3 Komplexitätstheorie

3.1 Komplexitätsklassen

Im Kapitel 2 haben wir verschiedene Berechenbarkeitsbegriffe für Funktionen definiert und ihre Äquivalenz festgestellt. Leider haben wir auch gelernt, dass es Funktionen gibt, die *nicht* berechenbar sind.

In diesem Kapitel nun beschäftigen wir uns nur mit den *berechenbaren* Funktionen und interessieren uns nun dafür, wie *schwierig* es ist, sie zu berechnen, also welche *Ressourcen* zu ihrer Berechnung benötigt werden. Die wichtigsten Ressourcen sind sicherlich *Rechenzeit und Speicherplatz*. Das findet seinen Niederschlag in der Betrachtung von *Zeit- und Raumkomplexität* von Algorithmen und Problemen.

Bevor wir uns jedoch mit diesen Komplexitäten beschäftigen, möchten wir hier die Landauschen Symbole angeben, um Funktionen vergleichen zu können:

Definition 3.1 *Seien f und g zwei Funktinen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

(i) *Wir sagen $f = O(g)$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ mit einem $c \geq 0$ gilt.*

(ii) *Wir sagen $f = \Theta(g)$ genau dann, wenn $f = O(g)$ und $g = O(f)$ gelten.*

Eine dazu äquivalente Definition, wie man zeigen kann, ist

Definition 3.2 *Seien f und g zwei Funktinen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

(i) *Wir sagen $f = O(g)$ genau dann, wenn es positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, so dass*

$$f(n) \leq c_1 \cdot g(n) + c_2$$

(ii) *Wir sagen $f = \Theta(g)$ genau dann, wenn $f = O(g)$ und $g = O(f)$ gelten.*

Gilt also $f = O(g)$, so wächst f asymptotisch nicht schneller als g; gilt $f = \Theta(g)$, so haben f und g asymptotisch gleiches Wachstum.

Welchen Einfluss die Anzahl der Rechenschritte in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe auf die Laufzeit eines Programms hat, wird in der folgenden Tabelle verdeutlicht. Annahme: ein Programm wird berechnet, wobei die Funktion f die Anzahl der auszuführenden Operationen angibt. In Tabelle 3.1 ist die Zeit für die Ausführung angegeben, falls ein Computer eine Million Operationen pro Sekunde ausführt. (Wenn wir eine andere Geschwindigkeit des Computers annehmen, z.B. 10^9 Operationen je Sekunde, so ändern sich die Tabellenwerte nur um einen konstanten Faktor. Wir merken aber an, daß aus physikalischen Gründen eine Schranke für die Geschwindigkeit existiert.)

$f \setminus n$	5	10	50	100	200
n^2	0,000 025 s	0,0001 s	0,0025 s	0,01 s	0,04 s
n^5	0,003 125 s	0,1 s	312,5 s	3 h	89 h
2^n	0,000 032 s	0,001 024 s	36 a	10^{17} a	10^{47} a
n^n	0,003 125 s	3 h	10^{71} a	10^{185} a	10^{447} a

Tabelle 3.1: Rechenzeiten eines Computers

Definition 3.3 *Es sei M eine Mehrband-Turingmaschine mit dem Eingabealphabet Σ. Dann ist $time_M$ die Funktion $time_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, wobei $time_M(x)$ die Anzahl der Rechenschritte von M bei der Abarbeitung der Eingabe x ist.*

Beispiel 3.4 Ist M die Turingmaschine zur Berechnung der Nachfolgerfunktion aus Beispiel 2.8, so gilt $|x| + 2 \leq time_M(x) \leq 2|x| + 2$ für alle $x \in \{0,1\}^+$.

Definition 3.5 *Es seien $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale Funktionen. Wir sagen, dass φ mit einem Aufwand von f berechnet werden kann, wenn eine Mehrband-Turingmaschine M existiert, die φ berechnet und die $time_M(x) \leq f(|x|)$ für alle $x \in \Sigma^*$ erfüllt.*

Beispiel 3.6 Die Nachfolgerfunktion kann mit einem Aufwand von $f(n) = 2n + 2$ berechnet werden. Dabei ist n die Länge der Binärdarstellung des Eingabewertes x, es gilt also $n \approx \log_2 x$.

Bei der Untersuchung von Komplexitäten wollen wir uns wieder auf Entscheidungsprobleme, d.h. auf charakteristische Funktionen von Mengen, konzentrieren.

Definition 3.7 *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Klasse $TIME(f(n))$ besteht aus allen Mengen, die von einer Mehrband-Turingmaschine M entschieden werden können mit $time_M(x) \leq f(|x|)$ für alle $x \in \Sigma$.*

Definition 3.8 *Ein Polynom ist eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Form*

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{N}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ gilt.

Definition 3.9 *Die Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$ ist wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \{A \mid \text{es gibt eine TM } M \text{ und ein Polynom } p \text{ mit } T(M) = A \text{ und } time_M(x) \leq p(|x|)\} \\ &= \bigcup_{p \text{ Polynom}} TIME(p(n)) \end{aligned}$$

Die Churchsche These kann wie folgt erweitert werden: Ein Problem kann in polynomial beschränkter Zeit genau dann gelöst werden, wenn es in $\mathbb{P}$ liegt. Um zu zeigen, dass eine Menge (Problem) in $\mathbb{P}$ liegt, reicht es zu zeigen dass es eine TM (Algorithmus) gibt, die (der) das Problem in einer Zeitkomplexität $O(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ entscheidet.

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &= O(n), \\ n \log n &= O(n^2), \\ 2^n &\neq O(n^k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ n^{\log n} &\neq O(n^k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ n^n &\neq O(n^k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

In $\mathbb{P}$ liegt zum Beispiel

- das Sortierproblem,
- das Palindromproblem,
- das Problem, ob eine Zahl gerade ist,
- das Problem, ob zwei Zahlen teilerfremd sind,
- das Problem, ob ein gegebener Graph planar ist,
- das Problem, ob ein gegebener Graph einen Eulerkreis enthält,

usw.

3.2 Das Domino-Problem

Wir haben eine endliche Anzahl von Dominostein-Typen gegeben, wobei es von jedem Typ beliebig viele Exemplare gibt. Jeder Dominostein ist in vier Dreiecke aufgeteilt und in jedem dieser Dreiecke steht ein Symbol, das aus einer endlichen Menge Σ kommt. Ein Dominostein hat also die folgende Form:

Außerdem ist ein Rahmen vorgegeben, dessen Rand in Zellen aufgeteilt ist. Jede Zelle ist genau so groß wie ein Dominostein und ist mit einem Symbol versehen.

Die Frage ist, ob dieses Domino-Spiel eine Lösung hat, d.h. ob wir den Rahmen mit den Dominosteinen ausfüllen können, so daß

- für jedes Paar von benachbarten Dominosteinen s und s', die zwei Dreiecke, die die gemeinsame Kante von s und s' enthalten, das gleiche Symbol haben, und
- jedes Dreieck, das den Rand des Rahmens berührt, das gleiche Symbol hat, wie die Zelle des Randes, die berührt wird.

Bei dem Ausfüllen des Rahmens dürfen die Dominosteine nicht gedreht werden.

Bei der Beschäftigung mit dem Domino-Problem fällt uns folgendes auf:

1. Man kann ein gegebenes Problem durch systematisches Probieren lösen. Eine bessere Lösung ist im allgemeinen Fall nicht zu sehen. Es ist auch tatsächlich unbekannt, ob das Domino-Problem in Polynomialzeit gelöst werden kann.
2. Hat man dagegen einen mit Domino-Steinen ausgefüllten Rahmen, so kann man in polynomieller Zeit bezüglich der Rahmengröße entscheiden, ob die Ausfüllung korrekt ist.

Diese beiden Eigenschaften (keine bessere Lösung als systematisches Probieren in Sicht, Verifizierung einer möglichen Lösung in Polynomialzeit) besitzen auch viele andere Probleme. Im folgenden Abschnitt soll diese Klasse von Problemen formal definiert werden.

3.3 Nichtdeterministische Turingmaschinen und die Klasse $\mathbb{NP}$

Definition 3.10 *Eine nichtdeterministische Turingmaschine ist gegeben durch ein 7-Tupel* $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$. *Hierbei sind*

- Z *eine endliche Menge (Zustandsmenge),*
- Σ *ein Alphabet (Eingabealphabet),*
- Γ *ein Alphabet (Bandalphabet) mit* $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- $\delta\colon Z \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma \times \{L,R,N\}}$ *eine Funktion (Überführungsfunktion),*
- $z_0 \in Z$ *(Anfangszustand),*
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ *(Leerzeichen, Blank),*
- $E \subseteq Z$ *(Menge der Endzustände).*

Die NTM unterscheidet sich von der TM lediglich durch die Überführungsfunktion, die für einen gegebenen Zustand und ein gegebenes Bandsymbol mehrere Aktionen erlaubt. Konfigurationen sind für NTM genauso definiert wie für TM. Formal definieren wir die Arbeitsweise einer NTM, d.h. die Nachfolgerelation $\vdash$, wie folgt:

Definition 3.11 *Wir definieren in der Menge der Konfigurationen einer nichtdeterministischen Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ die binäre Relation „$\vdash$“ wie folgt. Es gilt*

$$a_1 \dots a_m z b_1 \dots b_n \vdash \begin{cases} a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n & \text{falls } (z', c, N) \in \delta(z, b_1),\ m \geq 0,\ n \geq 1, \\ a_1 \dots a_m c z' b_2 \dots b_n & \text{falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1),\ m \geq 0,\ n \geq 2, \\ a_1 \dots a_{m-1} z' a_m c b_2 \dots b_n & \text{falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1),\ m \geq 1,\ n \geq 1, \end{cases}$$

$$a_1 \dots a_m z b_1 \vdash a_1 \dots a_m c z \Box \text{ falls } (z', c, R) \in \delta(z, b_1),\ m \geq 0,$$

$$z b_1 \dots b_n \vdash z \Box c b_2 \dots b_n \text{ falls } (z', c, L) \in \delta(z, b_1),\ n \geq 1.$$

Beispiel 3.12 Es sei $\delta(z, a) = \{(z_1, a, R), (z_2, b, L), (z_3, c, N)\}$. Dann gelten für die Konfiguration *aczabb* folgende Nachfolgebeziehungen:

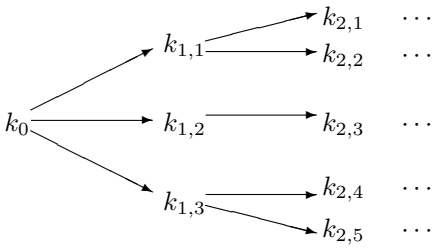
$$aczabb \vdash acaz_1bb, \qquad aczabb \vdash az_2cbbb, \qquad aczabb \vdash acz_3cbb.$$

Die Arbeitsweisen von TM und NTM lassen sich wie folgt veranschaulichen:

- **TM:** Es gibt für jede Eingabe *genau einen* Berechnungspfad:

$$k_0 \vdash k_1 \vdash k_2 \vdash \dots$$

NTM: Es gibt für jede Eingabe einen *Baum* der möglichen Berechnungspfade:



Da es zu einer Eingabe einer NTM in der Regel mehrere mögliche Berechnungen gibt, definieren wir für die NTM keine berechnete Funktion, sondern die *akzeptierte Menge*.

Definition 3.13 *Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine. Die von M* akzeptierte Menge *$T(M)$ ist definiert durch*

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid z_0 x \vdash^* wzy \text{ für } z \in E,\ w, y \in \Gamma^*\}.$$

Eine Eingabe x wird also genau dann von der NTM akzeptiert, wenn *eine der möglichen* Berechnungen zu einem Endzustand führt, d.h. wenn es im zugehörigen Berechnungsbaum eine Endkonfiguration gibt. Die bisher betrachteten (determinstsichen) Turingmaschinen sind ein Spezialfall der nichtdeterministischen Turingmaschinen. Bezüglich der akzeptierten Sprachen sind nichtdeterministische und deterministische Turingmaschinen äquivalent.

Satz 3.14 *Für jede NTM M existiert eine TM M' mit $T(M') = T(M)$.*

Beweis. Die Beweisidee (*Dovetailing*) ist wie folgt:

- Bestimme für wachsendes n alle Konfigurationen, die in n Schritten erreichbar sind.
- Wird eine Endkonfiguration erreicht, so akzeptiere.

Etwas genauer erfolgt die Simulation der NTM M durch eine 2-Band-TM mit folgender Arbeitsweise:

- Band 1 enthält alle nach n Schritten von M erreichbaren Konfigurationen (zuerst also die Startkonfiguartion).

- Ist eine der Konfigurationen auf Band 1 eine Endkonfiguration von M, so akzeptiere.
- Anderenfalls schreibe für jede Konfiguration auf Band 1 alle Nachfolgekonfigurationen auf Band 2. Lösche dabei Band 1.
- Verschiebe den Inhalt von Band 2 nach Band 1. Band 1 enthält nun alle nach $n+1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen. Beginne nun wieder von vorn.

□

Folgerung 3.15 *Eine Menge ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie durch eine NTM akzeptiert wird.*

Beweis. Man kann aus einer TM, die eine Menge A akzeptiert, sehr leicht eine TM konstruieren, die die "halbe" charakteristische Funktion χ'_A berechnet, und umgekehrt. Die Behauptung folgt dann aus der Äquivalenz von TM und NTM. □

Als nächstes sollen nichtdeterministische Komplexitätsklassen definiert werden.

Definition 3.16 *Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine; die Funktion $time_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ ist definiert durch*

$$time_M(x) = \begin{cases} \text{Minimum der Längen aller akzeptierenden Rechnungen von } M \text{ auf } x & \text{falls } x \in T(M), \\ 0 & \text{falls } x \notin T(M). \end{cases}$$

Für eine von M akzeptierte Eingabe x ist $time_M(x)$ also die *kleinste Tiefe* einer Endkonfiguration im zugehörigen Berechnungsbaum.

Definition 3.17 *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion. Die Klasse $NTIME(f(n))$ besteht aus allen Mengen A, die von einer nichtdeterministischen Mehrband-Turingmaschine M akzeptiert werden können mit $time_M(x) \leq f(|x|)$ für alle Eingaben x.*

Definition 3.18 *Die Komplexitätsklasse $\mathbb{NP}$ ist wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} \mathbb{NP} &= \{A \mid \text{es gibt eine NTM } M \text{ und ein Polynom } p \text{ mit } T(M) = A \text{ und } time_M(x) \leq p(|x|)\} \\ &= \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(p(n)) \end{aligned}$$

Abbildung 3.1 gibt einen Überblick über die mengentheoretischen Beziehungen der bisher definierten Klassen. Dabei heißt eine Menge "LOOP-berechenbar", wenn ihre charakteristische Funktion LOOP-berechenbar ist. Es ist bisher unbekannt, ob die Inklusion $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{NP}$ echt ist. Diese als "$\mathbb{P} = \mathbb{NP}$ - Problematik" bekannte Frage ist eines der wichtigsten offenen Probleme der heutigen Mathematik. Alle anderen Inklusionen sind echt.

3.4 $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit

Ob es ein Problem aus $\mathbb{NP}$ gibt, das nicht in Polynomialzeit lösbar ist, weiß man also zur Zeit nicht. Wir wollen in diesem Unterabschnitt die Klasse der $\mathbb{NP}$-vollständigen Probleme kennen lernen. Diese können im folgenden Sinne als die "schwierigsten Probleme" dieser Klasse $\mathbb{NP}$ angesehen werden: Kann ein $\mathbb{NP}$-vollständiges Problem in Polynomialzeit lösen, so kann man alle Probleme aus $\mathbb{NP}$ in Polynomialzeit lösen. Wir werden insbesondere sehen, dass das Domino-Problem $\mathbb{NP}$-vollständig ist.

Definition 3.19 *Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Mengen. Dann heißt A auf B polynomial reduzierbar (in Zeichen $A \leq_p B$) falls es eine totale und in polynomialer Zeit berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$x \in A \implies f(x) \in B.$$

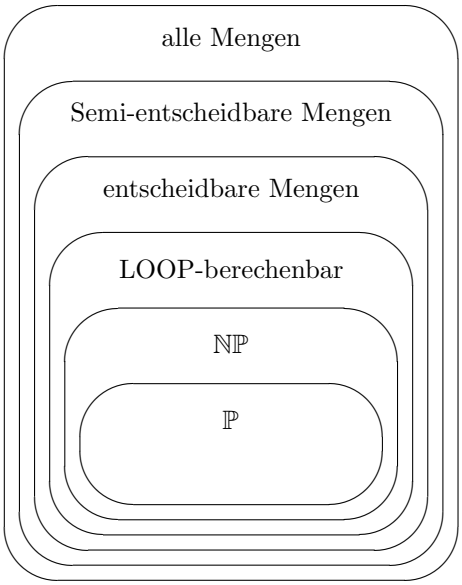


Abbildung 3.1: Komplexitätsklassen

Wir wollen hier nur eine einfachen Reduktion vorführen. Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\mathbf{SOS} := \{(a_1, \ldots, a_m, b) : \quad m, a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{N} \text{ und es gibt } c_1, \ldots, c_m \in \{0,1\}, \text{ so daß } \sum_{i=1}^{m} c_i a_i = b\}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{RS} := \{&(g_1, \ldots, g_m, k_1, \ldots, k_m, G, K) : \\ &m, g_1, \ldots, g_m, k_1, \ldots, k_m, G, K \in \mathbb{N} \\ &\text{und es gibt } c_1, \ldots, c_m \in \{0,1\}, \\ &\text{so daß } \textstyle\sum_{i=1}^{m} c_i g_i \leq G \text{ und } \sum_{i=1}^{m} c_i k_i \geq K\}.\end{aligned}$$

SOS ist als Teilmengensummenproblem (*Sum of Subsets*) bekannt; **RS** steht für *Rucksackproblem*: Wir haben m Päckchen mit Lebensmitteln. Das i-te Päckchen hat Gewicht g_i und enthält k_i Kalorien. Wir wollen entscheiden, ob wir einen Rucksack mit einer Teilmenge der Päckchen packen können, so daß das Gesamtgewicht höchstens G und die Kalorienzahl mindestens K ist.

Satz 3.20 $\mathbf{SOS} \leq_p \mathbf{RS}$.

Beweis. Nach Definition suchen wir eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion f, die Eingaben für **SOS** auf Eingaben für **RS** abbildet, so daß

$$(a_1, \ldots, a_m, b) \in \mathbf{SOS} \iff f(a_1, \ldots, a_m, b) \in \mathbf{RS}.$$

Damit $f(a_1, \ldots, a_m, b)$ eine Eingabe für **RS** ist, muß dieser Funktionswert also die Form

$$f(a_1, \ldots, a_m, b) = (g_1, \ldots, g_m, k_1, \ldots, k_m, G, K)$$

haben. Wir definieren

$$f(a_1, \ldots, a_m, b) := (a_1, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_m, b, b).$$

Es ist klar, daß f in polynomieller Zeit berechenbar ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_m, b) \in \mathbf{SOS} \\
&\iff \text{es gibt } c_1, \ldots, c_m \in \{0,1\} \text{ mit } \textstyle\sum_{i=1}^m c_i a_i = b \\
&\iff \text{es gibt } c_1, \ldots, c_m \in \{0,1\} \text{ mit } \textstyle\sum_{i=1}^m c_i a_i \leq b \text{ und } \sum_{i=1}^m c_i a_i \geq b \\
&\iff (a_1, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_m, b, b) \in \mathbf{RS} \\
&\iff f(a_1, \ldots, a_m, b) \in \mathbf{RS}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.21 (i) *Gilt $A \leq_p B$ und $B \in \mathbb{NP}$, so ist auch $A \in \mathbb{NP}$.*

(ii) *Gilt $A \leq_p B$ und $B \in \mathbb{P}$, so ist auch $A \in \mathbb{P}$.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung; der Beweis der zweiten Behauptung erfolgt analog. Es gelte $A, B \subseteq \Sigma^*$, $A \leq_p B$ und $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei die nach Definition verlangte Funktion mit $x \in A \iff f(x) \in B$. Es sei M_1 eine TM, die f berechnet und $time_{M_1}(x) \leq p(|x|)$ für ein Polynom p und alle $x \in \Sigma^*$ erfüllt. Da $B \in \mathbb{NP}$ gilt, existiert eine NTM M_2, die B akzeptiert und $time_{M_2}(y) \leq q(|y|)$ für ein Polynom q und alle $y \in \Sigma^*$ erfüllt.

Wir konstruieren eine NTM M mit $T(M) = A$, indem auf eine Eingabe x zunächst die TM M_1 angesetzt wird und anschließend die NTM M_2 mit dem Ergebnis $f(x)$ weiter arbeitet. Da M_1 zur Bearbeitung von x höchstens $p(|x|)$ Schritte ausführt, gilt $|f(x)| \leq p(|x|)$, wobei wir o.B.D.A. $p(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen. Wir erhalten $time_M(|x|) \leq p(x) + q(p(x))$, d.h. $time_M$ ist polynomiell beschränkt. □

Definition 3.22 *Eine Menge A heißt $\mathbb{NP}$-vollständig genau dann, wenn*

(i) *$A \in \mathbb{NP}$ und*

(ii) *für alle Mengen $A' \in \mathbb{NP}$ $A' \leq_p A$ gilt.*

(Mengen, die Bedingung 2 erfüllen, werden auch $\mathbb{NP}$-hart *genannt.)*

Dann gilt offensichtlich folgender Satz.

Satz 3.23 *Sei A $\mathbb{NP}$-vollständig, dann gilt*

$$A \in \mathbb{P} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P} = \mathbb{NP}.$$

Wir wollen als nächstes zeigen, dass das Domino-Problem $\mathbb{NP}$-vollständig ist. Dazu müssen wir nach Definition beweisen, dass man jede Menge $A \in \mathbb{NP}$ in Polynomialzeit auf das Domino-Problem reduzieren kann.

Satz 3.24 Domino *ist* **NP**-*vollständig.*

Beweis. Es ist klar, daß **Domino** $\in$ **NP**: Eine Lösung besteht aus einer Auslegung des Rahmens mit Dominosteinen. Die Anzahl der Bits, die wir brauchen um so eine Auslegung darzustellen ist polynomiell in der Länge der Eingabe. Außerdem können wir in Polynomialzeit überprüfen, ob eine vorgegebene Lösung korrekt ist.

Wir müssen also noch beweisen, daß

$$A \leq_p \textbf{Domino} \text{ für alle Mengen } A \in \textbf{NP}.$$

Sei A eine Menge aus **NP**. Dann gibt es ein Polynom p und eine nichtdeterministische Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$, die die Menge A in der Zeit p akzeptiert.

Wir dürfen folgende *technische Voraussetzungen* an M stellen:

- E hat genau einen Zustand, d.h. $E = \{z_1\}$.

- Der Kopf von M steht niemals links von seinem Ausgangsfeld.
- Am Ende einer akzeptierenden Berechnung steht der Kopf auf seinem Ausgangsfeld auf einem leeren Band.
- Es gilt $(z_1, \Box, N) \in \delta(z_1, \Box)$. Gibt es also eine akzeptierende Berechnung für eine Eingabe x, so gibt es auch eine akzeptierende Berechnung mit genau $p(|x|)$ Schritten.

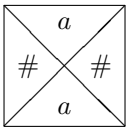
Wir müssen ein Dominospiel definieren, das von der Eingabe x und der Turing-Maschine M abhängt, so daß

$x \in A \Longleftrightarrow$ das Dominospiel ist lösbar.

Die Idee ist, eine akzeptierende Berechnung der Turing-Maschine M als Lösung des Dominospiels zu kodieren. Wir werden dazu einen Rahmen benutzen, wobei jede Zeile einem Berechnungsschritt entspricht. Dieser Rahmen hat also $p(n)$ Zeilen. Weil eine akzeptierende Berechnung immer genau $p(n)$ Schritte macht und weil der Kopf der Turing-Maschine sich niemals links von dem Anfangsfeld befindet, kann dieser Kopf höchstens $p(n)$ Felder besuchen. Deswegen hat unser Rahmen $p(n)$ Spalten.

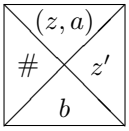
Das Dominospiel hat die folgenden Dominostein-Typen:

1. Für jedes Alphabet-Symbol a der Turing-Maschine M:



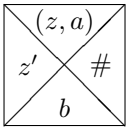
   Bedeutung: Vor und nach dem Befehl steht der Kopf nicht in diesem Feld.

2. Für jeden Befehl $(z, a) \to (z', b, R)$ der Turing-Maschine M:



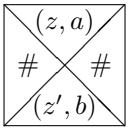
   Bedeutung: Vor dem Befehl steht der Kopf in diesem Feld; er macht einen Schritt nach rechts.

3. Für jeden Befehl $(z, a) \to (z', b, L)$ der Turing-Maschine M:



   Bedeutung: Vor dem Befehl steht der Kopf in diesem Feld; er macht einen Schritt nach links.

4. Für jeden Befehl $(z, a) \to (z', b, N)$ der Turing-Maschine M:



   Bedeutung: Vor und nach dem Befehl steht der Kopf in diesem Feld.

5. Für jeden Zustand z und jedes Alphabet-Symbol a der Turing-Maschine M gibt es zwei Dominostein-Typen:

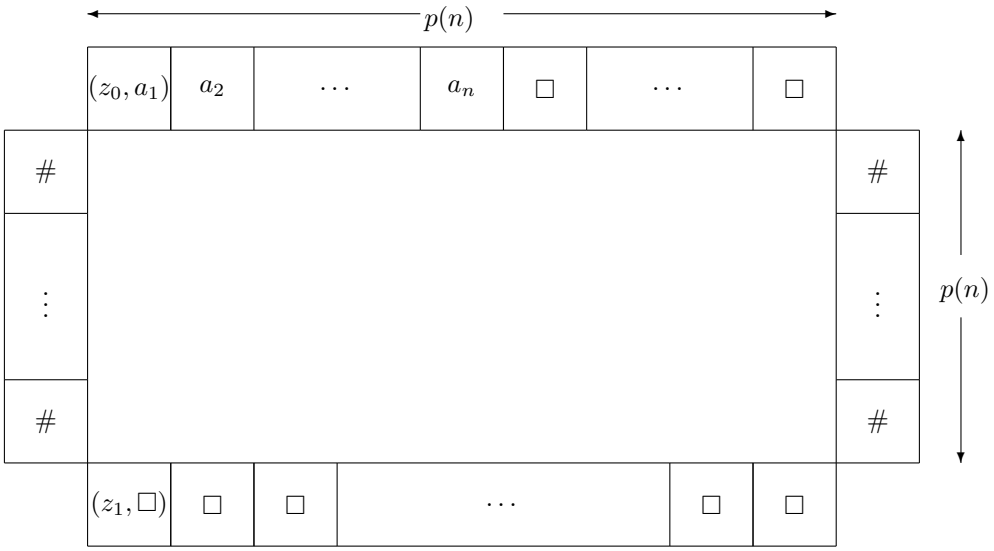
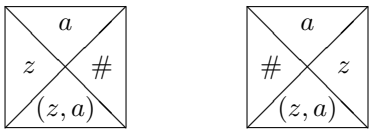


Abbildung 3.2: $p(n) \times p(n)$ *Rahmen des Dominospiels.*



Bedeutung: Der linke Dominostein-Typ gibt an, daß der Kopf von links in dieses Feld kommt; der rechte Dominostein-Typ gibt an, daß der Kopf von rechts in dieses Feld kommt.

Damit liegen die Dominostein-Typen fest. Der $p(n) \times p(n)$ Rahmen des Dominospiels ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der obere Rand dieses Rahmens entspricht dem Anfang der Berechnung, der untere Rand entspricht dem Ende der Berechnung. Der linke und rechte Rand entsprechen Grenzen für den Kopf.

Die Kodierungen dieser Dominostein-Typen und des Rahmens können in Polynomialzeit berechnet werden.

Man kann jetzt zeigen, daß jede akzeptierende Berechnung der Länge $p(n)$ der Turing-Maschine M bei der Eingabe x als Lösung dieses Dominospiels kodiert werden kann. Umgekehrt kann jede Lösung des Dominospiels in eine akzeptierende Berechnung der Länge $p(n)$ der Turing-Maschine M bei der Eingabe x übersetzt werden. Es gilt also:

$$\begin{aligned} x \in A \iff & \text{es gibt mindestens eine akzeptierende Berechnung,} \\ & \text{die } p(n) \text{ Schritte macht} \\ \iff & \text{das Dominospiel ist lösbar.} \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß $A \leq_p$ **Domino**. Also ist die Menge **Domino NP**-vollständig. □

Satz 3.25 *Sei A NP-vollständig, $B \in$ NP und gelte $A \leq_p B$. Dann ist auch B NP-vollständig.*

Der letzte Satz hat große Bedeutung bei der Untersuchung von Problemen. Will man nämlich zeigen, dass ein Problem B NP-vollständig ist, so braucht man nicht auf die Definition zurück zu gehen, sondern es reicht die Reduktion eines NP-vollständigen Problems A. Hat man z.B. gezeigt, dass **SOS** NP-vollständig ist (was in der Tat der Fall ist), so folgt wegen **SOS** $\leq_p$ **RS** die NP-Vollständigkeit des Rucksackproblems.

Ohne Beweis führen wir hier an, dass folgende Mengen (Probleme) NP-vollständig sind (für die genauen Definitionen siehe Literatur).

- **SAT**, das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik:
  Eingabe: Boolesche Formel φ in konjunktiver Normalform
  Frage: Ist die Formel φ erfüllbar?
  Für dieses Problem wird die $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit in den meisten Lehrbüchern direkt gezeigt. Man kann aber auch relativ einfach zeigen, dass **Domino** $\leq_p$ **SAT** gilt.
- **3SAT** (wie **SAT**, jedoch höchstens 3 Literale pro Alternative).
- **Clique**, das Cliquenproblem:
  Eingabe: ungerichteter Graph G, $k \in \mathbb{N}$
  Frage: Enthält G einen vollständigen Teilgraphen mit k Knoten?
- **Set Partition**, das Partitionierungsproblem:
  Eingabe: Menge U, Gewichtsfunktion $g : U \to \mathbb{N}$
  Frage: Gibt es eine Zerlegung $U = V \cup W$, $V \cap W = \emptyset$, so dass $\sum_{v \in V} g(v) = \sum_{w \in W} g(w)$?
- **Bin Packing**:
  Eingabe: m Gegenstände mit Volumen $a_1, a_2, \ldots a_m$, k Behälter mit Volumen jeweils ℓ.
  Frage: Kann man die Gegenstände auf die k Behälter verteilen?
- Hamiltonkreis-Problem:
  Eingabe: gerichteter Graph G
  Frage: Gibt es in G einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal passiert?
- **TSP**, das Rundreiseproblem:
  Eingabe: Schranke $M \in \mathbb{N}$, n Städte, $n \times n$-Kostenmatrix C mit $C_{i,j}$ = Kosten einer Fahrt von Stadt i nach Stadt j
  Frage: Gibt es eine Rundreise durch alle Städte mit Kosten von höchstens M?
- und andere.