Funktionale Programmierung - fortgeschrittene Konzepte und Anwendungen

Vorlesung 3 vom 30.10.2018: Datentypen

Till Mossakowski

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Wintersemester 2019/20

Organisatorisches

- Übungsbetrieb diese Woche
  - Findet noch einmal Donnerstag statt
  - Terminsuche am Ende dieser Vorlesung

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Warum Datentypen?

- Immer nur `Int` ist auch langweilig . . .
- **Abstraktion:**
  - *Bool* statt `Int`, Namen statt RGB-Codes, . . .

Warum Datentypen?

- Immer nur `Int` ist auch langweilig . . .
- **Abstraktion:**
  - *Bool* statt `Int`, Namen statt RGB-Codes, . . .
- **Bessere** Programme (verständlicher und wartbarer)

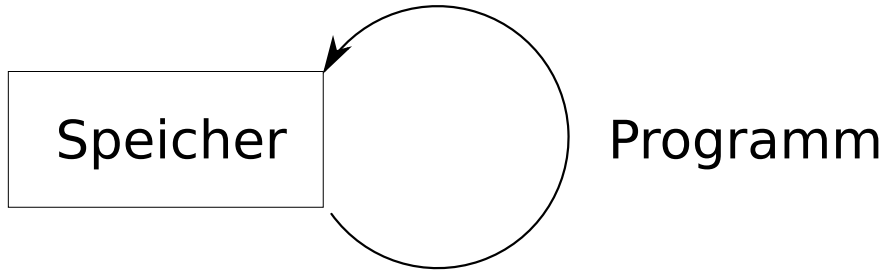
Warum Datentypen?

- Immer nur `Int` ist auch langweilig . . .
- **Abstraktion:**
  - *Bool* statt `Int`, Namen statt RGB-Codes, . . .
- **Bessere** Programme (verständlicher und wartbarer)
- Datentypen haben **wohlverstandene algebraische Eigenschaften**

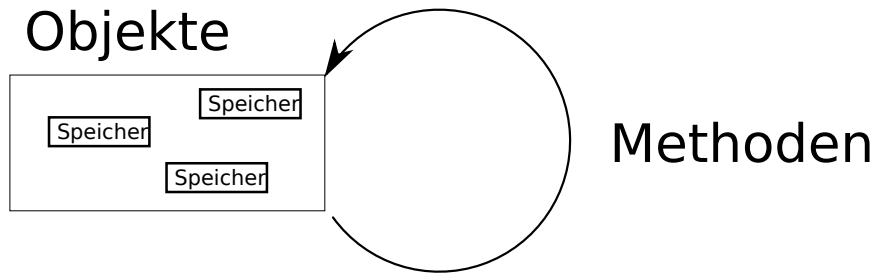
Datentypen als Modellierungskonstrukt

Programme **manipulieren** ein **Modell** der Umwelt:

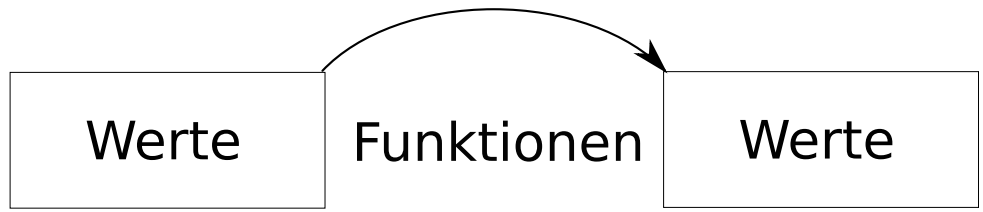
- Imperative Sicht:



- Objektorientierte Sicht:



- Funktionale Sicht:



Das Modell besteht aus Datentypen.

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Ein Tante-Emma Laden wie in früheren Zeiten.

Beispiel: Uncle Bob's Auld-Time Grocery Shoppe

Äpfel	Boskoop	55	ct/Stk
	Cox Orange	60	ct/Stk
	Granny Smith	50	ct/Stk
Eier		20	ct/Stk
Käse	Gouda	14,50	€/kg
	Appenzeller	22.70	€/kg
Schinken		1.99	€/100 g
Salami		1.59	€/100 g
Milch		0.69	€/l
	Bio	1.19	€/l

