$

$$B \rightarrow a$$

$$\textcircled{fin} \rightarrow bB\textcircled{fin}$$

$$B \rightarrow bBB$$

$$A \rightarrow b$$

$$\textcircled{fin} \rightarrow \varepsilon$$

$$G = (\{A, B, \textcircled{fin}\}, \Sigma, R, \textcircled{fin})$$

## Eingeschränkte Kellerautomaten

Ein Kellerautomat  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$  heißt *in eingeschränkter Normalform*, falls gilt:

- Es gibt ein sogenanntes *Kellerendesymbol* in  $\Gamma$ , das wir im Folgenden stets mit  $\perp$  bezeichnen.
- $((s, \varepsilon, \varepsilon), (z, \perp)) \in \Delta$  für ein  $z \in K$ ,  $z \neq s$ . Kein sonstiger Übergang benutzt den Zustand  $s$ .
- Es gibt genau einen Endzustand  $f$ . Alle Übergänge zu  $f$  entfernen  $\perp$  vom Keller.
- Für alle Übergänge  $((q, \alpha, \beta), (p, \gamma)) \in \Delta$  mit  $q \neq s$  gilt  $|\beta| = 1$  und  $|\gamma| \in \{0, 2\}$ .

Zwei Kellerautomaten  $M$  und  $M'$  heißen *äquivalent*, falls  $L(M) = L(M')$ .

Satz:

*Sei  $M$  ein Kellerautomat. Dann gibt es einen zu  $M$  äquivalenten Kellerautomaten  $M'$  in eingeschränkter Normalform.*

Beweisskizze: Wir konstruieren zu  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$  einen Kellerautomaten  $M' = (K', \Sigma, \Gamma', \Delta', s', \{f'\})$  wie folgt:

$K'' = K \cup \{s', f'\}$  mit  $s', f' \notin K$ .

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass  $\perp \notin \Gamma$ . Sei nun  $\Gamma'' = \Gamma \cup \{\perp\}$ .

Sei  $\Delta'' = \Delta \cup \{((s', \varepsilon, \varepsilon), (s, \perp))\} \cup \{((f, \varepsilon, \perp), (f', \varepsilon)) \mid f \in F\}$ .

Jeder Übergang  $((q, a, \beta), (p, \gamma))$  in  $\Delta''$  mit

$$\beta = B_1 B_2 \dots B_n$$

$n > 1$ ,  $B_i \in \Gamma'$ , wird ersetzt durch die Übergänge

$$\begin{aligned} &((q, \varepsilon, B_1), (q_{B_1}, \varepsilon)), \\ &((q_{B_1}, \varepsilon, B_2), (q_{B_1 B_2}, \varepsilon)), \\ &\quad \vdots \\ &((q_{B_1 B_2 \dots B_{n-2}}, \varepsilon, B_{n-1}), (q_{B_1 B_2 \dots B_{n-1}}, \varepsilon)), \\ &((q_{B_1 B_2 \dots B_{n-1}}, a, B_n), (p, \gamma)) \end{aligned}$$

wobei die  $q_{B_1 B_2 \dots B_i}$  neue Zustände sind. Nun entfernt kein Übergang mehr als ein Symbol vom Keller.

Jeder Übergang  $((q, a, \beta), (p, \gamma))$  im neuen  $\Delta''$  mit

$$\gamma = C_1 C_2 \dots C_m$$

$m > 1$ ,  $C_i \in \Gamma'$ , wird ersetzt durch die Übergänge

$$\begin{aligned} &((q, a, \beta), (r_1, C_m)), \\ &((r_1, \varepsilon, \varepsilon), (r_2, C_{m-1})), \\ &\quad \vdots \\ &((r_{m-2}, \varepsilon, \varepsilon), (r_{m-1}, C_2)) \\ &((r_{m-1}, \varepsilon, \varepsilon), (p, C_1)) \end{aligned}$$

wobei die  $r_i$  neue Zustände sind. Nun legt jeder Übergang höchstens ein Symbol auf dem Keller ab.



