# Grundlagen der Theoretischen Informatik

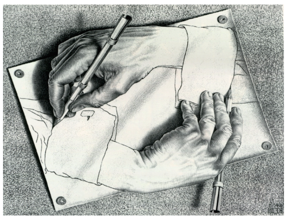
Till Mossakowski

Fakultät für Informatik
Otto-von-Guericke Universität
Magdeburg

Wintersemester 2014/15



## Unentscheidbarkeit



```
#include <stdio.h>
char *s="include <stdio.h>%cchar *s=%c%s%c;%cint main(){printf(s,10,34,s,34,10,10);}%c";
int main(){printf(s,10,34,s,34,10,10);}
```



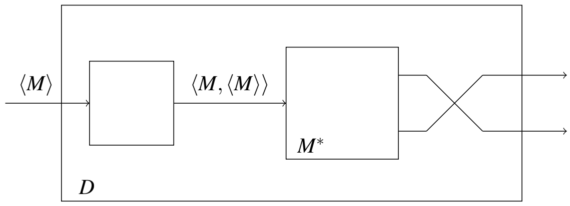
Sei $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine, die $w$ akzeptiert$\}$.

Satz: *Die Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Nehmen wir an, es gäbe eine Turing-Maschine $M^*$, die die Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidet.

Basierend auf $M^*$ könnten wir dann eine Turing-Maschine $D$ konstruieren, die bei Eingabe $\langle M\rangle$ Turing-Maschine $M^*$ für Eingabe $\langle M, \langle M\rangle\ \rangle$ simuliert, aber im verwerfenden Haltezustand hält, falls $M^*$ diese Eingabe akzeptiert und im akzeptierenden Haltezustand sonst.






$D$ verwirft $\langle M\rangle$ genau dann wenn $M$ die Eingabe $\langle M\rangle$ akzeptiert.
Was tut $D$ bei Eingabe $\langle D\rangle$? Die Turing-Maschine $D$ verwirft $\langle D\rangle$ genau dann wenn $D$ die Eingabe $\langle D\rangle$ akzeptiert!

Damit ist die Annahme, dass $M^*$ existiert, ad absurdum geführt. ∎



## Halteproblem

$\mathscr{H} = \{\langle M, w\rangle \mid$ Turingmaschine $M$ hält bei Eingabe $w\}$

Satz: *Die Sprache $\mathscr{H}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Nehmen wir an, es gäbe eine Turing-Maschine $H$, die $\mathscr{H}$ entscheidet. Dann könnten wir uns das zu Nutze machen, um eine Turing-Maschine $M^*$ zu konstruieren, die $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidet:



Bei Eingabe $\langle M, w\rangle$ führt $M^*$ zunächst die Berechnung von $H$ für diese Eingabe aus.

Falls $H$ die Eingabe akzeptiert, so wissen wir, dass $M$ bei Eingabe $w$ hält. $M^*$ simuliert dann die Berechung von $M$ bei Eingabe $w$ und hält im akzeptierenden Haltezustand, falls $M$ Eingabe $w$ akzeptiert, und im verwerfenden Haltezustand sonst.

Falls $H$ die Eingabe verwirft, so wissen wir, dass $M$ bei Eingabe $w$ nicht hält. $M^*$ hält im verwerfenden Haltezustand.

$M^*$ würde die nicht entscheidbare Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheiden.
Also kann $H$ nicht existieren. Also ist das Halteproblem $\mathscr{H}$ unentscheidbar. ∎



## Unentscheidbare Probleme bei Turing-Maschinen

Satz: *Die Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon} = \{\langle M\rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Wäre $\mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon}$ entscheidbar, so wäre auch $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar: Zu gegebenem $M$ und $w$ können wir leicht eine Turingmaschine $M_w$ konstruieren, die, wenn sie mit leerem Band gestartet wird, zunächst $w$ auf das Band schreibt und dann $M$ simuliert.

Dann ist $\langle M, w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ genau dann wenn $\langle M_w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon}$. ∎



Satz: *Die Sprache $\mathscr{E}_{TM} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Wäre $\mathscr{E}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar, so wäre auch $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar: Zu gegebenem $M$ und $w$ können wir leicht eine Turingmaschine $M'_w$ konstruieren, die jede von $w$ verschiedene Eingabe verwirft und bei Eingabe $w$ die Berechnung von $M$ bei Eingabe $w$ simuliert.

Dann ist $\langle M, w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ genau dann wenn $\langle M'_w\rangle \notin \mathscr{E}_{\mathsf{TM}}$. ∎

Satz: *Die Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Wäre $\mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$ entscheidbar, so wäre auch $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar: Zu gegebenem $M$ und $w$ können wir leicht eine Turingmaschine $M''_w$ konstruieren, die zunächst jede Eingabe löscht, dann $w$ aufs Band schreibt und die Berechnung von $M$ bei Eingabe $w$ simuliert.

Dann ist $\langle M,w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ genau dann wenn $\langle M''_w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$. ■



Satz: *Die Sprache $\mathscr{Q}_{TM} = \{\langle M_1,M_2\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Wäre $\mathscr{Q}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar, so wäre auch $\mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$ entscheidbar: Wir können leicht eine Turingmaschine $Y$ konstruieren, die jede Eingabe akzeptiert.

Dann ist $\langle M\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$ genau dann wenn $\langle M,Y\rangle \in \mathscr{Q}_{\mathsf{TM}}$. ■



## Reduzierbarkeit

Wir haben die Unentscheidbarkeit der betrachteten Sprachen bei Turing-Maschinen gezeigt, indem wir sie auf die bereits bekannte Unentscheidbarkeit anderer Sprachen *zurückgeführt* haben, insbesondere auf die Unentscheidbarkeit von $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$.

Um zu zeigen, dass $L$ nicht entscheidbar ist, haben wir gezeigt, dass eine unentscheidbare Sprache $U$ entscheidbar wäre, wenn $L$ entscheidbar wäre.



Definition:
*Eine Sprache $A$ heißt abbildungsreduzierbar auf eine Sprache $B$, falls es eine Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt*

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

*Die Funktion $f$ heißt Reduktion von $A$ auf $B$.*

Wir schreiben $A \preceq B$, falls $A$ auf $B$ abbildungsreduzierbar ist.

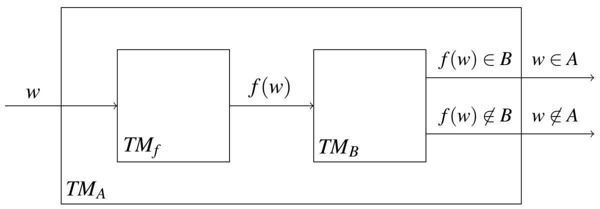
Satz:
*Falls $A \preceq B$ und $A$ ist nicht entscheidbar, dann ist auch $B$ nicht entscheidbar.*



Dies folgt unmittelbar aus folgendem

Satz:
*Falls $A \preceq B$ und $B$ ist entscheidbar, dann ist auch $A$ entscheidbar.*

Beweis:




■



Analog zeigt man

Satz:
*Falls $A \preceq B$ und $B$ ist rekursiv aufzählbar, dann ist auch $A$ rekursiv aufzählbar.*

Ferner gilt

Lemma: *Die Relation $\preceq$ ist transitiv.*



Aus dem Beweis der Unentscheidbarkeit von $\mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon}$ lässt sich

$$\mathscr{A}_{\mathsf{TM}} \preceq \mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon}$$

ableiten: Wir definieren eine Reduktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die $\langle M,w\rangle$ auf $\langle M_w\rangle$ abbildet und Wörter, die nicht von der Form $\langle M,w\rangle$ sind, auf Wörter, die nicht von der Form $\langle M\rangle$ sind.

Diese Reduktionsfunktion $f$ ist Turing-berechenbar und es gilt für alle $x \in \Sigma^*$

$$x \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}} \iff f(x) \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon}$$



Ferner lassen sich aus den Beweisen zur Unentscheidbarkeit von $\mathscr{E}_{\mathsf{TM}}$, $\mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$ und $\mathscr{Q}_{\mathsf{TM}}$ Turing-berechenbare Reduktionsfunktionen ableiten, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{\mathsf{TM}} &\preceq \overline{\mathscr{E}_{\mathsf{TM}}} \\ \mathscr{A}_{\mathsf{TM}} &\preceq \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}} \\ \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}} &\preceq \mathscr{Q}_{\mathsf{TM}} \end{aligned}$$

Halten und Akzeptieren

Wenn eine Turing-Maschine ein Wort $w$ nicht akzeptiert, so kann sie $w$ verwerfen oder nie halten. Sei $M$ eine Turing-Maschine, die $L$ akzeptiert. Wir zeigen nun im Wesentlichen, dass wir annehmen dürfen, dass $M$ genau dann hält, wenn das Eingabewort zu $L$ gehört, denn wenn $M$ diese Eigenschaft nicht besitzt, so lässt sich doch aus $M$ leicht eine Turing-Maschine $M^\star$ mit dieser Eigenschaft ableiten, so dass $L = L(M^\star) = L(M)$.

Wir brauchen also in diesem Sinne nicht zwischen Halten und Akzeptieren zu unterscheiden.



Lemma: $\mathscr{A}_{TM} \preceq \mathscr{H}$.

Beweis:
Wir müssen eine Reduktion $f^\star : \Sigma^* \to \Sigma^*$ angeben, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}} \iff f^\star(x) \in \mathscr{H}$$

Falls $x$ nicht von der Form $\langle M, w\rangle$ ist, so ist $f^\star(x) = \varepsilon \notin \mathscr{H}$. Ansonsten ist $f^\star(\langle M, w\rangle) = \langle M^\star, w\rangle$, wobei $M^\star$ genau dann hält, wenn $M$ das Wort $w$ akzeptiert:

$M^\star$ enthält alle Zustände von $M$ und einen weiteren Zustand $q_{\mathsf{loop}}$. $M^\star$ besitzt die gleichen Übergänge wie $M$, außer dass jeder Übergang, der in $M$ zu $q_{\mathsf{reject}}$ führt, nun zu $q_{\mathsf{loop}}$ führt. Ferner ist $\delta(q_{\mathsf{loop}}, \sigma) = (q_{\mathsf{loop}}, \sigma, S)$ für alle $\sigma$ aus dem Bandalphabet. Nun gilt $L(M) = L(M^\star)$. Schließlich ist $f^\star$ Turing-berechenbar. ■



$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{H}} = \{x \mid\ & x \text{ ist von der Form } \langle M, w\rangle \text{ und die Turing-Maschine } M \\ & \text{hält nicht bei Eingabe } w \text{ oder } x \text{ ist nicht von dieser Form}\}\end{aligned}$$

Lemma: *$\overline{\mathscr{H}}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.*

Beweis:
$\mathscr{H}$ ist rekursiv aufzählbar. Wäre auch $\overline{\mathscr{H}}$ rekursiv aufzählbar, so wäre $\mathscr{H}$ entscheidbar, ist es aber nicht. ■



Lemma: $\overline{\mathscr{H}} \preceq \mathscr{A}_{TM,all}$.

Beweis:
Wir müssen eine Reduktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ angeben, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in \overline{\mathscr{H}} \iff f(x) \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$$

Falls $x$ nicht von der Form $\langle M, w\rangle$ ist, so ist $f(x) = \langle M_{\mathsf{all}}\rangle$, wobei $M_{\mathsf{all}}$ eine Turing-Maschine ist, die bei allen Eingaben hält. Folglich gilt $\langle M_{\mathsf{all}}\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}}$.