Aufzählungen

- Aufzählungen: Menge von **disjunkten** Konstanten

$$Apfel = \{Boskoop, Cox, Smith\}$$

$$Boskoop \neq Cox, Cox \neq Smith, Boskoop \neq Smith$$

- Genau drei unterschiedliche Konstanten
- Funktion mit Definitionsbereich *Apfel* muss drei Fälle unterscheiden
- Beispiel: $preis : Apfel \to \mathbb{N}$ mit

$$preis(a) = \begin{cases} 55 & a = Boskoop \\ 60 & a = Cox \\ 50 & a = Smith \end{cases}$$

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- **Definition**

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

  - Implizite Deklaration der **Konstruktoren** Boskoop :: Apfel als Konstanten
  - **Großschreibung** der Konstruktoren und Typen

- **Fallunterscheidung**:

```
apreis :: Apfel → Int
apreis a = case a of
  Boskoop → 55
  CoxOrange → 60
  GrannySmith → 50
```

Aufzählung und Fallunterscheidung in Haskell

- **Definition**

```
data Apfel = Boskoop | CoxOrange | GrannySmith
```

  - Implizite Deklaration der **Konstruktoren** Boskoop :: Apfel als Konstanten
  - **Großschreibung** der Konstruktoren und Typen

- **Fallunterscheidung**:

```
apreis :: Apfel → Int
apreis a = case a of
  Boskoop → 55
  CoxOrange → 60
  GrannySmith → 50
```

```
data Farbe = Rot | Gruen
farbe :: Apfel → Farbe
farbe d =
 case d of
  GrannySmith → Gruen
  _ → Rot
```

Fallunterscheidung in der Funktionsdefinition

- Abkürzende Schreibweisen (**syntaktischer Zucker**):

$$\begin{array}{l} f\ c_1 = e_1 \\ \ldots \\ f\ c_n = e_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad f\ x = \text{case } x \text{ of } \begin{array}{l} c_1 \rightarrow e_1 \\ \ldots \\ c_n \rightarrow e_n \end{array}$$

- Damit:

```
apreis :: Apfelsorte → Int
apreis Boskoop = 55
apreis CoxOrange = 60
apreis GrannySmith = 50
```

Der einfachste Aufzählungstyp

- **Einfachste** Aufzählung: Wahrheitswerte

$$Bool = \{False, True\}$$

  - Genau zwei unterschiedliche Werte

- **Definition** von Funktionen:

  - Wertetabellen sind explizite Fallunterscheidungen

$\wedge$	*true*	*false*
true	*true*	*false*
false	*false*	*false*

$$\begin{aligned} true \wedge true &= true \\ true \wedge false &= false \\ false \wedge true &= false \\ false \wedge false &= false \end{aligned}$$

Wahrheitswerte: Bool

- **Vordefiniert** als

```
data Bool = False | True
```

- Vordefinierte **Funktionen**:

```
not   :: Bool → Bool              — Negation
(&&)  :: Bool → Bool → Bool       — Konjunktion
(||)  :: Bool → Bool → Bool       — Disjunktion
```

- **if _ then _ else _** als syntaktischer Zucker:

$$\text{if } b \text{ then } p \text{ else } q \longrightarrow \text{case } b \text{ of } \begin{array}{l} \text{True} \to p \\ \text{False} \to q \end{array}$$

Striktheit Revisited

- **Konjunktion** definiert als

```
a && b = case a of False → False
                   True → b
```

- Alternative Definition als Wahrheitstabelle:

```
and :: Bool→ Bool→ Bool
and True  True  = True
and True  False = False
and False True  = False
and False False = False
```

Unterschied?

Striktheit Revisited

- **Konjunktion** definiert als

```
a && b = case a of False → False
                   True → b
```

- Alternative Definition als Wahrheitstabelle:

```
and :: Bool→ Bool→ Bool
and True  True  = True
and True  False = False
and False True  = False
and False False = False
```

Unterschied?

- Erste Definition ist **nicht-strikt** im zweiten Argument.
- Merke: wir können Striktheit von Funktionen (ungewollt) **erzwingen**

Produkte

- Konstruktoren können **Argumente** haben
- Beispiel: Ein **RGB-Wert** besteht aus drei Werten
- Mathematisch: Produkt (Tripel)

$$Colour = \{(r, g, b) \mid r \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

- In Haskell: Konstruktoren mit **Argumenten**

```
data Colour = RGB Int Int Int
```

  - Beispielwerte:

```
yellow :: Colour
yellow = RGB 255 255 0      -- 0xFFFF00
```

```
violet :: Colour
violet = RGB 238 130 238    -- 0xEE82EE
```