Als nächstes kümmern wir uns um Übergänge, die kein Symbol vom Keller entfernen.

Jeden Übergang

$$((q, \alpha, \varepsilon), (p, \gamma))$$

im neuen  $\Delta''$  mit  $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $\gamma \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$  und  $q \neq s'$  ersetzen wir durch die Übergänge in

$$\{((q, \alpha, \sigma), (p, \gamma\sigma)) \mid \sigma \in \Gamma''\}$$

Nun entfernt jeder Übergang, der nicht von  $s'$  ausgeht, genau ein Symbol vom Keller. Wir müssen nur noch die Übergänge betrachten, die nur genau ein Symbol auf dem Keller ablegen.

Wir brauchen ein weiteres Symbol, das nicht zu  $\Gamma$  gehört. Sei  $\textcircled{S}$  ein solches Symbol und sei  $\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\textcircled{S}\}$ .

Für jeden Übergang

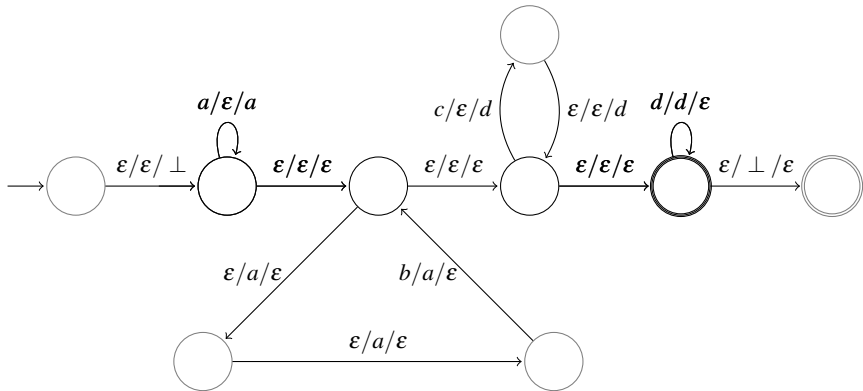
$$((q, \alpha, \beta), (p, \gamma))$$

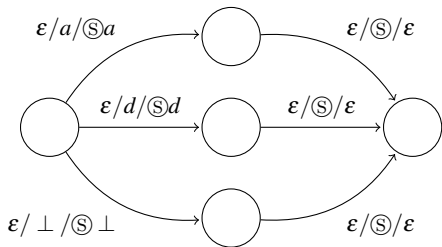
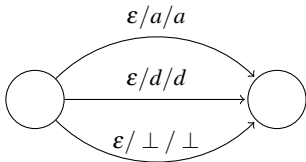
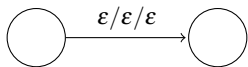
im neuen  $\Delta''$  mit  $q \neq s'$  und  $|\gamma| = 1$  fügen wir einen neuen Zustand  $t$  hinzu und ersetzen den Übergang durch die Übergänge

$$((q, \alpha, \beta), (t, \textcircled{S}\gamma)) \quad \text{und} \quad ((t, \varepsilon, \textcircled{S}), (p, \varepsilon))$$

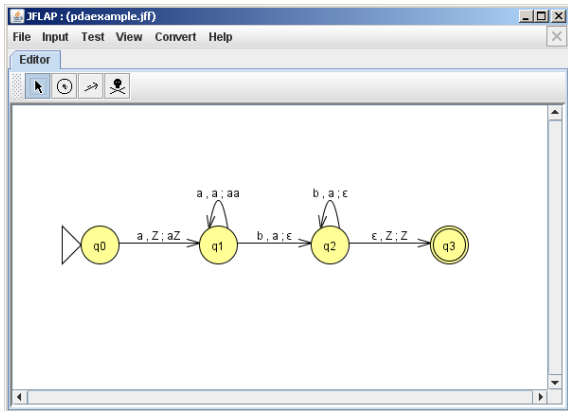
Sei nun  $\Delta'$  das entsprechend modifizierte  $\Delta''$ ,  
 und  $K'$  die Erweiterung von  $K''$  um die neuen Zustände.  
 Alle Übergänge in  $\Delta'$  erfüllen unsere Anforderungen und es gilt  
 $L(M') = L(M)$ . ■

