Funktionale Programmierung - fortgeschrittene Konzepte und Anwendungen

Vorlesung 6 vom 12.11.2019: Funktionen Höherer Ordnung I

Till Mossakowski

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Wintersemester 2019/20

Fahrplan

- **Teil I: Funktionale Programmierung im Kleinen**
  - Einführung
  - Funktionen
  - Algebraische Datentypen
  - Typvariablen und Polymorphie
  - Zyklische Datenstrukturen
  - Funktionen höherer Ordnung I
  - Funktionen höherer Ordnung II
- Teil II: Funktionale Programmierung im Großen
- Teil III: Funktionale Programmierung im richtigen Leben

Inhalt

- Funktionen **höherer Ordnung**:
  - Funktionen als gleichberechtigte Objekte
  - Funktionen als Argumente
- Spezielle Funktionen: map, `filter`, `fold` und Freunde

Funktionen als Werte

Funktionen Höherer Ordnung

Slogan

"Functions are first-class citizens."

- Funktionen sind gleichberechtigt: Ausdrücke wie **alle anderen**
- **Grundprinzip** der funktionalen Programmierung
- Modellierung **allgemeiner Berechungsmuster**
- Kontrollabstraktion

Ähnliche Datentypen der letzten Vorlesung

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

```
data Einkaufswagen = LeererWagen
                   | Einkauf Artikel Menge Einkaufswagen
```

```
data String = Empty
            | Char :+ String
```

- ein **konstanter** Konstruktor
- ein **linear rekursiver** Konstruktor

Ähnliche Datentypen der letzten Vorlesung

```
data Lager = LeeresLager
           | Lager Artikel Menge Lager
```

```
data Eink
```

Gelöst durch Polymorphie

swagen

```
data String = Empty
            | Char :+ String
```

- ein **konstanter** Konstruktor
- ein **linear rekursiver** Konstruktor

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

```
kasse :: Einkaufswagen → Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

```
inventur :: Lager → Int
inventur LeeresLager = 0
inventur (Lager a m l) = cent a m + inventur l
```

```
length :: String → Int
length Empty     = 0
length (c :+ s) = 1 + length s
```

Gemeinsamkeiten:

- ein Fall pro Konstruktor
- **linearer** rekursiver Aufruf

Ähnliche Funktionen der letzten Vorlesung

```
kasse :: Einkaufswagen → Int
kasse LeererWagen = 0
kasse (Einkauf a m e) = cent a m + kasse e
```

```
inventur :: Lager → Int
inventur LeeresLager = 0
inventur (Lager a m l) = cent a m + inventur l
```

```
length :: String → Int
length Empty     = 0
length (c :+ s) = 1 + length s
```

Gemeinsamkeiten:

- ein Fall pro Konstruktor
- **linearer** rekursiver Aufruf
- **Nicht** durch Polymorphie gelöst (keine Instanz **einer** Definition)

Ein einheitlicher Rahmen

- Zwei ähnliche Funktionen:

```
toL :: String→ String
toL []     = []
toL (c:cs) = toLower c : toL cs
```

```
toU :: String→ String
toU []     = []
toU (c:cs) = toUpper c : toU cs
```

- Warum nicht **eine** Funktion ...

Ein einheitlicher Rahmen

- Zwei ähnliche Funktionen:

```
toL :: String→ String
toL []     = []
toL (c:cs) = toLower c : toL cs
```

```
toU :: String→ String
toU []     = []
toU (c:cs) = toUpper c : toU cs
```

- Warum nicht **eine** Funktion ...

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

Ein einheitlicher Rahmen

- Zwei ähnliche Funktionen:

```
toL :: String→ String
toL []     = []
toL (c:cs) = toLower c : toL cs
```

```
toU :: String→ String
toU []     = []
toU (c:cs) = toUpper c : toU cs
```

- Warum nicht **eine** Funktion und **zwei** Instanzen?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

