

# Theoretische Informatik

für das

berufsbegleitende Studium Lehramt Informatik  
(Berufsschule)

<http://theo.cs.uni-magdeburg.de/lehre04w/>

**Lehrbeauftragter:** Dr. Ralf Stiebe

**Email:** stiebe@iws.cs.uni-magdeburg.de

**Telefon:** 0391-67-12457

# Inhalt der Vorlesung

- Berechenbarkeit
  - **Formale** Definition des Begriffes **Algorithmus**
  - Nachweis, dass verschiedene Probleme algorithmisch nicht lösbar sind
- Komplexität
  - Schwierigkeit algorithmisch lösbarer Probleme (**Zeitbedarf**, Platzbedarf)
- Formale Sprachen
  - enge Beziehung zur Berechenbarkeitstheorie
  - Anwendungen in Compilerbau, Textverarbeitung

# Literatur

- Uwe Schöning: [Theoretische Informatik – kurzgefasst](#).  
Die Vorlesung orientiert sich stark an diesem Buch.
- Hopcroft, Motwani, Ullman: [Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie](#).  
Sehr ausführliches Standardwerk
- Script

# Mathematische Grundlagen

## Script, Kapitel 1

- Mengen, Relationen, Funktionen
- Alphabete, Wörter, Sprachen

# Mengen, Relationen, Funktionen

Menge: Zusammenfassung von Elementen.

$$M = \{2, 4, 6, 8\}, 4 \in M, 3 \notin M$$

Reihenfolge der Elemente beliebig, Mehrfachnennungen zählen nicht:

$$\{4, 6, 8, 2, 8, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

Beschreibung einer Menge durch definierende Eigenschaft:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$$

# Wichtige spezielle Mengen

- $\emptyset$ : leere Menge (enthält keine Elemente)
- $\mathbb{N}$ : Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
- $\mathbb{Z}$ : Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{R}$ : Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ : Menge der rationalen Zahlen

# Teilmengen

$A$  heißt **Teilmenge** von  $B$ , wenn alle Elemente von  $A$  in  $B$  sind.

Bezeichnung:  $A \subseteq B$ .

$A$  heißt **echte Teilmenge** von  $B$ , wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ .

Bezeichnung:  $A \subsetneq B$ .

**Potenzmenge** von  $A$ : Menge aller Teilmengen von  $A$

Bezeichnung:  $\mathcal{P}(A)$  bzw.  $2^A$

Beispiel:  $A = \{0, 1, 4\}$ ,  $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{4\}, \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{1, 4\}, \{0, 1, 4\}\}$

# Mengenoperationen

$A$  und  $B$  seien Teilmengen einer Grundmenge  $G$

**Vereinigung:**  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

**Durchschnitt:**  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

**Differenz:**  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

**Komplement:** (bez.  $G$ ):  $\overline{A} = \{x \mid x \in G \text{ und } x \notin A\}$

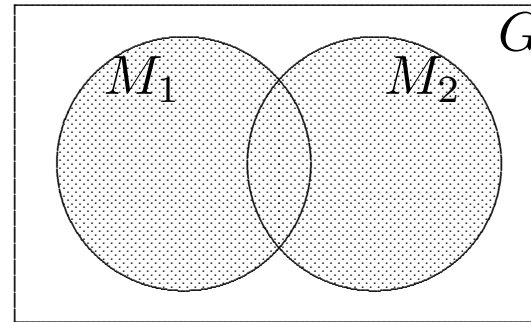
Beispiel:  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$   
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ ,  $A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $A \setminus B = \{0, 1, 3\}$ ,  
 $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$



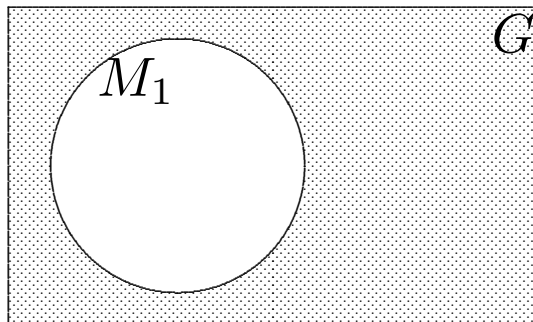
# Mengenoperationen: Venn Diagramme



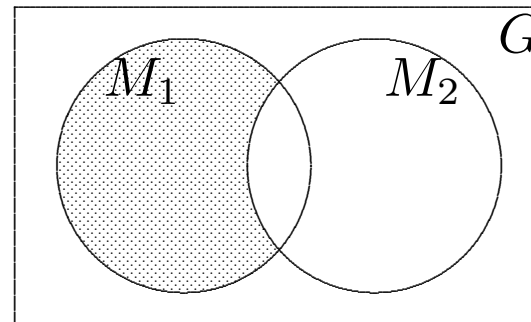
$$M_1 \cap M_2$$



$$M_1 \cup M_2$$



$$\overline{M_1}$$



$$M_1 \setminus M_2$$

# Tupel und Kartesische Produkte

Geordnetes Paar:  $(a, b)$

Kartesisches Produkt:  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$

Geordnetes  $k$ -Tupel:  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $k \geq 2$

$k = 2$ : Paar,  $k = 3$ : Tripel,  $k = 4$ : Quadrupel,  $k = 5$ : Quintupel

Kartesisches Produkt von  $k$  Mengen:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}$$

$$A^k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_k \in A\}$$

Speziell gilt:  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

# Relationen

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  nennt man  $k$ -stellige Relation.

$R \subseteq A \times B$  nennt man speziell binäre Relation.

Schreibweise:  $xRy$  für  $(x, y) \in R$

Bild von  $x \in A$ :  $R(x) = \{y \in B \mid xRy\}$

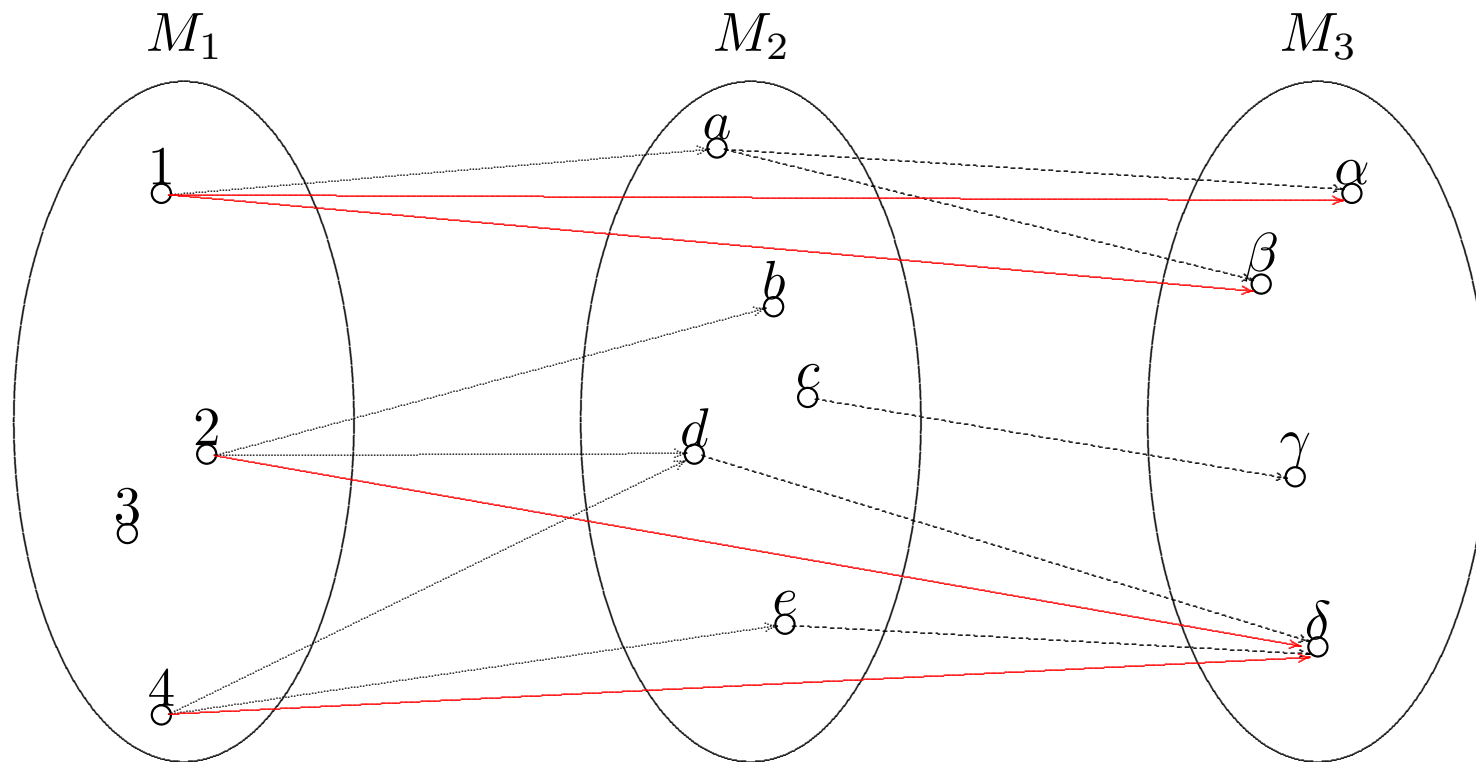
Urbild von  $y \in B$ :  $R^{-1}(y) = \{x \in A \mid xRy\}$

Verknüpfung oder Verkettung binärer Relationen

Sei  $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ . Dann ist

$$R \circ S = \{(a, c) \mid (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S \text{ für ein } b \in B\}$$

# Verkettung von Relationen: Graphische Darstellung



# Funktionen

$R \subseteq A \times B$  heißt (partielle) Funktion von  $A$  nach  $B$ , wenn für jedes  $x \in A$  höchstens ein  $y \in B$  mit  $xRy$  existiert.

Schreibweise:  $R : A \rightarrow B$

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt

- total, wenn für jedes  $x \in A$  ein  $y \in B$  mit  $f(x) = y$  existiert.
- surjektiv, wenn für jedes  $y \in B$  ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  existiert.
- injektiv oder umkehrbar eindeutig, wenn für jedes  $y \in B$  höchstens ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  existiert.
- bijektiv, wenn  $f$  total, surjektiv und injektiv ist.

# Mächtigkeit einer Menge

$|A|$ : **Mächtigkeit** einer Menge  $A$  (Anzahl der Elemente)

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **gleichmächtig**, wenn eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  existiert.

Eine Menge heißt

- **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist;
- **abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
- **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.

# Beispiel einer abzählbaren Menge

**Satz** Die Menge  $\mathbb{N}^2$  ist abzählbar unendlich.

**Beweisidee:** Dovetailing (Schwalbenschwanz)

Ordne die Paare diagonalenweise (d.h. nach aufsteigender Summe).

$$(0, 0) \rightarrow 0; (0, 1) \rightarrow 1; (1, 0) \rightarrow 2; (0, 2) \rightarrow 3; (1, 1) \rightarrow 4; (2, 0) \rightarrow 5; \dots$$

Formal: bijektive Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  vermöge

$$f(m, n) = \sum_{i=1}^{m+n} i + n = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + n$$

# Beispiel einer überabzählbaren Menge

**Satz** Die Menge  $2^{\mathbb{N}}$  ist überabzählbar unendlich.

**Beweisidee:**

- indirekter Beweis
- Diagonalisierung

Angenommen,  $2^{\mathbb{N}}$  sei abzählbar unendlich.

Dann gäbe es eine bijektive Funktion  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ .

Betrachte Menge  $D$  mit  $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \beta(n)\}$ .

Gemäß der Annahme gäbe es dann ein  $n^*$  mit  $\beta(n^*) = D$ .

1. Fall:  $n^* \in \beta(n^*)$ . Dann folgt  $n^* \notin D$ , d.h.  $n^* \notin \beta(n^*)$ ; Widerspruch.
2. Fall:  $n^* \notin \beta(n^*)$ . Dann folgt  $n^* \in D$ , d.h.  $n^* \in \beta(n^*)$ ; Widerspruch.



# Alphabete, Wörter, Sprachen

**Alphabet:** endliche nichtleere Menge, z.B.  $\Sigma = \{a, b, c\}$   
Elemente eines Alphabetes nennt man **Buchstaben** bzw. **Symbole**

**Wort:** endliche Folge von Buchstaben, z.B.:  $w = abbcbbba$

$|w|$ : Länge des Wortes  $w$ , z.B.  $|abbcbbba| = 7$

$|w|_x$ : Anzahl der Vorkommen des Buchstaben  $x$  in  $w$ , z.B.  $|abbcbbba|_b = 4$

$\varepsilon$ : **leeres Wort** (der Länge 0)

$\Sigma^*$ : Menge aller Wörter über dem Alphabet  $\Sigma$  (einschließlich  $\varepsilon$ )

$\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

**(Formale) