Signatur einer prädikatenlogische Sprache

Das Alphabet einer prädikatenlogische Sprache (erster Stufe) besteht aus

– den logischen Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ and $\forall$

– den Klammersymbolen (und) und dem Komma ,

– einer (abzählbar unendlichen) Menge var von Variablen,

– einer (abzählbaren) Menge K von Konstantensymbolen,

– einer (abzählbaren) Menge R_n von n-stelligen Relationssymbolen für jedes $n \geq 1$, und

– einer (abzählbaren) Menge F_n von n-stelligen Funktionssymbolen für jedes $n \geq 1$.

Signatur $\mathcal{S}$ einer prädikatenlogischen Sprache – $(K, R_1, F_1, R_2, F_2, \ldots)$

Terme einer prädikatenlogische Sprache

Definition:
Die Menge $T(\mathcal{S})$ der Terme über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

i) Jede Variable ist ein Term über $\mathcal{S}$ (d.h. $x \in T(\mathcal{S})$ für jede Variable $x \in var$).

ii) Jedes Konstantensymbol $c \in K$ ist ein Term über $\mathcal{S}$ (d.h. $c \in T(\mathcal{S})$ für $c \in K$).

iii) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, d.h. $f \in F_n$, und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme aus $T(\mathcal{S})$, so ist auch $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term über $\mathcal{S}$.

iv) Ein Wort liegt nur dann in $T(\mathcal{S})$, wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

Ausdrücke einer prädikatenlogische Sprache

x kommt im Wort w vollfrei vor, falls x in w vorkommt, aber weder $\forall x$ noch $\exists x$ Teilwörter von w sind.

Definition: Die Menge $A(\mathcal{S})$ der prädikatenlogischen Ausdrücke über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir induktiv durch die folgenden Bedingungen:

i) Ist $r \in R_n$ ein n-stelliges Relationssymbol und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme aus $T(\mathcal{S})$, so ist $r(t_1, \ldots, t_n)$ ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$.

ii) Sind A und B prädikatenlogische Ausdrücke aus $A(\mathcal{S})$, so sind auch $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ und $(A \leftrightarrow B)$ prädikatenlogische Ausdrücke über $\mathcal{S}$.

iii) Ist A ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$ und kommt die Variable x in A vollfrei vor, so sind auch $\forall x A$ und $\exists x A$ prädikatenlogische Ausdrücke über $\mathcal{S}$.

iv) Ein Wort liegt nur dann in $A(\mathcal{S})$, wenn dies aufgrund von endlich oftmaliger Anwendung von i), ii) und iii) der Fall ist.

Basisausdrücke

Definition:

Für einen prädikatenlogischen Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ definieren wir die Menge $B(A)$ der Basisausdrücke von A als die Menge aller Teilwörter $r(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ von A, bei denen r ein Relationssymbol und $t_1, t_2, \ldots t_k$ Terme über $\mathcal{S}$ sind.

Prädikatenlogische Sprache – Beispiel 1

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c\},\ R_2 = \{r\},\ R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$T(\mathcal{S}_1) = \{c\} \cup var$

$r(c,c),\ r(c,x),\ r(x,c)$ und $r(x,y) \in A(\mathcal{S}_1)$, $x, y \in var$,
$((r(x,y) \wedge r(y,z)) \vee r(c,z)) \in A(\mathcal{S}_1)$,
$A = ((r(c,c) \rightarrow r(y,y)) \leftrightarrow (r(c,x)) \in A(\mathcal{S}_1)$,
$\forall z((r(x,y) \wedge r(y,z)) \vee r(c,z)) \in A(\mathcal{S}_1)$,
$\exists x((r(c,c) \rightarrow r(y,y)) \leftrightarrow (r(c,x)) \in A(\mathcal{S}_1)$,
$\forall z((\forall x r(x,y) \wedge \exists y r(y,z)) \vee r(c,z)) \in A(\mathcal{S}_1)$,

$\forall x((\forall x r(x,y) \wedge \exists y r(y,z)) \vee r(c,z)) \notin A(\mathcal{S}_1)$,
$\forall r r(x,x) \notin A(\mathcal{S}_1)$

Prädikatenlogische Sprache – Beispiel 2

$\mathcal{S}_2$ mit $R_2 = \{r\},\ F_1 = \{f\},\ R_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$$T(\mathcal{S}_2) = \{\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\ mal}(x)\ldots)) \mid x \in var,\ n \geq 0\}$$

$$r(\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\ mal}(x)\ldots)), \underbrace{f(f(\ldots f}_{m\ mal}(y)\ldots))) \in A(\mathcal{S}),\ x, y \in var,\ n, m \in \mathbf{N}_0,$$