Ansonsten ist $f(\langle M, w\rangle) = \langle M_w^\#\rangle$, wobei $M_w^\#$ eine Turing-Maschine ist, die ihre Eingabe $y$ nach folgendem Verfahren bearbeitet:



1 Kopiere Eingabe $y$ auf ein zweites Band
2 Lösche das Eingabeband und schreibe $w$ auf das Band
3 Simuliere $M$ bei Eingabe $w$ für $|y|$ Schritte oder bis $M$ hält
4 Falls $M$ angehalten hat, gehe in eine Endlosschleife über
5 Ansonsten halte akzeptierend an

$M$ hält bei Eingabe $w$ nicht, genau dann wenn $M_w^\#$ alle Eingaben akzeptiert. Ferner ist die Reduktion $f$, die $\langle M, w\rangle$ auf $\langle M_w^\#\rangle$ abbildet, Turing-berechenbar. ■

Lemma: *$\mathscr{A}_{TM,all}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.*



Sei

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\varepsilon &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \varepsilon\} \\ \mathscr{H}_{\mathsf{all}} &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält bei allen Eingaben}\}\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathscr{H} & \preceq & \mathscr{H}_\varepsilon & \mathscr{A}_{\mathsf{TM},\varepsilon} & \preceq & \mathscr{H}_\varepsilon \\ \mathscr{H} & \preceq & \mathscr{H}_{\mathsf{all}} & \mathscr{A}_{\mathsf{TM,all}} & \preceq & \mathscr{H}_{\mathsf{all}} \end{array}$$

und somit

Lemma: *$\mathscr{H}_\varepsilon$ ist nicht entscheidbar.*

Lemma: *$\mathscr{H}_{all}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.*



## Satz von Rice

Satz: [Rice]
*Sei $\mathcal{T}$ eine echte, nicht-leere Teilmenge der Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen. Dann ist*

$$\mathscr{L}_{\mathcal{T}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathcal{T}\}$$

*nicht entscheidbar.*

Beweis:
Wäre $\mathscr{L}_{\mathcal{T}}$ entscheidbar, so wäre auch $\mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar:

O.B.d.A. sei $\emptyset \notin \mathcal{T}$. Sei $L$ eine Sprache in $\mathcal{T}$ und sei $M_L$ eine Turing-Maschine, die $L$ akzeptiert.



Zu gegebenem $M$ und $w$ können wir eine Turingmaschine $A_{M,w}$ konstruieren, die zunächst ihre Eingabe $x$ auf einem zweiten Band sichert, dann die Berechnung von $M$ bei Eingabe $w$ simuliert, und, falls diese Berechnung in einem akzeptierenden Haltezustand endet, anschließend die Berechnung von $M_L$ bei Eingabe $x$ ausführt.

$L(A_{M,w})$ ist entweder leer, also nicht in $\mathcal{T}$, oder $L$, also in $\mathcal{T}$, je nachdem ob $M$ bei Eingabe $w$ akzeptierend hält oder nicht.

Also ist $\langle M, w\rangle \in \mathscr{A}_{\mathsf{TM}}$ genau dann wenn $\langle A_{M,w}\rangle \in \mathscr{L}_{\mathcal{T}}$. ■

Typischerweise ist $\mathcal{T}$ durch eine Eigenschaft definiert. Um den Satz von Rice anwenden zu können, muss nachgewiesen werden, dass mindestens eine, aber nicht alle von Turing-Maschinen akzeptierten Sprachen diese Eigenschaft besitzen.

Beispiel:

Satz: *Die Sprache* $\{\langle M\rangle \mid L(M)$ *ist regulär*$\}$ *ist nicht entscheidbar.*

Beweis:
Die Behauptung folgt aus dem Satz von Rice mit $\mathcal{T} = REG$: Die Sprachklasse $REG$ ist weder leer, denn $\mathcal{L}(a^*)$ liegt in $REG$, noch umfasst $REG$ alle rekursiv aufzählbaren Sprachen, denn die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist rekursiv aufzählbar, liegt aber nicht in $REG$. Also ist der Satz von Rice anwendbar. ■



## Unentscheidbare Probleme bei allgemeinen Grammatiken

Da wir zu einer Turing-Maschine $M$ eine allgemeine Grammatik $G$ konstruieren können, so dass $L(G) = L(M)$, lassen sich die Unentscheidbarkeitsresultate von Turing-Maschinen auf allgemeine Grammatiken übertragen:

$$\mathscr{A}_{\mathsf{TM}} \preceq \{\langle G,w\rangle \mid G \text{ ist eine Grammatik und } w \in L(G)\}$$

