

Theoretische Informatik

für die Studiengänge

Ingenieur-Informatik

berufsbegleitendes Studium Lehramt Informatik
(Sekundar- und Berufsschule)

<http://theo.cs.uni-magdeburg.de/lehre04s/>

Lehrbeauftragter: Dr. Ralf Stiebe

Email: `stiebe@iws.cs.uni-magdeburg.de`

Telefon: 0391-67-12457

Inhalt der Vorlesung

- Berechenbarkeit
 - Formale Definition des Begriffes **Algorithmus**
 - Nachweis, dass verschiedene Probleme algorithmisch nicht lösbar sind
- Komplexität
 - Schwierigkeit algorithmisch lösbarer Probleme (Zeitbedarf, Platzbedarf)
- Formale Sprachen
 - enge Beziehung zur Berechenbarkeitstheorie
 - Anwendungen in Compilerbau, Textverarbeitung

Literatur

- Uwe Schöning: [Theoretische Informatik – kurzgefasst](#).
Die Vorlesung orientiert sich stark an diesem Buch.
- Hopcroft, Motwani, Ullman: [Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie](#).
Sehr ausführliches Standardwerk
- Script

Mathematische Grundlagen

Script, Kapitel 1

- Mengen, Relationen, Funktionen
- Alphabete, Wörter, Sprachen

Mengen, Relationen, Funktionen

Menge: Zusammenfassung von Elementen.

$$M = \{2, 4, 6, 8\}, 4 \in M, 3 \notin M$$

Reihenfolge der Elemente beliebig, Mehrfachnennungen zählen nicht:

$$\{4, 6, 8, 2, 8, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

Beschreibung einer Menge durch definierende Eigenschaft:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$$

Wichtige spezielle Mengen

- \emptyset : leere Menge (enthält keine Elemente)
- \mathbb{N} : Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
- \mathbb{Z} : Menge der ganzen Zahlen
- \mathbb{R} : Menge der reellen Zahlen
- \mathbb{Q} : Menge der rationalen Zahlen

Teilmengen

A heißt **Teilmenge** von B , wenn alle Elemente von A in B sind.

Bezeichnung: $A \subseteq B$.

A heißt **echte Teilmenge** von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Bezeichnung: $A \subsetneq B$.

Potenzmenge von A : Menge aller Teilmengen von A

Bezeichnung: $\mathcal{P}(A)$ bzw. 2^A

Beispiel: $A = \{0, 1, 4\}$, $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{4\}, \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{1, 4\}, \{0, 1, 4\}\}$

Mengenoperationen

Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

Differenz: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Beispiel: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \setminus B = \{0, 1, 3\}$

Kartesische Produkte

Geordnetes Paar: (a, b)

Kartesisches Produkt: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$

Geordnetes k -Tupel: (a_1, a_2, \dots, a_k) , $k \geq 2$

$k = 2$: Paar, $k = 3$: Tripel, $k = 4$: Quadrupel, $k = 5$: Quintupel

Kartesisches Produkt von k Mengen:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}$$

$$A^k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_k \in A\}$$

Speziell gilt: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

Relationen

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ nennt man k -stellige Relation.

$R \subseteq A \times B$ nennt man speziell binäre Relation.

Schreibweise: xRy für $(x, y) \in R$

Bild von $x \in A$: $R(x) = \{y \in B \mid xRy\}$

Urbild von $y \in B$: $R^{-1}(y) = \{x \in A \mid xRy\}$

Verknüpfung binärer Relationen

Sei $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. Dann ist

$$R \circ S = \{(a, c) \mid (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S \text{ für ein } b \in B\}$$

Funktionen

$R \subseteq A \times B$ heißt (partielle) Funktion von A nach B , wenn für jedes $x \in A$ höchstens ein $y \in B$ mit xRy existiert.

Schreibweise: $R : A \rightarrow B$

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

- total, wenn für jedes $x \in A$ ein $y \in B$ mit $f(x) = y$ existiert.
- surjektiv, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.
- injektiv oder umkehrbar eindeutig, wenn für jedes $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.
- bijektiv, wenn f total, surjektiv und injektiv ist.

Mächtigkeit einer Menge

$|A|$: **Mächtigkeit** einer Menge A (Anzahl der Elemente)

Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ existiert.

Eine Menge heißt

- **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig zu \mathbb{N} ist;
- **abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

Beispiel einer abzählbaren Menge

Satz Die Menge \mathbb{N}^2 ist abzählbar unendlich.

Beweisidee: Dovetailing (Schwalbenschwanz)

Ordne die Paare diagonalenweise (d.h. nach aufsteigender Summe).

$$(0, 0) \rightarrow 0; (0, 1) \rightarrow 1; (1, 0) \rightarrow 2; (0, 2) \rightarrow 3; (1, 1) \rightarrow 4; (2, 0) \rightarrow 5; \dots$$

Formal: bijektive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ vermöge

$$f(m, n) = \sum_{i=1}^{m+n} i + n = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + n$$

Beispiel einer überabzählbaren Menge

Satz Die Menge $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar unendlich.

Beweisidee:

- indirekter Beweis
- Diagonalisierung

Angenommen, $2^{\mathbb{N}}$ sei abzählbar unendlich.

Dann gäbe es eine bijektive Funktion $\beta : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$.

Betrachte Menge D mit $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \beta(n)\}$.

Gemäß der Annahme gäbe es dann ein n^* mit $\beta(n^*) = D$.

1. Fall: $n^* \in \beta(n^*)$. Dann folgt $n^* \notin D$, d.h. $n^* \notin \beta(n^*)$; Widerspruch.
2. Fall: $n^* \notin \beta(n^*)$. Dann folgt $n^* \in D$, d.h. $n^* \in \beta(n^*)$; Widerspruch.

Alphabete, Wörter, Sprachen

Alphabet: endliche nichtleere Menge, z.B. $\Sigma = \{a, b, c\}$
Elemente eines Alphabetes nennt man **Buchstaben** bzw. **Symbole**

Wort: endliche Folge von Buchstaben, z.B.: $w = abbcbbba$

$|w|$: Länge des Wortes w , z.B. $|abbcbbba| = 7$

$|w|_x$: Anzahl der Vorkommen des Buchstaben x in w , z.B. $|abbcbbba|_b = 4$

ε : **leeres Wort** (der Länge 0)

Σ^* : Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ (einschließlich ε)

$\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

(Formale) Sprache über Σ : Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$

Konkatenation von Wörtern

Produkt oder **Konkatenation** von Wörtern:

2 Wörter werden hintereinander geschrieben, z.B. *abba* · *ba* = *abbaba*

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) \text{ (Assoziativgesetz)}$$

$$w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w \text{ (\varepsilon ist das neutrale Element)}$$

Potenzen eines Wortes:

$$w^0 = \varepsilon; \quad w^n = w^{n-1} \cdot w \text{ für } n \geq 1$$

Konkatenation von Sprachen

Produkt oder Konkatenation von Sprachen:

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

$$\{abba, ab\} \cdot \{ba, baba\} = \{abbaba, abbababa, abba, abbaba\} = \{abbaba, abbababa, abba, abbaba\}$$

$$(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L \quad (\{\varepsilon\} \text{ ist das neutrale Element})$$

$$L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset \quad (\emptyset \text{ ist das Nullelement})$$

Potenzen einer Sprache:

$$L^0 = \{\varepsilon\}; \quad L^n = L^{n-1} \cdot L \text{ f\"ur } n \geq 1$$

$$\text{Kleene'sche H\"ulle: } L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$