```
toL cs = map toLower cs
toU cs = map toUpper cs
```

- **Funktion** f als **Argument**
- Was hätte map für einen **Typ**?

Funktionen als Werte: Funktionstypen

- Was hätte map für einen **Typ**?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Was ist der Typ des ersten Arguments?

Funktionen als Werte: Funktionstypen

- Was hätte map für einen **Typ**?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Was ist der Typ des ersten Arguments?
  - Eine Funktion mit beliebigen Definitions- und Wertebereich: $\alpha \to \beta$
- Was ist der Typ des zweiten Arguments?

Funktionen als Werte: Funktionstypen

- Was hätte map für einen **Typ**?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Was ist der Typ des ersten Arguments?
  - Eine Funktion mit beliebigen Definitions- und Wertebereich: $\alpha \to \beta$
- Was ist der Typ des zweiten Arguments?
  - Eine Liste, auf deren Elemente die Funktion f angewant wird: $[\alpha]$
- Was ist der Ergebnistyp?

Funktionen als Werte: Funktionstypen

- Was hätte map für einen **Typ**?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Was ist der Typ des ersten Arguments?
  - Eine Funktion mit beliebigen Definitions- und Wertebereich: $\alpha \to \beta$
- Was ist der Typ des zweiten Arguments?
  - Eine Liste, auf deren Elemente die Funktion f angewant wird: $[\alpha]$
- Was ist der Ergebnistyp?
  - Eine Liste von Elementen aus dem Wertebereich von f: $[\beta]$
- Alles **zusammengesetzt**:

Funktionen als Werte: Funktionstypen

- Was hätte map für einen **Typ**?

```
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Was ist der Typ des ersten Arguments?
  - Eine Funktion mit beliebigen Definitions- und Wertebereich: $\alpha \to \beta$
- Was ist der Typ des zweiten Arguments?
  - Eine Liste, auf deren Elemente die Funktion f angewant wird: $[\alpha]$
- Was ist der Ergebnistyp?
  - Eine Liste von Elementen aus dem Wertebereich von f: $[\beta]$
- Alles **zusammengesetzt**:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
```

Map und Filter

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:
  toL "AB"

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []       = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:
  toL "AB" → map toLower ('A':'B':[])

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
```

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
          → 'a':map toLower ('B':[])
```

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
          → 'a':map toLower ('B':[])
          → 'a':toLower 'B':map toLower []
```

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
          → 'a':map toLower ('B':[])
          → 'a':toLower 'B':map toLower []
          → 'a':'b':map toLower []
```

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
          → 'a':map toLower ('B':[])
          → 'a':toLower 'B':map toLower []
          → 'a':'b':map toLower []
          → 'a':'b':[]
```

Funktionen als Argumente: map

- map wendet Funktion auf alle Elemente an
- Signatur:

```
map :: (α→ β)→ [α]→ [β]
map f []     = []
map f (c:cs) = f c : map f cs
```

- Auswertung:

```
toL "AB"  → map toLower ('A':'B':[])
          → toLower 'A': map toLower ('B':[])
          → 'a':map toLower ('B':[])
          → 'a':toLower 'B':map toLower []
          → 'a':'b':map toLower []
          → 'a':'b':[] ≡ "ab"
```

- Funktionsausdrücke werden symbolisch reduziert
  - Keine Änderung

Funktionen als Argumente: `filter`

- Elemente **filtern**: `filter`
- Signatur:

```
filter :: (α→ Bool)→ [α]→ [α]
```

- Definition

```
filter p []   = []
filter p (x:xs)
  | p x       = x: filter p xs
  | otherwise = filter p xs
```

- Beispiel:

```
letters :: String→ String
letters = filter isAlpha
```

Beispiel `filter`: Sieb des Erathostenes

- Für jede gefundene Primzahl p alle Vielfachen heraussieben:

```
sieve (p:ps) = p: sieve (filter ps) where
   filter (q: qs)
     | q `mod` p ≠ 0 = q: filter qs
     | otherwise     = filter qs
```

Beispiel `filter`: Sieb des Erathostenes

- Für jede gefundene Primzahl p alle Vielfachen heraussieben:

```
sieve (p:ps) = p: sieve (filter ps) where
   filter (q: qs)
     | q `mod` p ≠ 0 = q: filter qs
     | otherwise     = filter qs
```

- Einfacher mit `filter`
- Es wird gefiltert mit `mod q p` $\neq 0$ (Funktionsparameter `q`)

Beispiel `filter`: Sieb des Erathostenes

- Für jede gefundene Primzahl p alle Vielfachen heraussieben:

```
sieve (p:ps) = p: sieve (filter ps) where
   filter (q: qs)
     | q `mod` p ≠ 0 = q: filter qs
     | otherwise     = filter qs
```

- Einfacher mit `filter`
- Es wird gefiltert mit mod q p $\neq$ 0 (Funktionsparameter q)
- **Namenlose** (anonyme) Funktion λq$\rightarrow$ mod q p $\neq$ 0

```
sieve :: [Integer]→ [Integer]
sieve (p:ps) = p: sieve (filter (λq→ q `mod` p ≠ 0) ps)
```

Funktionen Höherer Ordnung

Funktionen als Argumente: Funktionskomposition

- **Funktionskomposition** (mathematisch)

```
(∘) :: (β→ γ) → (α→ β)→ α→ γ
(f ∘ g) x = f (g x)
```

  - Vordefiniert
  - Lies: f nach g

- Funktionskomposition **vorwärts**:

```
(>.>) :: (α→ β)→ (β→ γ)→ α→ γ
(f >.> g) x = g (f x)
```

  - **Nicht** vordefiniert

η-Kontraktion

- "$>.>$ ist dasselbe wie $\circ$ nur mit vertauschten Argumenten"
- Vertauschen der **Argumente** (vordefiniert):

```
flip :: (α→ β→ γ)→ β→ α→ γ
flip f b a = f a b
```

η-Kontraktion

- "$>.>$ ist dasselbe wie $\circ$ nur mit vertauschten Argumenten"
- Vertauschen der **Argumente** (vordefiniert):

```
flip :: (α→ β→ γ)→ β→ α→ γ
flip f b a = f a b
```

- Damit Funktionskomposition vorwärts:

```
(>.>) :: (α→ β)→ (β→ γ)→ α→ γ
(>.>) = flip (∘)
```

- **Da fehlt doch was?!**

η-Kontraktion

- "$>.>$ ist dasselbe wie $\circ$ nur mit vertauschten Argumenten"
- Vertauschen der **Argumente** (vordefiniert):

```
flip :: (α→ β→ γ)→ β→ α→ γ
flip f b a = f a b
```

- Damit Funktionskomposition vorwärts:

```
(>.>) :: (α→ β)→ (β→ γ)→ α→ γ
(>.>) = flip (∘)
```

- **Da fehlt doch was?!** Nein:

$$(>.>) = \text{flip}\ (\circ) \quad \equiv \quad (>.>)\ \text{f g a} = \text{flip}\ (\circ)\ \text{f g a}$$

- Warum?

η-Äquivalenz und η-Kontraktion

η-Äquivalenz

Sei f eine Funktion $f : A \to B$, dann gilt $f = \lambda x.\, f\ x$

- In Haskell: **η-Kontraktion**
  - Bedingung: Ausdruck E :: $\alpha \to \beta$, Variable x :: α, E darf x nicht enthalten

$$\lambda x \to \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{E}$$

- Spezialfall Funktionsdefinition (**punktfreie** Notation)

$$\mathsf{f}\ \mathsf{x} = \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{f} = \mathsf{E}$$

- Hier:

$$(>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} \equiv (>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a}$$

η-Äquivalenz und η-Kontraktion

η-Äquivalenz

Sei f eine Funktion $f : A \to B$, dann gilt $f = \lambda x.\, f\ x$

- In Haskell: **η-Kontraktion**
  - Bedingung: Ausdruck E :: $\alpha \to \beta$, Variable x :: α, E darf x nicht enthalten

$$\lambda x \to \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{E}$$

- Spezialfall Funktionsdefinition (**punktfreie** Notation)

$$\mathsf{f}\ \mathsf{x} = \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{f} = \mathsf{E}$$

- Hier:

$$(>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} \equiv (>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g} \quad = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}$$

