Theoretische Informatik

Übungsblatt 11
(für die 4. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. Till Mossakowski
im Wintersemester 2014/2015

Magdeburg, 14. Januar 2015

1. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.
   a) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und M akzeptiert w genau dann, wenn sie w^R akzeptiert$\}$
   b) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $L(M)$ ist überabzählbar unendlich$\}$

2. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.
   a) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $L(M)$ enthält genau 42 Wörter$\}$
   b) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine mit genau 42 Zuständen$\}$

3. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.
   a) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $L(M) \subseteq \mathcal{L}(1^*)\}$
   b) $\{\langle M \rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und alle Wörter in $L(M)$ enthalten geradzahlig viele Vorkommen von jedem Buchstaben des Alphabets$\}$

4. Erläutern Sie die Definitionen der Klassen $\mathbb{P}$, $\mathbb{NP}$, und $\mathbb{NPC}$ (Menge der $\mathbb{NP}$-vollständigen Sprachen) anhand der folgenden Fragen.

   Erläutern Sie die Vorgehensweise bei a, b und c mit geeigneten Sprachen aus der Vorlesung. Gehen Sie jeweils darauf ein, welche Behauptungen im Falle Ihres Beispiels zu beweisen wären, die entsprechenden Beweise dieser Behauptungen müssen Sie dabei nicht führen.
   a) Wie beweist man, dass eine Sprache in $\mathbb{P}$ liegt?
   b) Wie beweist man, dass eine Sprache in $\mathbb{NP}$ liegt?
   c) Wie beweist man, dass eine Sprache in $\mathbb{NPC}$ (Menge der $\mathbb{NP}$-vollständigen Sprachen) liegt?
   d) Was bedeutet es, wenn man eine Sprache finden würde, die sowohl in $\mathbb{P}$ als auch in $\mathbb{NPC}$ liegt?

5. Beweisen Sie $\textsc{independent-set} \preceq_{\mathrm{P}} \textsc{clique}$. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass die Reduktionsfunktion in polynomieller Zeit berechenbar ist.

   Wir erinnern:

   In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ *vollständig* oder *Clique*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten aus V' eine Kante existiert.

   In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ *unabhängig*, wenn keine Kante zwischen zwei Knoten aus V' existiert.

   Die Mengen $\textsc{clique}$ und $\textsc{independent-set}$ sind dann definiert durch

$$\begin{aligned}\textsc{clique} &:= \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer}\\ &\qquad \text{Clique mit } k \text{ Knoten}, k \in \mathbb{N}\},\\ \textsc{independent-set} &:= \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer}\\ &\qquad \text{unabhängigen Knotenmenge mit } k \text{ Knoten}, k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

6. Finden Sie für folgende Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems über dem Alphabet $\{a, b\}$ Lösungen oder zeigen Sie, dass es keine Lösung gibt.
   a) $\{(ab, bb), (aa, ba), (ab, b)(b, aab)\}$,
   b) $\{(aa, aab), (bb, ba), (abb, b)\}$.