Satz:
*Die Sprache* $\mathscr{A}_{\mathsf{UG}} = \{\langle G,w\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $w \in L(G)\}$ *ist nicht entscheidbar.*



Ebenso gilt

Satz: *Die Sprache* $\{\langle G_1,G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind Grammatiken und* $L(G_1) = L(G_2)\}$ *ist nicht entscheidbar.*

Aus dem Satz von Rice folgt ferner beispielsweise

Satz: *Die Sprachen*
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $\varepsilon \in L(G)\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $L(G) = \emptyset\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $L(G)$ *ist endlich*$\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $L(G)$ *ist regulär*$\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $L(G)$ *ist kontextfrei*$\}$ *und*
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine Grammatik und* $L(G)$ *ist entscheidbar*$\}$
*sind jeweils nicht entscheidbar.*



## Postsches Korrespondenzproblem

Definition:
*Sei* $\Sigma$ *ein Alphabet. Eine nicht-leere Folge von geordneten Wortpaaren* $((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n))$ *mit* $x_i,y_i \in \Sigma^+$ *heißt Postsches Korrespondenzsystem.*

*Eine nicht-leere Folge* $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ *von Indizes aus* $\{1,2,\ldots,n\}$ *heißt Lösung des Korrespondenzsystems, falls*

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_k}$$

*Eine Lösung* $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ *des Korrespondenzsystems heißt speziell, falls* $i_1 = 1$.



Beispiele:

Das Korrespondenzsystem $((11,111),\ (100,001),\ (111,11))$ besitzt eine spezielle Lösung, nämlich $(1,2,3)$:

$$\begin{array}{c}11100111\\11100111\end{array}$$

Das Korrespondenzsystem $((00,0),\ (001,11),\ (1000,011))$ besitzt keine Lösung!

Das Korrespondenzsystem $((011,1),\ (0,00),\ (0,11),\ (11,0))$ besitzt eine Lösung, nämlich $(2,1,1,4,3,3,2,2)$, aber keine spezielle.

$$\begin{array}{c}0011011110000\\0011011110000\end{array}$$



Beim *Postschen Korrespondenzproblem* ist zu entscheiden, ob ein gegebenes Postsches Korrespondenzsystem eine Lösung besitzt.

Beim *modifizierten Postschen Korrespondenzproblem* wird für ein gegebenes Postsches Korrespondenzsystem nach der Existenz einer speziellen Lösung gefragt, also nach einer Folge $(1,i_2,\ldots,i_k)$ von Indizes gesucht, so dass $x_1x_{i_2}\ldots x_{i_k} = y_1y_{i_2}\ldots y_{i_k}$.



Im Folgenden sei $\langle P\rangle$ eine Kodierung des Postschen Korrespondenzsystem $P$, z.B. über dem Alphabet $\{0,1\}$.

$$\begin{aligned}\text{PCP} &= \{\langle P\rangle \mid P \text{ besitzt eine Lösung}\}\\ \text{MPCP} &= \{\langle P\rangle \mid P \text{ besitzt eine spezielle Lösung}\}\end{aligned}$$

Satz: MPCP *ist unentscheidbar.*

Beweis:
Wir zeigen $\mathscr{A}_{\mathsf{UG}} = \{\langle G,w\rangle \mid w \in L(G)\} \preceq \text{MPCP}$.

Wir müssen eine geeignete Reduktionsfunktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ angeben. Falls $x \in \Sigma^*$ keine Grammatik kodiert, ist $f(x)$ keine Kodierung eines Postschen Korrespondenzsystem.



Ansonsten sei $G = (V,\Gamma,R,S)$ die in $x$ kodierte Grammatik und $w$ das in $x$ kodierte Wort. Dann ist $f(x)$ die Kodierung des folgenden Postschen Korrespondenzsystem $P$:

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\vdash$ und $\dashv$ nicht in $\Gamma$ enthalten sind. Das erste Wortpaar in $P$ ist

$$(\vdash, \vdash S \Rightarrow)$$

Ferner enthält $P$ das Wortpaar $(a,\ a)$ für alle $a \in \Gamma$, das Wortpaar $(A,\ A)$ für alle $A \in V$, sowie das Wortpaar $(\Rightarrow,\ \Rightarrow)$.