η-Äquivalenz und η-Kontraktion

η-Äquivalenz

Sei f eine Funktion $f : A \to B$, dann gilt $f = \lambda x.\, f\ x$

- In Haskell: **η-Kontraktion**
  - Bedingung: Ausdruck E :: $\alpha \to \beta$, Variable x :: α, E darf x nicht enthalten

$$\lambda x \to \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{E}$$

- Spezialfall Funktionsdefinition (**punktfreie** Notation)

$$\mathsf{f}\ \mathsf{x} = \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{f} = \mathsf{E}$$

- Hier:

$$(>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} \equiv (>.>)\ \mathsf{f} \quad = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}$$

η-Äquivalenz und η-Kontraktion

η-Äquivalenz

Sei f eine Funktion $f : A \to B$, dann gilt $f = \lambda x.\, f\ x$

- In Haskell: **η-Kontraktion**
  - Bedingung: Ausdruck E :: $\alpha \to \beta$, Variable x :: α, E darf x nicht enthalten

$$\lambda x \to \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{E}$$

- Spezialfall Funktionsdefinition (**punktfreie** Notation)

$$\mathsf{f}\ \mathsf{x} = \mathsf{E}\ \mathsf{x} \quad \equiv \quad \mathsf{f} = \mathsf{E}$$

- Hier:

$$(>.>)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} = \mathsf{flip}\ (\circ)\ \mathsf{f}\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} \equiv (>.>) \qquad = \mathsf{flip}\ (\circ)$$

Partielle Applikation

- Funktionskonstruktor rechtsassoziativ:

$$\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$$

  - **Inbesondere**: $(\alpha \to \beta) \to \gamma \neq \alpha \to (\beta \to \gamma)$

- Funktionsanwendung ist linksassoziativ:

$$\mathsf{f\ a\ b} \equiv (\mathsf{f\ a})\ \mathsf{b}$$

  - **Inbesondere**: $\mathsf{f\ (a\ b)} \neq (\mathsf{f\ a})\ \mathsf{b}$

Partielle Applikation

- Funktionskonstruktor rechtsassoziativ:

$$\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$$

  - **Inbesondere**: $(\alpha \to \beta) \to \gamma \neq \alpha \to (\beta \to \gamma)$

- Funktionsanwendung ist linksassoziativ:

$$\mathsf{f\ a\ b} \equiv (\mathsf{f\ a})\ \mathsf{b}$$

  - **Inbesondere**: $\mathsf{f\ (a\ b)} \neq (\mathsf{f\ a})\ \mathsf{b}$

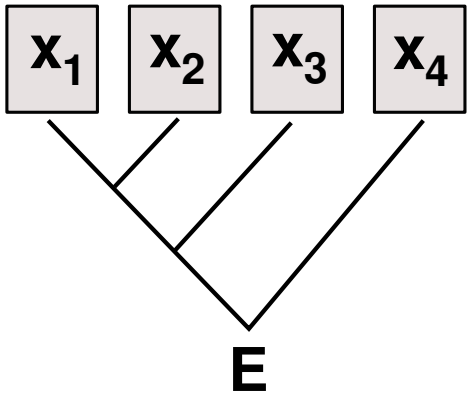
- **Partielle** Anwendung von Funktionen:
  - Für $\mathsf{f} :: \alpha \to \beta \to \gamma$, $\mathsf{x} :: \alpha$ ist $\mathsf{f\ x} :: \beta \to \gamma$

- Beispiele:
  - $\mathsf{map\ toLower} :: \mathsf{String} \to \mathsf{String}$
  - $(3 ==) :: \mathsf{Int} \to \mathsf{Bool}$
  - $\mathsf{concat} \circ \mathsf{map\ (replicate\ 2)} :: \mathsf{String} \to \mathsf{String}$

Strukturelle Rekursion

Strukturelle Rekursion

- **Strukturelle Rekursion**: gegeben durch
  - eine Gleichung für die leere Liste
  - eine Gleichung für die nicht-leere Liste (mit **einem** rekursiven Aufruf)



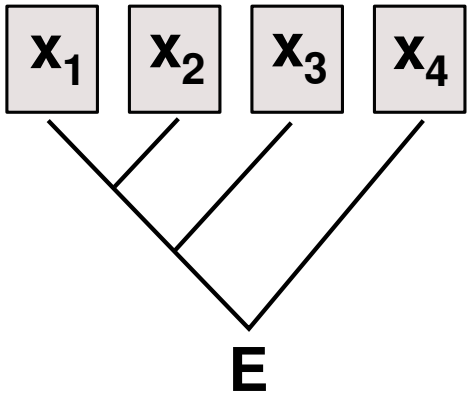
- Beispiel: `kasse`, `inventur`, `sum`, `concat`, `length`, $(+\!\!+)$, ...