$B_1 = \forall x r(x, f(x)) \in A(\mathcal{S}_2)$,
$B_2 = \forall x \neg r(x, x) \in A(\mathcal{S}_2)$,
$B_3 = \forall x \forall y \forall z ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \rightarrow r(x, z)) \in A(\mathcal{S}_2)$,

$\forall x f(f(x)) \notin A(\mathcal{S}_2)$

Prädikatenlogische Sprache – Beispiele 3 und 4

$\mathcal{S}_3$ mit
$K = \{e\},\ R_2 = \{g\},\ F_1 = \{g_1\},\ F_2 = \{g_2\},\ R_1 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$x,\ y,\ g_1(x),\ g_2(x,y),\ g_1(g_2(x,y)) \in T(\mathcal{S}_3)$,
$g_2(x, g_1(x)),\ g_2(g_2(g_2(x,e),e),y) \in T(\mathcal{S}_3)$

$C_1 = \forall x(g(x, g_2(x,e)) \wedge g(x, g_2(e,x))) \in A(\mathcal{S}_3)$,
$C_2 = \forall x(g(g_2(x, g_1(x)), e) \wedge g(g_2(g_1(x), x), e)) \in A(\mathcal{S}_3)$,
$C_3 = \forall x \forall y \forall z g(g_2(x, g_2(y,z)), g_2(g_2(x,y), z)) \in A(\mathcal{S}_3)$

$\mathcal{S}_4$ mit $K = \{e\},\ F_1 = \{h\},\ R_1 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 2$

$T(\mathcal{S}_4) = \{\underbrace{h(h(\ldots h}_{n\ mal}(x)\ldots)) \mid n \geq 0, x \in var$ oder $x = e\}$

$A(\mathcal{S}_4) = \emptyset$

Interpretation

Definition:
Sei $\mathcal{S}$ die Signatur einer pädikatenlogischen Sprache. Unter einer Interpretation I von $\mathcal{S}$ verstehen wir ein Paar $I = (U, \tau)$, wobei U eine nichtleere Menge ist und τ eine Abbildung ist, die

- jedem Konstantensymbol $c \in K$ ein Element $\tau(c) \in U$ zuordnet,
- jedem n-stelligen Funktionssymbol $f \in F_n$ eine n-stellige Funktion $\tau(f) : U^n \rightarrow U$ zuordnet, und
- jedem n-stelligen Relationssymbol $r \in R_n$ eine n-stellige Relation $\tau(r) \subseteq U^n$ zuordnet.

Unter einer Belegung α bez. der Interpretation I verstehen wir eine Funktion, die jeder Variablen x ein Element $\alpha(x) \in U$ zuordnet.

Wert eines prädikatenlogischen Terms

$\mathcal{S}$ – Signatur einer prädikatischen Sprache,
$I = (U, \tau)$ – Interpretation von $\mathcal{S}$,
α – Belegung bez. I.

Definition:
Wir definieren den <u>Wert</u> $w_\alpha^I(t) \in U$ für $t \in T(\mathcal{S})$ induktiv durch:

- $w_\alpha^I(x) = \alpha(x)$ für eine Variable x.
- $w_\alpha^I(c) = \tau(c)$ für ein Konstantensymbol c.
- Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und haben für $1 \leq i \leq n$ die Terme t_i die Werte $w_\alpha^I(t_i)$, so gilt

$$w_\alpha^I(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \tau(f)(w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \ldots w_\alpha^I(t_n))\,.$$

Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks

$\mathcal{S}$ – Signatur, $I = (U, \tau)$ – Interpretation von $\mathcal{S}$, α – Belegung bez. I.

Definition: Wir definieren den Wert $w_\alpha^I(A) \in \{0, 1\}$ für $A \in A(\mathcal{S})$ induktiv durch:

- Für $r \in R_n$ und $t_i \in T(\mathcal{S})$, $1 \leq i \leq n$, setzen wir
  $w_\alpha^I(r(t_1, t_2, \ldots t_n)) = 1$ genau dann, wenn
  $(w_\alpha^I(t_1), w_\alpha^I(t_2), \ldots, w_\alpha^I(t_n)) \in \tau(r)$.

- Für $A \in A(\mathcal{S})$ und $B \in A(\mathcal{S})$ setzen wir
  $w_\alpha^I(\neg A) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \wedge B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 1$,
  $w_\alpha^I((A \vee B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \rightarrow B)) = 0$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = 1$ und $w_\alpha^I(B) = 0$,
  $w_\alpha^I((A \leftrightarrow B)) = 1$ genau dann, wenn $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B)$.

Wert eines prädikatenlogischen Ausdrucks – Fortsetzung

- Für $A \in A(\mathcal{S})$ und in A vollfrei vorkommendes x setzen wir
  - $w_\alpha^I(\forall x A) = 1$ genau dann, wenn für jedes $d \in U$ die Beziehung $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$ erfüllt ist,
  - $w_\alpha^I(\exists x A) = 1$ genau dann, wenn es ein $d \in U$ mit $w_{\alpha_{x,d}}^I(A) = 1$ gibt.

Dabei definieren wir für eine Belegung α bez. $I = (U, \tau)$, eine Variable x und ein $d \in U$ die Belegung $\alpha_{x,d}$ bez. I durch

$$\alpha_{x,d}(y) = \begin{cases} d & \text{für } y = x \\ \alpha(y) & \text{für } y \neq x \end{cases} .$$

Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 1

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c\},\ R_2 = \{r\},\ R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$I = (U, \tau)$ mit $U = \mathbf{N},\ \tau(c) = 2$ und $\tau(r) = R_= = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{N}\}$

$A = ((r(c, c) \rightarrow r(y, y)) \leftrightarrow r(c, x))$

α mit $\alpha(x) = 5$ und $\alpha(y) = 4$ $\qquad$ α' mit $\alpha'(x) = 2$ und $\alpha(y) = 4$

Nr.	Ausdruck A	$w^I_\alpha(A)$	$w^I_{\alpha'}(A)$	Begründung
a)	$r(c, c)$	1	1	da $2 = 2$
b)	$r(y, y)$	1	1	da $4 = 4$
c)	$(r(c, c) \rightarrow r(y, y))$	1	1	wegen a) und b)
d)	$r(c, x)$	0	1	da $2 \neq 5$ und $2 = 2$
e)	A	0	1	wegen c) und d)

$w^I_\gamma(\exists x((r(c, c) \rightarrow r(x, x)) \leftrightarrow r(c, x)) = 1$
$w^I_\gamma(\forall x((r(c, c) \rightarrow r(x, x)) \leftrightarrow r(c, x)) = 0$

Beispiel 1 – Fortsetzung – Interpretation 2

$\mathcal{S}_1$ mit $K = \{c\},\ R_2 = \{r\},\ R_1 = F_1 = F_2 = R_i = F_i = \emptyset$ für $i \geq 3$

$J = (U, \tau)$ mit $U = \mathbf{N}\,,\ \tau(c) = 1\,,\ \tau(r) = R_{\leq} = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

$A = ((r(c,c) \rightarrow r(y,y)) \leftrightarrow r(c,x))$

α mit $\alpha(x) = 5$ und $\alpha(y) = 4$ $\qquad$ α' mit $\alpha'(x) = 2$ und $\alpha(y) = 4$

Nr.	Ausdruck A	$w_\alpha^J(A)$	$w_{\alpha'}^J(A)$	Begründung
a')	$r(c,c)$	1	1	da $1 \leq 1$
b')	$r(y,y)$	1	1	da $4 \leq 4$
c')	$(r(c,c) \rightarrow r(y,y))$	1	1	wegen a') und b')
d')	$r(c,x)$	1	1	da $1 \leq 5$ und $1 \leq 2$
e')	A	1	1	wegen c') und d')

$w_\gamma^J(\forall x((r(c,c) \rightarrow r(y,y)) \leftrightarrow r(c,x))) = 1$

$w_\gamma^J(\exists x((r(c,c) \rightarrow r(y,y)) \leftrightarrow r(c,x))) = 1$

Tautologie – Kontradiktion –Erfüllbarkeit

Definition: i) Ein Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar) bez. einer Interpretation I von $\mathcal{S}$, falls für jede Belegung α bez. I die Beziehung $w_\alpha^I(A) = 1$ (bzw. $w_\alpha^I(A) = 0$) gilt. A heißt erfüllbar bez. I, falls es eine Belegung α bez. I mit $w_\alpha^I(A) = 1$ gibt.