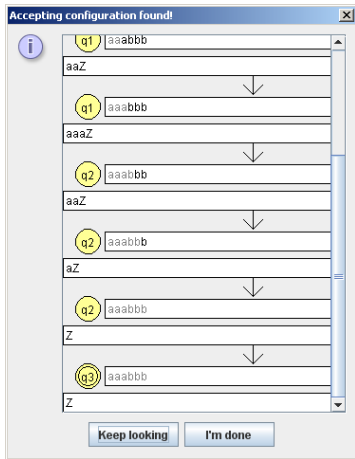
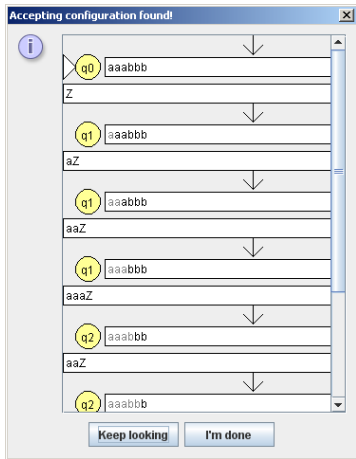
Beispiel für die ersten Schritte:  $L = \{a^{3j}b^j c^k d^{2k} \mid j, k \geq 0\}$





Kellerautomaten in JFLAP starten nicht mit einem leeren Keller:  
Zu Beginn befindet sich auf dem Keller bereits JFLAPs  
Kellerendesymbol Z.





# Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen

Satz: [Kleene]

*Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist genau die Klasse der von Kellerautomaten akzeptierten Sprachen.*

Wie zeigen zunächst

Satz:

*Falls eine Sprache  $L$  von einem Kellerautomaten akzeptiert wird, dann ist  $L$  eine kontextfreie Sprache.*

Beweis: Sei  $L = L(M)$  für ein  $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ .

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass  $M$  in eingeschränkter Normalform ist.

Wir definieren nun  $G$  mit  $L(G) = L = L(M)$ .

Sei  $V = \{\langle q, A, p \rangle \mid q, p \in K, A \in \Gamma\}$ .

Wir werden  $G$  so definieren, dass aus  $\langle q, A, p \rangle$  genau die Wörter ableitbar sind, die von  $M$  gelesen werden können, während  $M$  vom Zustand  $q$  mit  $A$  oben auf dem Keller in den Zustand  $p$  übergeht und dabei  $A$  vom Keller ersatzlos entfernt.

Sei  $z \in K$  der Zustand, in den  $M$  von  $s$  aus unter Ablegen von  $\perp$  auf dem Keller übergeht und sei  $F = \{f\}$ . Dann wird gelten

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \langle z, \perp, f \rangle \Rightarrow_G^* w\}$$



Für jeden Übergang  $((q_i, \alpha, B), (q_j, \varepsilon)) \in \Delta$  mit  $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  fügen wir die Regel

$$\langle q_i, B, q_j \rangle \rightarrow \alpha \quad (1)$$

zu  $R$  hinzu.

Für jeden Übergang  $((q_i, \alpha, B), (q_j, C_1 C_2)) \in \Delta$  mit  $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $C_1, C_2 \in \Gamma$  fügen wir für alle  $q_k$  und  $q_l$  aus  $K$  die Regel

$$\langle q_i, B, q_k \rangle \rightarrow \alpha \langle q_j, C_1, q_l \rangle \langle q_l, C_2, q_k \rangle \quad (2)$$

zu  $R$  hinzu.

Sei nun also  $G = (V, \Sigma, R, \langle z, \perp, f \rangle)$ , wobei  $R$  genau die oben beschriebenen Regeln enthält. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus folgendem

Lemma:

Seien  $q, p \in K$ ,  $A \in \Gamma$  und  $x \in \Sigma^*$ . Dann gilt

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G^* x \quad \text{g.d.w.} \quad (q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Wir zeigen zuerst durch Induktion über die Länge  $n$  der Ableitung  $\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G^* x$ , dass  $(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Induktionsverankerung  $n = 1$ :

Da  $x \in \Sigma^*$ , muss eine Regel vom Typ (1) angewandt worden sein. Also muss es einen Übergang  $((q, x, A), (p, \varepsilon))$  in  $\Delta$  geben und somit gilt

$$(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Induktionsschritt:

Im ersten Schritt der Ableitung muss eine Regel vom Typ (2) angewandt worden sein:

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow \alpha \langle q_j, C_1, q_l \rangle \langle q_l, C_2, p \rangle$$

Dann ist  $((q, \alpha, A), (q_j, C_1 C_2)) \in \Delta$ . Ferner gibt es  $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ , so dass  $x = \alpha x_1 x_2$  und  $\langle q_j, C_1, q_l \rangle \Rightarrow_G^* x_1$  und  $\langle q_l, C_2, p \rangle \Rightarrow_G^* x_2$ .

Nach Induktionsannahme folgt

$$(q_j, x_1, C_1) \vdash_M^* (q_l, \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } (q_l, x_2, C_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

und somit

$$(q, \alpha x_1 x_2, A) \vdash_M (q_j, x_1 x_2, C_1 C_2) \vdash_M^* (q_l, x_2, C_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Der Beweis der umgekehrten Richtung erfolgt durch Induktion über die Länge  $n$  der Berechnung  $(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$  von  $M$ .

Induktionsverankerung  $n = 1$ :

Aus  $(q, x, A) \vdash_M (p, \varepsilon, \varepsilon)$  folgt, dass  $((q, x, A)), (p, \varepsilon) \in \Delta$  und somit ist  $\langle q, A, p \rangle \rightarrow x$  in  $R$  und es gilt

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G x$$

Induktionsschritt

Sei  $(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$  eine Berechnung in  $n \geq 2$  Schritten.

Wir betrachten den ersten Schritt der Berechnung

$$(q, x, A) \vdash_M (q', x', \gamma) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Der Schritt  $(q, x, A) \vdash_M (q', x', \gamma)$  erfolgt unter Anwendung eines Übergangs  $((q, \alpha, A), (q', \gamma))$  mit  $x = \alpha x'$ .

Da  $M$  in eingeschränkter Normalform ist, gilt  $|\gamma| \in \{0, 2\}$ . Da die Berechnung  $(q', x', \gamma) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$  aus mindestens einem Schritt besteht, muss  $\gamma \neq \varepsilon$  gelten.

Also gilt

$$(q, x, A) \vdash_M (q', x', A_1 A_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

mit  $A_1, A_2 \in \Gamma$ . Sei  $p'$  der Zustand, der erreicht wird, wenn nur noch  $A_2$  auf dem Keller steht:

$$(q, x, A) \vdash_M (q', x', A_1 A_2) \vdash_M^* (p', x'', A_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Mit  $x' = yx''$  gilt

$$(q', y, A_1) \vdash_M^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } (p', x'', A_2) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Aus der Induktionsannahme folgt

$$\langle q', A_1, p' \rangle \Rightarrow_G^* y \text{ und } \langle p', A_2, p \rangle \Rightarrow_G^* x''$$

Ferner gilt nach Konstruktion von  $G$

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G \alpha \langle q', A_1, p' \rangle \langle p', A_2, p \rangle$$

und somit, wie zu zeigen war

$$\langle q, A, p \rangle \Rightarrow_G \alpha \langle q', A_1, p' \rangle \langle p', A_2, p \rangle \Rightarrow_G^* \alpha y x'' = \alpha x' = x$$

Es gilt  $w \in L(G)$  genau dann wenn  $\langle z, \perp, f \rangle \Rightarrow_G^* w$  gilt, was nach dem eben bewiesenen Lemma genau dann der Fall ist, wenn  $(z, w, \perp) \vdash_{M'}^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$ , also genau dann wenn  $(s, w, \varepsilon) \vdash_{M'}^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$ , da ja  $M$  in eingeschränkter Normalform ist, und somit genau dann wenn  $w \in L(M)$ .



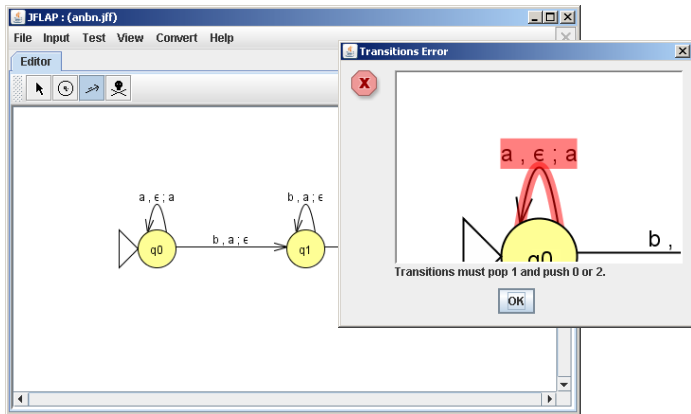


JFLAP kann Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken transformieren. Es sei daran erinnert, dass Kellerautomaten in JFLAP automatisch bereits  $Z$  als Kellerendesymbol auf dem Keller abgelegt haben, bevor die eigentliche Berechnung des Kellerautomaten beginnt.

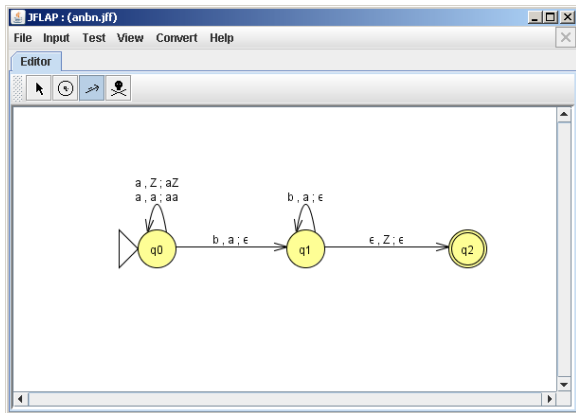
Wir betrachten einen Kellerautomaten, der

$$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

akzeptiert.



Die Kellerautomaten müssen in eingeschränkter Normalform sein, um in eine kontextfreie Grammatik transformiert werden zu können.



JFLAP : (ex6.5-toCFGb.jfl)

File Input Test View Convert Help

Editor Convert to Grammar

Hint Show All What's Left? Export

```

graph LR
    Start(( )) --> q0((q0))
    q0 -- "a, Z : aZ  
a, a : aa" --> q0
    q0 -- "b, a : ε" --> q1((q1))
    q1 -- "b, a : ε" --> q1
    q1 -- "ε, Z : ε" --> q2(((q2)))
  
```

(q0aq0)	→	a(q0aq0)(q0aq0)
(q0aq0)	→	a(q0aq1)(q1aq0)
(q0aq0)	→	a(q0aq2)(q2aq0)
(q0aq1)	→	a(q0aq0)(q0aq1)
(q0aq1)	→	a(q0aq1)(q1aq1)
(q0aq1)	→	a(q0aq2)(q2aq1)
(q0aq2)	→	a(q0aq0)(q0aq2)
(q0aq2)	→	a(q0aq1)(q1aq2)
(q0aq2)	→	a(q0aq2)(q2aq2)

JFLAP : (ex6.5-toCFGb.jff)

File Input Test View Convert Help

Editor Convert to Grammar

Hint Show All What's Left? Export

```

graph LR
    start(( )) --> q0((q0))
    q0 -- "a, Z : aZ  
a, a : aa" --> q0
    q0 -- "b, a : ε" --> q1((q1))
    q1 -- "b, a : ε" --> q1
    q1 -- "ε, Z : ε" --> q2(((q2)))
  
```

(q0aq1)	→	b
(q1Zq2)	→	ε
(q1aq1)	→	b
(q0Zq0)	→	a(q0aq0)(q0Zq0)
(q0Zq0)	→	a(q0aq1)(q1Zq0)
(q0Zq0)	→	a(q0aq2)(q2Zq0)
(q0Zq1)	→	a(q0aq0)(q0Zq1)
(q0Zq1)	→	a(q0aq1)(q1Zq1)
(q0Zq1)	→	a(q0aq2)(q2Zq1)
(q0Zq2)	→	a(q0aq0)(q0Zq2)
(q0Zq2)	→	a(q0aq1)(q1Zq2)
(q0Zq2)	→	a(q0aq2)(q2Zq2)
(q0aq0)	→	a(q0aq0)(q0aq0)
(q0aq0)	→	a(q0aq1)(q1aq0)
(q0aq0)	→	a(q0aq2)(q2aq0)
(q0aq1)	→	a(q0aq0)(q0aq1)
(q0aq1)	→	a(q0aq1)(q1aq1)
(q0aq1)	→	a(q0aq2)(q2aq1)
(q0aq2)	→	a(q0aq0)(q0aq2)
(q0aq2)	→	a(q0aq1)(q1aq2)
(q0aq2)	→	a(q0aq2)(q2aq2)

JFLAP : (ex6.5-toCFGb.jff)

File Input Test View Convert Help

Editor Convert to Grammar

Hint Show All What's Left? Export

```

graph LR
    start(( )) --> q0((q0))
    q0 -- "a, Z; aZ  
a, a; aa" --> q0
    q0 -- "b, a; ε" --> q1((q1))
    q1 -- "b, a; ε" --> q1
    q1 -- "ε, Z; ε" --> q2(((q2)))
  
```

(q0aq1)	→	b
(q1Zq2)	→	ε
(q1aq1)	→	b
(q0Zq2)	→	a(q0aq1)(q1Zq2)
(q0aq1)	→	a(q0aq1)(q1aq1)

Der Satz von Kleene folgt zusammen mit dem eben bewiesenen Satz aus folgendem

Satz:

*Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es einen Kellerautomaten, der  $L$  akzeptiert.*

Beweis: Eine Sprache  $L$  ist kontextfrei genau dann wenn es eine kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, R, S)$  gibt mit  $L = L(G)$ . Wir konstruieren einen Kellerautomaten  $M = (\{p, q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \Delta, p, \{q\})$ , so dass  $L(M) = L(G)$ .

Wir benutzen den Keller zum Simulieren einer Ableitung. Der Kellerinhalt ist stets ein Suffix eines Wortes einer Linksableitung.

$$\begin{aligned} \Delta = & \{ ((p, \varepsilon, \varepsilon), (q, S)) \} \\ & \cup \{ ((q, \varepsilon, A), (q, x)) \mid A \rightarrow x \text{ in } R \} \\ & \cup \{ ((q, a, a), (q, \varepsilon)) \mid a \in \Sigma \} \end{aligned}$$



Beispiel:  $G = (V, \Sigma, R, S)$  mit  $R = \{S \rightarrow SS \mid aSb \mid \varepsilon\}$