Für alle $u \to_G v$ in $R$ enthält $P$ das Wortpaar

$$(u,\ v)$$

Schließlich enthält $G$ das Wortpaar

$$(\Rightarrow w \dashv,\ \dashv)$$

$P$ besitzt eine spezielle Lösung genau dann wenn $w \in L(G)$. Die Funktion $f$ ist Turing-berechenbar und es gilt für alle $x \in \Sigma^*$

$$x \in \mathscr{A}_{\mathsf{UG}} \iff f(x) \in \textsc{mpcp}$$

Mit einem Algorithmus, der das modifizierte Postsche Korrespondenzproblem löst, könnte man also entscheiden, ob ein Wort $w$ zu der von einer Grammatik $G$ erzeugten Sprache $L(G)$ gehört. ■



Beispiel:

$$G = (\{S,B,C\},\{a,b,c\},R,S)$$

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \varepsilon \\ S & \to & aSBC \\ CB & \to & BC \\ aB & \to & ab \\ bB & \to & bb \\ bC & \to & bc \\ cC & \to & cc \end{array}$$

$$w = aabbcc$$

$(\vdash,\ \vdash S \Rightarrow)$
$(a,\ a)$
$(b,\ b)$
$(c,\ c)$
$(S,\ S)$
$(B,\ B)$
$(C,\ C)$
$(S,\ \varepsilon)$
$(S,\ aSBC)$
$(CB,\ BC)$
$(aB,\ ab)$
$(bB,\ bb)$
$(bC,\ bc)$
$(cC,\ cc)$
$(\Rightarrow,\ \Rightarrow)$
$(\Rightarrow aabbcc \dashv,\ \dashv)$



$\vdash S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow$
$\vdash S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow$

$aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcC \Rightarrow aabbcc \dashv$
$aabbCC \Rightarrow aabbcC \Rightarrow aabbcc \dashv$



Lemma: $\textsc{mpcp} \preceq \textsc{pcp}$.

Beweis:
O.B.d.A. nehmen wir an, dass # und $ nicht in den Wortpaaren des Postschen Korrepondenzsystems $P$ vorkommen.

Zu $P = ((u_1,v_1),\ldots,(u_n,v_n))$ konstruieren wir ein Postsches Korrepondenzsystems $P'$, so dass $P$ genau dann eine spezielle Lösung besitzt, wenn $P'$ eine Lösung besitzt.

Für $w = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \in \Gamma^+$ mit $\sigma_i \in \Gamma$ für $i = 1,\ldots,m$ sei

$$g_L^\#(w) = \#\sigma_1\#\sigma_2\ldots\#\sigma_m$$

und

$$g_R^\#(w) = \sigma_1\#\sigma_2\#\ldots\sigma_m\#$$



$P' = ((\#g_R^\#(u_1),\ g_L^\#(v_1)),\ (g_R^\#(u_1),\ g_L^\#(v_1)),\ (g_R^\#(u_2),\ g_L^\#(v_2)),\ldots$
$\ldots,\ (g_R^\#(u_n),\ g_L^\#(v_n)),\ (\$,\#\$))$.

Falls $(1,i_2,\ldots,i_k)$ eine spezielle Lösung für $P$ ist, so ist $(1,i_2+1,\ldots,i_k+1,n+2)$ eine Lösung für $P'$.

Falls $(j_1,j_2,\ldots,j_k)$ eine Lösung für $P'$ ist, so muss $j_1 = 1$ und $j_k = n+2$ gelten. Dann ist $(1,j_2-1,\ldots,j_{k-1}-1)$ eine spezielle Lösung für $P$.

Die Reduktionsfunktion $f$ bildet $\langle P\rangle$ auf $\langle P'\rangle$ ab. ■



Beispiel:

$P =$
$((1,101),(10,00),(011,11))$.

$P' =$
$((\#1\#,\#1\#0\#1),(1\#,\#1\#0\#1),(1\#0\#,\#0\#0),(0\#1\#1\#,\#1\#1),(\$,\#\$))$.

$$\#1\#0\#1\#1\#1\#0\#0\#1\#1\#\$$$
$$\#1\#0\#1\#1\#1\#0\#0\#1\#1\#\$$$



Aus dem Gezeigten ergibt sich

Satz: $\textsc{pcp}$ *ist nicht entscheidbar.*

Ferner gilt

Satz: $\textsc{pcp}$ *ist rekursiv aufzählbar.*



## Unentscheidbare Probleme bei kontextfreien Grammatiken

Satz:
*Die Sprache* $\{\langle G_1,G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind kontextfreie Grammatiken und* $L(G_1)\cap L(G_2) = \emptyset\}$ *ist nicht entscheidbar.*

Beweis:

Wir zeigen

$$\textsc{pcp} \preceq \{\langle G_1,G_2\rangle \mid L(G_1)\cap L(G_2) \neq \emptyset\}$$

Sei $P = ((x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n))$ ein Postsches Korrespondenzproblem über dem Alphabet $\Sigma$.

Zu $P$ konstruieren wir Grammatiken

$$G_1 = (\{S_1,A,B\},\Sigma\cup\{a_1,\dots,a_n,\$\},R_1,S_1)$$

und

$$G_2 = (\{S_2,T\},\Sigma\cup\{a_1,\dots,a_n,\$\},R_2,S_2)$$



$R_1$ umfasst die Regeln

$$\begin{aligned} S_1 &\to A\$B \\ A &\to a_1Ax_1 \mid \cdots \mid a_nAx_n \mid a_1x_1 \mid \cdots \mid a_nx_n \\ B &\to y_1^RBa_1 \mid \cdots \mid y_n^RBa_n \mid y_1^Ra_1 \mid \cdots \mid y_n^Ra_n \end{aligned}$$

$R_2$ umfasst die Regeln

$$\begin{aligned} S_2 &\to a_1S_2a_1 \mid \cdots \mid a_nS_2a_n \mid T \\ T &\to \sigma T\sigma \text{ für alle } \sigma\in\Sigma \\ T &\to \$ \end{aligned}$$



$$L(G_1) = \{a_{i_k}\dots a_{i_1}x_{i_1}\dots x_{i_k}\$y_{j_m}^R\dots y_{j_1}^Ra_{j_1}\dots a_{j_m} \mid k,m\geq 1, i_\mu,j_\nu\in\{1,\dots,n\}\ \}$$

$$L(G_2) = \{uv\$v^Ru^R \mid u\in\{a_1,\dots,a_n\}^*,\ v\in\Sigma^*\}$$

$P$ besitzt die Lösung $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ genau dann wenn $L(G_1)\cap L(G_2)$ das Wort $a_{i_k}\dots a_{i_1}x_{i_1}\dots x_{i_k}\$y_{i_k}^R\dots y_{i_1}^Ra_{i_1}\dots a_{i_k}$ enthält.



Da alle Wörter in $L(G_1)\cap L(G_2)$ von obiger Form sind, ist $L(G_1)\cap L(G_2)\neq\emptyset$ genau dann wenn $P$ eine Lösung besitzt.

Die zu dieser Transformation gehörige Reduktionsfunktion ist Turing-berechenbar. Also ist $\{\langle G_1,G_2\rangle \mid L(G_1)\cap L(G_2)\neq\emptyset\}$ nicht entscheidbar, also ist auch $\{\langle G_1,G_2\rangle \mid L(G_1)\cap L(G_2)=\emptyset\}$ nicht entscheidbar. ■



Satz:
*Die Sprache $\mathscr{A}_{\mathsf{CFG,all}} = \{\langle G\rangle \mid G$ ist eine kontextfreie Grammatik über dem Alphabet $\Sigma$ mit $L(G)=\Sigma^*\}$ ist nicht entscheidbar.*

Beweisskizze:

Wir zeigen, dass $\mathscr{E}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid L(M)=\emptyset\}$ entscheidbar wäre, wenn $\mathscr{A}_{\mathsf{CFG,all}}$ entscheidbar wäre.

Ein Wort $w$ wird von einer Turingmaschine $M$ akzeptiert, genau dann wenn es eine akzeptierende Berechnung für $w$ gibt, also eine Folge $C_0,C_1,\dots,C_n$ von Konfigurationen mit

$$C_0\vdash_M C_1\vdash_M C_2\vdash_M\cdots\vdash_M C_n$$

so dass $C_0$ die Startkonfiguration für $w$ und $C_n$ eine akzeptierende Haltekonfiguration ist.



Wir kodieren die Konfigurationen von $M$ in naheliegender Weise als Kodierung des relevanten Bandinhalts, in den der aktuelle Zustand als Markierung der Position des Schreib-Lesekopfs integriert ist. $\langle C\rangle$ bezeichne die Kodierung der Konfiguration $C$.

Eine Berechnung $C_0\vdash_M C_1\vdash_M\cdots\vdash_M C_n$ gerader Länge kodieren wir als Wort

$$\langle C_0\rangle\#\langle C_1\rangle^R\#\langle C_2\rangle\#\langle C_3\rangle^R\#\langle C_4\rangle\#\cdots\#\langle C_n\rangle$$

und eine Berechnung $C_0\vdash_M C_1\vdash_M\cdots\vdash_M C_n$ ungerader Länge als

$$\langle C_0\rangle\#\langle C_1\rangle^R\#\langle C_2\rangle\#\langle C_3\rangle^R\#\langle C_4\rangle\#\cdots\#\langle C_n\rangle^R$$



Die Sprache $L_{\overline{M}}$, die alle Wörter über dem Kodierungsalphabet umfasst, die keiner gültigen Berechnung von $M$ entsprechen, ist kontextfrei, denn es gibt einen Kellerautomaten, der genau diese Wörter akzeptiert.

Ein Wort $w$ gehört zu $L_{\overline{M}}$, falls

- $w$ nicht von der gesuchten Form ist, oder
- $C_0$ keine Startkonfiguration ist, oder
- $C_n$ keine akzeptierende Haltekonfiguration ist, oder
- es ein $i\in[0..n-1]$ gibt, so dass $C_i\vdash_M C_{i+1}$ nicht gilt.

Jede dieser Bedingungen lässt sich mit einem Kellerautomaten überprüfen.



Also gibt es einen Kellerautomaten, der $L_{\overline{M}}$ akzeptiert.
Zu diesem Kellerautomaten können wir eine kontextfreie Grammatik $G$ mit $L(G)=L_{\overline{M}}$ konstruieren.

$L_{\overline{M}}$ enthält alle Wörter über dem Kodierungsalphabet genau dann wenn $L(M)=\emptyset$. Zu gegebenem $\langle M\rangle$ können wir wie beschrieben eine kontextfreie Grammatik $G$ konstruieren, so dass

$$\langle G\rangle\in\mathscr{A}_{\mathsf{CFG,all}} \quad\text{g.d.w.}\quad \langle M\rangle\in\mathscr{E}_{\mathsf{TM}}$$

Wäre $\mathscr{A}_{\mathsf{CFG,all}}$ entscheidbar, so wäre also auch $\mathscr{E}_{\mathsf{TM}}$ entscheidbar. ■

Ferner kann man zeigen:

Satz: *Die Sprachen*
$\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind kontextfreie Grammatiken und* $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty\}$,
$\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind kontextfreie Grammatiken und* $L(G_1) \cap L(G_2)$ *ist kontextfrei*$\}$,
$\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind kontextfreie Grammatiken und* $L(G_1) \subseteq L(G_2)\}$,
$\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1$ *und* $G_2$ *sind kontextfreie Grammatiken und* $L(G_1) = L(G_2)\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine kontextfreie Grammatik und* $G$ *ist mehrdeutig*$\}$,
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine kontextfreie Grammatik und* $L(G)$ *ist regulär*$\}$ *und*
$\{\langle G\rangle \mid G$ *ist eine kontextfreie Grammatik und* $\overline{L(G)}$ *ist kontextfrei*$\}$
*sind jeweils nicht entscheidbar.*