ii) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Ausdrücken über $\mathcal{S}$. Eine Interpretation I von $\mathcal{S}$ heißt Modell für $\mathcal{A}$, falls jeder Ausdruck von $\mathcal{A}$ eine Tautologie bez. I ist.

iii) Ein Ausdruck A über der Signatur $\mathcal{S}$ heißt allgemeingültig oder Tautologie (bzw. Kontradiktion oder unerfüllbar), falls A Tautologie (bzw. Kontradiktion) bez. jeder Interpretation von $\mathcal{S}$ ist. Ein Ausdruck A über $\mathcal{S}$ heißt erfüllbar, falls es eine Interpretation I von $\mathcal{S}$ und eine Belegung α bez. I mit $w_\alpha^I(A) = 1$ gibt.

Semantische Äquivalenz 1

Definition: Zwei prädikatenlogische Ausdrücke A und B über der Signatur $\mathcal{S}$ heißen semantisch äquivalent, falls für jede Interpretation I von $\mathcal{S}$ und jede Belegung α bez. I die Beziehung $w_\alpha^I(A) = w_\alpha^I(B)$ gilt.

Folgerung: Zwei prädikatenlogische Ausdrücke A und B über der Signatur $\mathcal{S}$ sind genau dann semantisch äquivalent, wenn $(A \leftrightarrow B)$ eine Tautologie ist.

Lemma: Es seien A und B aussagenlogische Ausdrücke mit $var(A) \cup var(B) \subseteq \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$. Ferner seien $C_1, C_2, \ldots C_n$ prädikatenlogische Ausdrücke über einer Signatur $\mathcal{S}$ und A' und B' die prädikatenlogische Ausdrücke, die aus A und B entstehen, indem man für $1 \leq i \leq n$ jedes Vorkommen von p_i durch C_i ersetzt. Dann gelten folgende Aussagen.

i) Ist A eine Tautologie, so ist auch A' eine Tautologie.

ii) Aus $A \equiv B$ folgt $A' \equiv B'$.

Semantische Äquivalenz 2

Lemma: Sind A und B beliebige prädikatenlogische Ausdrücke, so gelten die folgenden semantischen Äquivalenzen:

i) $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$,

ii) $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$,

iii) $(\forall xA \wedge \forall xB) \equiv \forall x(A \wedge B)$,

iv) $(\exists xA \vee \exists xB) \equiv \exists x(A \vee B)$,

v) $\forall x\forall yA \equiv \forall y\forall xA$,

vi) $\exists x\exists yA \equiv \exists y\exists xA$.

Kommt überdies x in B nicht vor, so gelten noch

vii) $(\forall xA \wedge B) \equiv \forall x(A \wedge B)$,

viii) $(\forall xA \vee B) \equiv \forall x(A \vee B)$,

ix) $(\exists xA \wedge B) \equiv \exists x(A \wedge B)$,

x) $(\exists xA \vee B) \equiv \exists x(A \vee B)$.

Substitutionen

Seien s ein Term über $\mathcal{S}$, A ein prädikatenlogischer Ausdruck über $\mathcal{S}$, x eine Variable und t ein Term über $\mathcal{S}$, der x nicht enthält.

$sub(s,x,t)$ und $sub(A,x,t)$ entstehen aus s bzw. A, indem jedes freie Vorkommen von x in s bzw. A durch t ersetzt wird

α sei eine Belegung bez. einer Interpretation I von $\mathcal{S}$

$$\alpha_{x,t}(y) = \begin{cases} \alpha(y) & y \neq x \\ w_\alpha^I(t) & y = x \end{cases}$$

Lemma: i) $w_\alpha^I(sub(s,x,t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(s)$

ii) $w_\alpha^I(sub(A,x,t)) = w_{\alpha_{x,t}}^I(A)$.

Lemma: Sei $A = QxB$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$ ein prädikatenlogischer Ausdruck über einer Signatur $\mathcal{S}$. Ferner sei y eine Variable, die in A nicht vorkommt. Dann gilt

$$Qx\ B \equiv Qy\ sub(B,x,y)\,.$$

Pränexe Normalform

Definition:
Wir sagen, dass ein prädikatenlogischer Ausdruck A in pränexe Normalform ist, wenn folgende Bedingungen gelten:

– $A = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_nA'$ für ein $n \geq 0$,

– $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ für $1 \leq i \leq n$,

– für $1 \leq i \leq n$ ist x_i eine Variable und

– in A' kommen $\forall$ und $\exists$ nicht vor.