$p$	$abaabb$	$\varepsilon$
$q$	$abaabb$	$S$
$q$	$abaabb$	$SS$
$q$	$abaabb$	$aSbS$
$q$	$baabb$	$SbS$
$q$	$baabb$	$bS$
$q$	$aabb$	$S$
$q$	$aabb$	$aSb$
$q$	$abb$	$Sb$
$q$	$abb$	$aSbb$
$q$	$bb$	$Sbb$
$q$	$bb$	$bb$
$q$	$b$	$b$
$q$	$\varepsilon$	$\varepsilon$

Beispiel:  $G = (V, \Sigma, R, S)$  mit  $R = \{S \rightarrow SS \mid aSb \mid \varepsilon\}$

$p$	$abaabb$	
$q$	$abaabb$	$S$
$q$	$abaabb$	$SS$
$q$	$abaabb$	$aSbS$
$q$	$abaabb$	$aSbS$
$q$	$abaabb$	$abS$
$q$	$abaabb$	$abS$
$q$	$abaabb$	$abaSb$
$q$	$abaabb$	$abaSb$
$q$	$abaabb$	$abaaSbb$
$q$	$abaabb$	$abaaSbb$
$q$	$abaabb$	$abaabb$
$q$	$abaabb$	$abaabb$
$q$	$abaabb$	$abaabb$

Lemma:

Sei  $w \in \Sigma^*$  und sei  $\alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$ . Dann gilt

$$S \stackrel{L}{\Rightarrow}^* w\alpha \quad \text{genau dann wenn} \quad (q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$$

Wir zeigen zunächst durch Induktion über die Länge  $n$  der Linksableitung  $S \stackrel{L}{\Rightarrow}^* w\alpha$ , dass  $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$  gilt.

Induktionsverankerung: Ist  $n = 0$ , so ist  $w = \varepsilon$  und  $\alpha = S$  und es gilt somit  $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ .

Induktionsschritt: Sei nun

$$S = u_0 \xRightarrow{L} u_1 \xRightarrow{L} \cdots \xRightarrow{L} u_n \xRightarrow{L} u_{n+1} = w\alpha$$

eine Linksableitung und  $A$  das am weitesten links stehende Nichtterminal in  $u_n$ . Dann gibt es  $x \in \Sigma^*$  und  $\beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$  und eine Produktionsregel  $A \rightarrow \gamma$ , so dass  $u_n = xA\beta$  und  $u_{n+1} = x\gamma\beta$ .

Nach Induktionsannahme gilt

$$(q, x, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, A\beta)$$

und wegen  $A \rightarrow \gamma$  ferner

$$(q, \varepsilon, A\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \gamma\beta)$$

Wegen  $w\alpha = u_{n+1} = x\gamma\beta$  und  $\alpha \in V(V \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$  muss es ein  $y \in \Sigma^*$  geben, so dass  $w = xy$  und  $y\alpha = \gamma\beta$ . Somit gilt

$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, \gamma\beta)$$

Wegen  $y\alpha = \gamma\beta$  gilt schließlich

$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$$

Die Rückrichtung zeigen wir ebenfalls durch Induktion. Einen Übergang der Art  $((q, \varepsilon, A), (q, x))$  für eine Regel  $A \rightarrow x$  in  $R$  nennen wir einen Übergang vom Typ (R). Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Übergänge vom Typ (R) in  $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ .

Induktionsverankerung: Ist  $n = 0$ , so folgt aus  $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$  unmittelbar  $w = \varepsilon$ ,  $\alpha = S$  und wegen der Reflexivität von  $\xrightarrow{L}^*$  und  $S = w\alpha$  trivialerweise  $S \xrightarrow{L}^* w\alpha$ .