Funktionsdefinition auf Produkten

- **Funktionsdefinition**:
  - Konstruktorargumente sind **gebundene** Variablen
  - Wird bei der **Auswertung** durch konkretes Argument ersetzt
  - Kann mit Fallunterscheidung kombiniert werden
- Beispiele:

```
red :: Colour → Int
red (RGB r _ _) = r
```

```
green :: Colour → Int
green (RGB _ g _) = g
```

  - Beispielauswertungen

```
red yellow ⇝ 255
green violet ⇝ 130
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaesesorte = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaesesorte → Int
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Käsesorten und deren Preise:

```
data Kaesesorte = Gouda | Appenzeller
```

```
kpreis :: Kaesesorte → Int
kpreis Gouda = 1450
kpreis Appenzeller = 2270
```

- Alle Artikel:

```
data Artikel =
    Apfel Apfelsorte   | Eier
  | Kaese Kaesesorte   | Schinken
  | Salami             | Milch Bio
```

```
data Bio = Bio | Konv
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Berechnung des Preises für eine bestimmte **Menge** eines **Produktes**
- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
```

- Preisberechung

```
preis :: Artikel → Menge → Int
```

  - Aber was ist mit ungültigen Kombinationen (3 Liter Äpfel)?
  - Könnten Laufzeitfehler erzeugen (`error ...`)

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Berechnung des Preises für eine bestimmte **Menge** eines **Produktes**
- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
```

- Preisberechung

```
preis :: Artikel → Menge → Int
```

  - Aber was ist mit ungültigen Kombinationen (3 Liter Äpfel)?
  - Könnten Laufzeitfehler erzeugen (`error ...`) aber nicht wieder fangen.
  - Ausnahmebehandlung **nicht referentiell transparent**

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Berechnung des Preises für eine bestimmte **Menge** eines **Produktes**
- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
```

- Preisberechung

```
preis :: Artikel → Menge → Int
```

  - Aber was ist mit ungültigen Kombinationen (3 Liter Äpfel)?
  - Könnten Laufzeitfehler erzeugen (`error ...`) aber nicht wieder fangen.
  - Ausnahmebehandlung **nicht referentiell transparent**
  - Könnten spezielle Werte (0 oder -1) zurückgeben

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Berechnung des Preises für eine bestimmte **Menge** eines **Produktes**
- Mengenangaben:

```
data Menge = Stueck Int | Gramm Int | Liter Double
```

- Preisberechung

```
preis :: Artikel → Menge → Int
```

  - Aber was ist mit ungültigen Kombinationen (3 Liter Äpfel)?
  - Könnten Laufzeitfehler erzeugen (`error ...`) aber nicht wieder fangen.
  - Ausnahmebehandlung **nicht referentiell transparent**
  - Könnten spezielle Werte (0 oder -1) zurückgeben

- Besser: Ergebnis als Datentyp mit explizitem Fehler (**Reifikation**):

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig
```

Beispiel: Produkte in Bob's Shoppe

- Der Preis und seine Berechnung:

```
data Preis = Cent Int | Ungueltig

preis :: Artikel → Menge → Preis

preis (Apfel a) (Stueck n)  = Cent (n∗ apreis a)
preis Eier (Stueck n)       = Cent (n∗ 20)
preis (Kaese k)(Gramm g)    = Cent (div (g∗ kpreis k) 1000)
preis Schinken (Gramm g)    = Cent (div (g∗ 199) 100)
preis Salami (Gramm g)      = Cent (div (g∗ 159) 100)
preis (Milch bio) (Liter l) =
   Cent (round (l∗ case bio of Bio → 119; Konv → 69))
preis _ _ = Ungueltig
```

Auswertung der Fallunterscheidung

- Argument der Fallunterscheidung wird **nur soweit nötig** ausgewertet
- Beispiel:

```
f :: Preis → Int
f p = case p of Cent i → i; Ungueltig → 0
```

```
g :: Preis → Int
g p = case p of Cent i → 1; Ungueltig → 0
```

```
add :: Preis → Preis → Preis
add (Cent i) (Cent j) = Cent (i+j)
add _ _ = Ungueltig
```

Auswertung der Fallunterscheidung

- Argument der Fallunterscheidung wird **nur soweit nötig** ausgewertet
- Beispiel:

```
f :: Preis → Int
f p = case p of Cent i → i; Ungueltig → 0

g :: Preis → Int
g p = case p of Cent i → 1; Ungueltig → 0

add :: Preis → Preis → Preis
add (Cent i) (Cent j) = Cent (i+j)
add _ _ = Ungueltig
```