- Auswertung:

```
sum    [4,7,3]      →
concat [A, B, C]    →
length [4, 5, 6]    →
```

Strukturelle Rekursion

- **Strukturelle Rekursion**: gegeben durch
  - eine Gleichung für die leere Liste
  - eine Gleichung für die nicht-leere Liste (mit **einem** rekursiven Aufruf)



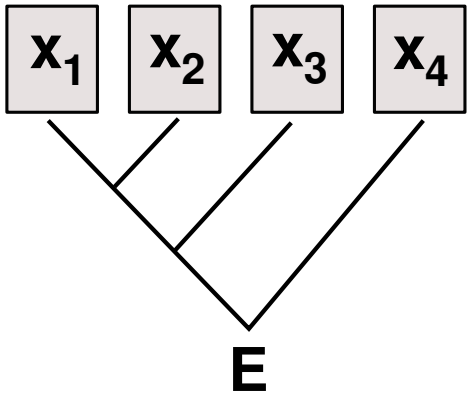
- Beispiel: `kasse`, `inventur`, `sum`, `concat`, `length`, $(+\!\!+)$, ...

- Auswertung:

```
sum    [4,7,3]      →  4 + 7 + 3 + 0
concat [A, B, C]    →
length [4, 5, 6]    →
```

Strukturelle Rekursion

- **Strukturelle Rekursion**: gegeben durch
  - eine Gleichung für die leere Liste
  - eine Gleichung für die nicht-leere Liste (mit **einem** rekursiven Aufruf)



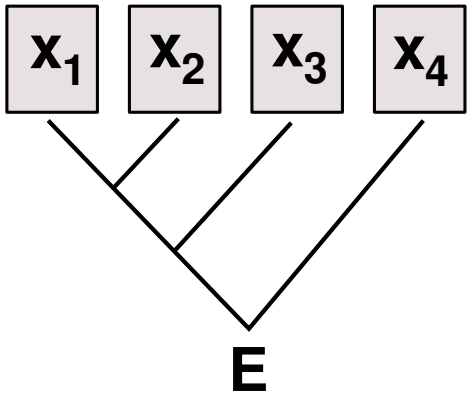
- Beispiel: `kasse`, `inventur`, `sum`, `concat`, `length`, $(+\!\!+)$, ...

- Auswertung:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{sum}\ [4,7,3] & \rightarrow & 4 + 7 + 3 + 0 \\
\texttt{concat}\ [A,\ B,\ C] & \rightarrow & A +\!\!+ B +\!\!+ C +\!\!+ [\,] \\
\texttt{length}\ [4,\ 5,\ 6] & \rightarrow &
\end{array}
$$

Strukturelle Rekursion

- **Strukturelle Rekursion**: gegeben durch
  - eine Gleichung für die leere Liste
  - eine Gleichung für die nicht-leere Liste (mit **einem** rekursiven Aufruf)



- Beispiel: `kasse`, `inventur`, `sum`, `concat`, `length`, $(+\!\!+)$, ...

- Auswertung:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{sum}\ [4,7,3] & \rightarrow & 4+7+3+0 \\
\texttt{concat}\ [A,\ B,\ C] & \rightarrow & A +\!\!+ B +\!\!+ C +\!\!+ [\,] \\
\texttt{length}\ [4,\ 5,\ 6] & \rightarrow & 1+1+1+0
\end{array}
$$

Strukturelle Rekursion

- **Allgemeines Muster**:

```
f  []       = e
f  (x:xs)   = x ⊗ f  xs
```

- Parameter der Definition:
  - Startwert (für die leere Liste) e :: β
  - Rekursionsfunktion $\otimes$ :: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
- Auswertung:

$$f\ [x1, \ldots, xn] = x1 \otimes x2 \otimes \ldots \otimes xn \otimes e$$

- **Terminiert** immer (wenn Liste endlich und $\otimes$, e terminieren)