Induktionsschritt: Sei  $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$  eine Berechnung mit  $n + 1$  Übergängen vom Typ (R). Wir betrachten den letzten solchen Übergang: Sei  $A \rightarrow \gamma$  die zugehörige Regel der Grammatik. Dann gibt es  $x, y \in \Sigma^*$  und  $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$  so dass  $w = xy$  und

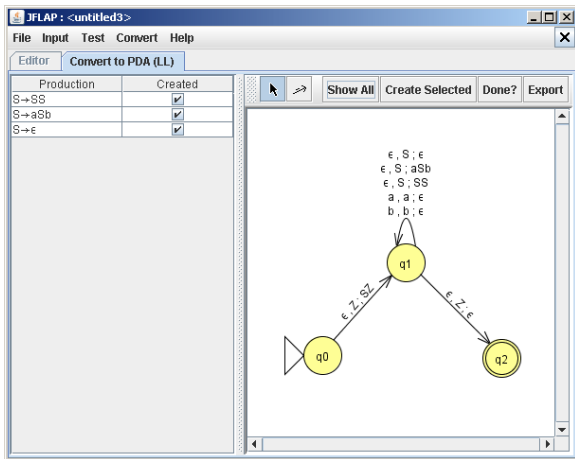
$$(q, w, S) \vdash_M^* (q, y, A\beta) \vdash_M (q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$$

Es gilt also  $(q, x, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, A\beta)$ . Nach Induktionsannahme gilt  $S \xrightarrow{L}^* xA\beta$  und wegen  $A \rightarrow \gamma$  somit  $S \xrightarrow{L}^* x\gamma\beta$ .

Aus  $(q, y, \gamma\beta) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$  folgt  $y\alpha = \gamma\beta$  und somit  $S \xrightarrow{L}^* xy\alpha = w\alpha$ . Damit ist das Lemma bewiesen.

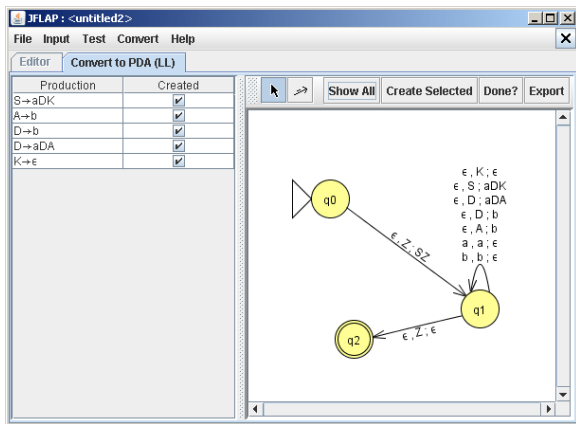
Der Satz folgt nun unmittelbar aus dem Lemma mit  $\alpha = \varepsilon$ . ■

Auch mit JFLAP lassen sich wie eben beschrieben kontextfreie Grammatiken in Kellerautomaten transformieren.





Das geht natürlich auch mit einer Grammatik, die wir aus einem Kellerautomaten erzeugt haben.



# Abschlusseigenschaften

Satz:

*Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter*

- (a) Vereinigung,*
- (b) Konkatenation und*
- (c) Kleene Star.*

Es genügt, die Beweise für kontextfreie Grammatiken zu führen.  
Wir skizzieren lediglich die Beweisideen.

(a) Vereinigung

Seien  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$  kontextfreie Grammatiken und o.B.d.A. gelte  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Ferner sei  $S \notin V_1 \cup V_2$ .

Sei nun  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$  mit

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$$

Dann gilt

$$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$$

(b) Konkatenation

Seien  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$  kontextfreie Grammatiken und o.B.d.A. gelte  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Ferner sei  $S \notin V_1 \cup V_2$ .

Sei nun  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$  mit

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}$$

Dann gilt

$$L(G) = L(G_1)L(G_2)$$

(c) Kleene Star

Sei  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$  eine kontextfreie Grammatik. Ferner sei  $S \notin V_1$ .

Sei  $G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, R, S)$  mit

$$R = R_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS_1\}$$

Dann gilt

$$L(G) = L(G_1)^*$$