Satz:
Zu jedem prädikatenlogischen Ausdruck A gibt es einen zu A semantisch äquivalenten prädikatenlogischen Ausdruck B in pränexer Normalform.

Pränexe Normalform – Beispiel

$((\neg\exists x R(x,y) \vee \forall x Q(f(x))) \wedge \forall y \neg P(x,g(y)))$

a) $R(x,y)$, $Q(f(x))$ und $\neg P(x,g(y))$ sind pränexe Normalformen.

b) $\neg\exists x R(x,y)$ hat pränexe Normalform $\forall x \neg R(x,y)$
$\forall x Q(f(x))$ pränexe Normalform
$\forall y \neg P(x,f(y))$ pränexe Normalformen

c)
$$\begin{aligned}(\neg\exists x R(x,y) \vee \forall x Q(f(x)) \quad &\equiv (\forall x \neg R(x,y) \vee \forall x Q(f(x)))\\ &\equiv (\forall w \neg R(w,y) \vee \forall v Q(f(v)))\\ &\equiv \forall w(\neg R(w,y) \vee \forall v Q(f(v)))\\ &\equiv \forall w \forall v(\neg R(w,y) \vee Q(f(v)))\end{aligned}$$

Pränexe Normalform – Beispiel – Fortsetzung

d) $((\neg\exists x R(x,y) \vee \forall x Q(f(x))) \wedge \forall y \neg P(x,g(y)))$

$$\equiv (\forall w \forall v(\neg R(w,y) \vee Q(f(v))) \wedge \forall y \neg P(x,g(y)))$$
$$\equiv (\forall w \forall v(\neg R(w,y) \vee Q(f(v))) \wedge \forall z \neg P(x,g(z)))$$
$$\equiv \forall w(\forall v(\neg R(w,y) \vee Q(f(v))) \wedge \forall z \neg P(x,g(z)))$$
$$\equiv \forall w \forall v((\neg R(w,y) \vee Q(f(v))) \wedge \forall z \neg P(x,g(z)))$$
$$\equiv \forall w \forall v \forall z((\neg R(w,y) \vee Q(f(v))) \wedge \neg P(x,g(z)))$$

Pränexe Normalform 2

$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nA'$ – pränexe Normalform

A' entsteht aus Basisausdrücken mittels Anwendung der aussagenlogischen Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

A' entsteht aus einem aussagenlogischen Ausdruck B, indem jedes Vorkommen einer Variablen in B durch einen Basisausdruck $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ ersetzt wird.

K_B – konjunktive Normalform zu B und $K_{A'}$ – analog gebildeter Ausdruck

$K_{A'} = (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_r)$,
$D_i = (D_{i,1} \vee D_{i,2} \vee \ldots \vee D_{i,s_i})$ für $1 \leq i \leq r$,
$D_{i,j} = R(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \ldots, t_{i,j,k_{i,j}})$ oder $D_{i,j} = \neg R(t_{i,j,1}, t_{i,j,2}, \ldots, t_{i,j,k_{i,j}})$
für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s_i$ und gewisse r, s_i, $k_{i,j}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s_i$.

$K_{A'}$ – "konjunktive" Normalform von A'.

Prädikatenlogische Entscheidbarkeitsprobleme

Erfüllbarkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A erfüllbar ?

Gültigkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A allgemeingültig ?

Unerfüllbarkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A unerfüllbar ?

Algorithmus und Entscheidbarkeit

Ein *Algorithmus* überführt in endlicher Zeit die Eingabedaten in eine Antwort "ja" oder "nein" und besteht aus einer Folge von Anweisungen mit folgenden Eigenschaften:

- es gibt eine eindeutig festgelegte Anweisung, die als erste auszuführen ist,
- nach Abarbeitung einer Anweisung gibt es eine eindeutig festgelegte Anweisung, die als nächste abzuarbeiten ist, oder die Abarbeitung des Algorithmus ist beendet.

Ein Problem heißt *entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus zu seiner Lösung gibt, d.h. einen Algorithmus, der auf die Frage die korrekte Antwort "ja" oder "nein" gibt. Falls kein Algorithmus zur Lösung existiert, heißt das Problem *unentscheidbar*.

Unentscheidbarkeit in der Prädikatenlogik

Satz:
Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A eine Tautologie ist.

Satz:
Das Unerfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A unerfüllbar ist.

Satz:
Das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A erfüllbar ist.