- Auswertungen:

  f (Cent undefined) ⇝ *** Exception: Prelude.undefined
  g (Cent undefined) ⇝ 1
  f (Cent (g (Cent undefined))) ⇝ 1
  g (add (Cent 1) (Cent undefined)) ⇝ 1
  f (add (Cent undefined) Ungueltig) ⇝ 0

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

$$
\begin{array}{lll}
\text{data T} = & C_1 \\
& \mid & C_2 \\
& & \vdots \\
& \mid & C_n
\end{array}
$$

- **Aufzählungen**

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

$$\text{data T} = \quad C_1\ t_{1,1}\ \ldots\ t_{1,k_1}$$

- **Aufzählungen**
- Konstrukturen mit **einem** oder **mehreren** Argumenten (Produkte)

Der Allgemeine Fall: Algebraische Datentypen

$$
\begin{array}{lll}
\text{data T} = & \mathsf{C}_1\ \mathsf{t}_{1,1} & \ldots\ \mathsf{t}_{1,k_1} \\
\mid & \mathsf{C}_2\ \mathsf{t}_{2,1} & \ldots\ \mathsf{t}_{2,k_2} \\
& \vdots & \\
\mid & \mathsf{C}_n\ \mathsf{t}_{n,1} & \ldots\ \mathsf{t}_{n,k_n}
\end{array}
$$

- **Aufzählungen**
- Konstrukturen mit **einem** oder **mehreren** Argumenten (Produkte)
- Der allgemeine Fall: **mehrere** Konstrukturen

Eigenschaften algebraischer Datentypen

$$
\begin{array}{lll}
\text{data T} = & \mathsf{C}_1\ \mathsf{t}_{1,1} \ldots \mathsf{t}_{1,k_1} \\
\quad\mid & \mathsf{C}_2\ \mathsf{t}_{2,1} \ldots \mathsf{t}_{2,k_2} \\
\quad\mid & \vdots \\
\quad\mid & \mathsf{C}_n\ \mathsf{t}_{n,1} \ldots \mathsf{t}_{n,k_n}
\end{array}
$$

Drei Eigenschaften eines algebraischen Datentypen

1. Konstruktoren $\mathsf{C}_1, \ldots, \mathsf{C}_n$ sind **disjunkt**:

$$\mathsf{C}_i\ \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n = \mathsf{C}_j\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_m \Longrightarrow i = j$$

Eigenschaften algebraischer Datentypen

$$
\begin{array}{rcl}
\text{data } T = & C_1\ t_{1,1} \ldots t_{1,k_1} \\
\mid & C_2\ t_{2,1} \ldots t_{2,k_2} \\
& \vdots \\
\mid & C_n\ t_{n,1} \ldots t_{n,k_n}
\end{array}
$$

Drei Eigenschaften eines algebraischen Datentypen

1. Konstruktoren $C_1, \ldots, C_n$ sind **disjunkt**:
$$C_i\ x_1 \ldots x_n = C_j\ y_1 \ldots y_m \Longrightarrow i = j$$
2. Konstruktoren sind **injektiv**:
$$C\ x_1 \ldots x_n = C\ y_1 \ldots y_n \Longrightarrow x_i = y_i$$

Eigenschaften algebraischer Datentypen

$$
\begin{aligned}
\text{data T} = \quad & \mathsf{C}_1\ \mathsf{t}_{1,1} \ldots \mathsf{t}_{1,k_1} \\
\mid \quad & \mathsf{C}_2\ \mathsf{t}_{2,1} \ldots \mathsf{t}_{2,k_2} \\
& \vdots \\
\mid \quad & \mathsf{C}_n\ \mathsf{t}_{n,1} \ldots \mathsf{t}_{n,k_n}
\end{aligned}
$$

Drei Eigenschaften eines algebraischen Datentypen

1. Konstruktoren $\mathsf{C}_1, \ldots, \mathsf{C}_n$ sind **disjunkt**:
$$\mathsf{C}_i\ \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n = \mathsf{C}_j\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_m \Longrightarrow i = j$$
2. Konstruktoren sind **injektiv**:
$$\mathsf{C}\ \mathsf{x}_1 \ldots \mathsf{x}_n = \mathsf{C}\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_n \Longrightarrow \mathsf{x}_i = \mathsf{y}_i$$
3. Konstruktoren **erzeugen** den Datentyp:
$$\forall x \in T.\, x = \mathsf{C}_i\ \mathsf{y}_1 \ldots \mathsf{y}_m$$

Eigenschaften algebraischer Datentypen

$$
\begin{array}{rcl}
\text{data } T = & C_1\ t_{1,1} \ldots t_{1,k_1} \\
\mid & C_2\ t_{2,1} \ldots t_{2,k_2} \\
& \vdots \\
\mid & C_n\ t_{n,1} \ldots t_{n,k_n}
\end{array}
$$

Drei Eigenschaften eines algebraischen Datentypen

1. Konstruktoren $C_1, \ldots, C_n$ sind **disjunkt**:
$$C_i\ x_1 \ldots x_n = C_j\ y_1 \ldots y_m \Longrightarrow i = j$$
2. Konstruktoren sind **injektiv**:
$$C\ x_1 \ldots x_n = C\ y_1 \ldots y_n \Longrightarrow x_i = y_i$$
3. Konstruktoren **erzeugen** den Datentyp:
$$\forall x \in T.\, x = C_i\ y_1 \ldots y_m$$

Diese Eigenschaften machen **Fallunterscheidung** wohldefiniert.

Algebraische Datentypen: Nomenklatur

$$\text{data } T = C_1\ t_{1,1} \ldots t_{1,k_1} \mid \cdots \mid C_n\ t_{n,1} \ldots t_{n,k_n}$$

- C_i sind **Konstruktoren**
  - **Immer** implizit definiert und deklariert
- **Selektoren** sind Funktionen $sel_{i,j}$:

$$\begin{aligned} sel_{i,j} &:: T \to t_{i,k_i} \\ sel_{i,j}\ (C_i\ t_{i,1} \ldots\ t_{i,k_i}) &= t_{i,j} \end{aligned}$$

  - Partiell, linksinvers zu Konstruktor C_i
  - **Können** implizit definiert und deklariert werden
- **Diskriminatoren** sind Funktionen dis_i:

$$\begin{aligned} dis_i &:: T \to \text{Bool} \\ dis_i\ (C_i \ldots) &= \text{True} \\ dis_i\ \_ &= \text{False} \end{aligned}$$

  - Definitionsbereichsbereich des Selektors sel_i, **nie** implizit

Rekursive Algebraische Datentypen

$$\begin{array}{lll} \text{data T} = & \text{C}_1\ \text{t}_{1,1} \ldots \text{t}_{1,k_1} \\ \quad \vdots & \\ \quad | & \text{C}_n\ \text{t}_{n,1} \ldots \text{t}_{n,k_n} \end{array}$$

- Der definierte Typ T kann **rechts** benutzt werden.
- Rekursive Datentypen definieren **unendlich große** Wertemengen.
- Modelliert **Aggregation** (Sammlung von Objekten).
- Funktionen werden durch **Rekursion** definiert.

Uncle Bob's Auld Time Grocery Shoppe Revisited

- Das **Lager** für Bob's Shoppe:
  - ist entweder leer,
  - oder es enthält einen Artikel und Menge, und noch mehr

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

Suchen im Lager

- Rekursive Suche (erste Version):

```
suche :: Artikel→ Lager→ Menge
suche art LeeresLager = ???
```

Suchen im Lager

- Rekursive Suche (erste Version):

```
suche :: Artikel→ Lager→ Menge
suche art LeeresLager = ???
```

- Modellierung des **Resultats**:

```
data Resultat = Gefunden Menge | NichtGefunden
```

- Damit rekursive **Suche**:

```
suche :: Artikel → Lager → Resultat
suche art (Lager lart m l)
  | art == lart = Gefunden m
  | otherwise   = suche art l
suche art LeeresLager  = NichtGefunden
```

Einlagern

- Signatur:

```
einlagern :: Artikel → Menge → Lager → Lager
```

- Erste Version:

```
einlagern a m l = Lager a m l
```

- Mengen sollen **aggregiert** werden (35l Milch + 20l Milch = 55l Milch)
- Dazu Hilfsfunktion:

```
addiere (Stueck i) (Stueck j)= Stueck (i+j)
addiere (Gramm g) (Gramm h)  = Gramm (g+h)
addiere (Liter l) (Liter m)  = Liter (l+m)
addiere m n = error ("addiere: "++ show m++ " und "++ show n)
```

Einlagern

- Damit einlagern:

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
einlagern a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
einlagern a m (Lager al ml l)
  | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
  | otherwise = Lager al ml (einlagern a m l)
```

- Problem:

Einlagern

- Damit einlagern:

```
einlagern :: Artikel→ Menge→ Lager→ Lager
einlagern a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
einlagern a m (Lager al ml l)
  | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
  | otherwise = Lager al ml (einlagern a m l)
```

- Problem: **Falsche Mengenangaben**
  - Bspw. `einlagern Eier (Liter 3.0) l`
  - Erzeugen Laufzeitfehler in `addiere`
- Lösung: eigentliche Funktion `einlagern` wird als **lokale Funktion** versteckt, und nur mit gültiger Mengenangabe aufgerufen.

Einlagern

- Lösung: eigentliche Funktion einlagern wird als **lokale Funktion** versteckt, und nur mit gültiger Mengenangabe aufgerufen.

```
einlagern :: Artikel → Menge → Lager → Lager
einlagern a m l =
  let einlagern' a m LeeresLager = Lager a m LeeresLager
      einlagern' a m (Lager al ml l)
        | a == al   = Lager a (addiere m ml) l
        | otherwise = Lager al ml (einlagern' a m l)
  in case preis a m of
       Ungueltig → l
       _ → einlagern' a m l
```

Einkaufen und bezahlen

- Wir brauchen einen **Einkausfwagen:**

```
data Einkaufswagen = LeererWagen
                   | Einkauf Artikel Menge Einkaufswagen
```

- Artikel einkaufen:

```
einkauf :: Artikel → Menge → Einkaufswagen → Einkaufswagen
einkauf a m e =
  case preis a m of
    Ungueltig → e
    _ → Einkauf a m e
```

  - Auch hier: ungültige Mengenangaben erkennen
  - Es wird **nicht** aggregiert

Beispiel: Kassenbon

```
kassenbon :: Einkaufswagen → String
```

Ausgabe:

```
* Bob's Aulde Grocery Shoppe *

Artikel                 Menge       Preis
-------------------------------------------
Kaese Appenzeller     378 g.     8.58 EU
Schinken               50 g.     0.99 EU
Milch Bio             1.0 l.     1.19 EU
Schinken               50 g.     0.99 EU
Apfel Boskoop           3 St     1.65 EU
===========================================
Summe:                          13.40 EU
```

Unveränderlicher Kopf

Ausgabe von Artikel und Menge (rekursiv)

Ausgabe von kasse

Kassenbon: Implementation

- Kernfunktion:

```
artikel :: Einkaufswagen → String
artikel LeererWagen = ""
artikel (Einkauf a m e) =
   formatL 20 (show a) ++
   formatR 7  (menge m) ++
   formatR 10 (showEuro (cent a m)) ++ "\n"++ artikel e
```

- Hilfsfunktionen:

```
formatL :: Int → String → String
```

```
formatR :: Int → String → String
```

```
showEuro :: Int → String
```

Beispiel: Zeichenketten selbstgemacht

- Eine **Zeichenkette** ist
  - entweder leer (das leere Wort ϵ)
  - oder ein Zeichen *c* und eine weitere Zeichenkette *xs*

```
data String = Empty
            | Char :+ String
```

- **Lineare** Rekursion
  - Genau ein rekursiver Aufruf
- Haskell-Merkwürdigkeit #237:
  - Die Namen von Operator-Konstruktoren müssen mit einem : beginnen.

Rekursiver Typ, rekursive Definition

- Typisches Muster: **Fallunterscheidung**
  - Ein Fall pro Konstruktor
- Hier:
  - Leere Zeichenkette
  - Nichtleere Zeichenkette

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
length :: String → Int
length Empty    = 0
length (c :+ s) = 1 + length s
```

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
length :: String → Int
length Empty    = 0
length (c :+ s) = 1 + length s
```

- Verkettung:

```
(++) :: String → String → String
Empty ++ t   = t
(c :+ s) ++ t = c :+ (s ++ t)
```

Funktionen auf Zeichenketten

- Länge:

```
length :: String → Int
length Empty    = 0
length (c :+ s) = 1 + length s
```

- Verkettung:

```
(++) :: String → String → String
Empty ++ t  = t
(c :+ s) ++ t = c :+ (s ++ t)
```

- Umdrehen:

```
rev :: String → String
rev Empty    = Empty
rev (c :+ t) = rev t ++ (c :+ Empty)
```

Zusammenfassung

- Algebraische Datentypen: Aufzählungen, Produkte, rekursive Datentypen
- Rekursive Datentypen sind **unendlich** (induktiv)
- Funktionen werden durch **Fallunterscheidung** und **Rekursion** definiert
- Fallbeispiele: Bob's Shoppe, Zeichenketten