Strukturelle Rekursion durch `foldr`

- **Stukturelle** Rekursion
  - Basisfall: leere Liste
  - Rekursionsfall: Kombination aus Listenkopf und Rekursionswert
- Signatur

```
foldr :: (α→ β→ β)→ β→ [α]→ β
```

- Definition

```
foldr f e []     = e
foldr f e (x:xs) = f x (foldr f e xs)
```

Beispiele: foldr

- **Summieren** von Listenelementen.

```
sum :: [Int] → Int
sum xs = foldr (+) 0 xs
```

- **Flachklopfen** von Listen.

```
concat :: [[a]] → [a]
concat xs = foldr (++) [] xs
```

- **Länge** einer Liste

```
length :: [a] → Int
length xs = foldr (λx n → n + 1) 0 xs
```

Beispiele: foldr

- **Konjunktion** einer Liste

```
and :: [Bool] → Bool
and xs = foldr (&&) True xs
```

- **Konjunktion** von Prädikaten

```
all :: (α→ Bool)→ [α] → Bool
all p = and ∘ map p
```

Der Shoppe, revisited.

- Kasse alt:

```
kasse :: Einkaufswagen→ Int
kasse (Ekwg ps) = kasse' ps where
  kasse' [] = 0
  kasse' (p: ps) = cent p+ kasse' ps
```

- Kasse neu:

```
kasse' :: Einkaufswagen→ Int
kasse' (Ekwg ps) = foldr (λp ps→ cent p+ ps) 0 ps
```

Besser:

```
kasse :: Einkaufswagen→ Int
kasse (Ekwg ps) = sum (map cent ps)
```

Der Shoppe, revisited.

- Inventur alt:

```
inventur :: Lager→ Int
inventur (Lager ps) = inventur' ps where
  inventur' [] = 0
  inventur' (p: ps) = cent p+ inventur' ps
```

- Inventur neu:

```
inventur :: Lager→ Int
inventur (Lager l) = sum (map cent l)
```

Der Shoppe, revisited.

- Suche nach einem Artikel alt:

```
suche :: Artikel→ Lager→ Maybe Menge
suche art (Lager ps) = suche' art ps where
  suche' art (Posten lart m: l)
    | art == lart = Just m
    | otherwise   = suche' art l
  suche' art []    = Nothing
```

- Suche nach einem Artikel neu:

```
suche :: Artikel→ Lager→ Maybe Menge
suche a (Lager ps) =
   listToMaybe (map (λ(Posten _ m)→ m)
                (filter (λ(Posten la _) → la == a) ps))
```

Der Shoppe, revisited.

- Kassenbon formatieren neu:

```
kassenbon :: Einkaufswagen→ String
kassenbon ew@(Ekwg ps) =
  "Bob's␣Aulde␣Grocery␣Shoppe\n\n"++
  "Artikel␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣Menge␣␣␣␣␣␣Preis\n"++
  "————————————————————————————————\n"++
  concatMap artikel ps ++
  "————————————————————————————————\n"++
  "Summe:"++ formatR 31 (showEuro (kasse ew))
```

```
artikel :: Posten→ String
```

Noch ein Beispiel: rev

- Listen **umdrehen**:

```
rev1 :: [α]→ [α]
rev1 []       = []
rev1 (x:xs) = rev1 xs ++ [x]
```

- Mit foldr:

```
rev2 :: [α]→ [α]
rev2 = foldr (λx xs→ xs++ [x]) []
```

- Unbefriedigend: doppelte Rekursion $O(n^2)$!

Iteration mit foldl

- foldr faltet von rechts:

  $$\texttt{foldr}\ \otimes\ [x1, \ldots, xn]\ e = x1 \otimes x2\ (x2 \otimes (\ldots (xn \otimes e)))$$

- Warum nicht **andersherum**?

Iteration mit foldl

- foldr faltet von rechts:

  $$\texttt{foldr} \otimes [x1, \ldots, xn]\ e = x1 \otimes x2\ (x2 \otimes (\ldots (xn \otimes e)))$$

- Warum nicht **andersherum**?

  $$\texttt{foldl} \otimes [x1, \ldots, xn]\ e = (((e \otimes x1) \otimes x2) \ldots) \otimes xn$$

- Definition von foldl:

```
foldl :: (α → β → α) → α → [β] → α
foldl f a [] = a
foldl f a (x:xs) = foldl f (f a x) xs
```

- foldl ist ein **Iterator** mit Anfangszustand e, Iterationsfunktion $\otimes$
- Entspricht einfacher Iteration (for-Schleife)

foldr vs. foldl

- $f = \text{foldr} \otimes e$ entspricht

```
f []     = e
f (x:xs) = x ⊗ f xs
```

  - **Nicht-strikt** in xs, z.B. and, or
  - Konsumiert nicht immer die ganze Liste
  - Auch für unendliche Listen anwendbar

- $f = \text{foldl} \otimes e$ entspricht

```
f xs = g e xs where
  g a []     = a
  g a (x:xs) = g (a ⊗ x) xs
```

  - Effizient (endrekursiv) und **strikt** in xs
  - Konsumiert immer die ganze Liste
  - Divergiert immer für unendliche Listen

Beispiel: rev revisited

- Listenumkehr **endrekursiv**:

```
rev3 :: [α]→ [α]
rev3 xs = rev0 xs [] where
    rev0 []     ys = ys
    rev0 (x:xs) ys = rev0 xs (x:ys)
```

- Listenumkehr durch falten **von links**:

```
rev4 :: [α]→ [α]
rev4 = foldl (λxs x → x: xs) []
```

```
rev5 :: [α]→ [α]
rev5 = foldl (flip (:)) []
```

- Nur noch **eine** Rekursion $O(n)$!

Wann ist foldl = foldr?

Definition (Monoid)

$(\otimes, A)$ ist ein **Monoid** wenn

$$A \otimes \mathrm{x} = \mathrm{x} \qquad \text{(Neutrales Element links)}$$
$$\mathrm{x} \otimes A = \mathrm{x} \qquad \text{(Neutrales Element rechts)}$$
$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}) \otimes \mathrm{z} = \mathrm{x} \otimes (\mathrm{y} \otimes \mathrm{z}) \qquad \text{(Assoziativät)}$$

Theorem

*Wenn $(\otimes, A)$ **Monoid**, dann für alle A, xs*

$$\mathit{foldl} \otimes A\ xs = \mathit{foldr} \otimes A\ xs$$

- Beispiele: `length`, `concat`, `sum`, `all`
- Gegenbeispiele: `rev`

Übersicht: vordefinierte Funktionen auf Listen II

```
map       :: (α→ β)→ [α]→ [β]                  — Auf alle anwenden
filter    :: (α→ Bool)→ [α]→ [α]               — Elemente filtern
foldr     :: (α→ β→ β)→ β→ [α]→ β              — Falten von rechts
foldl     :: (β→ α→ β)→ β→ [α]→ β              — Falten von links
mapConcat :: (α→ [β])→ [α]→ [β]                — map und concat
takeWhile :: (α→ Bool)→ [α]→ [α]               — längster Prefix mit p
dropWhile :: (α→ Bool)→ [α]→ [α]               — Rest von takeWhile
span      :: (α→ Bool)→ [α]→ ([α], [α])        — takeWhile und dropWhile
all       :: (α → Bool) → [α] → Bool           — p gilt für alle
any       :: (α → Bool) → [α] → Bool           — p gilt mind. einmal
elem      :: (Eq α) ⇒ α → [α] → Bool           — Ist Element enthalten?
zipWith   :: (α → β → γ) → [α] → [β] → [γ]
                                               — verallgemeinertes zip
```

- Mehr: siehe `Data.List`

Zusammenfassung

- Funktionen **höherer Ordnung**
  - Funktionen als gleichberechtigte Objekte und Argumente
  - Partielle Applikation, η-Kontraktion, namenlose Funktionen
  - Spezielle Funktionen höherer Ordnung: map, `filter`, `fold` und Freunde
- Formen der **Rekursion**:
  - Strukturelle Rekursion entspricht `foldr`
  - Iteration entspricht `foldl`
- Nächste Woche: `fold` für andere Datentypen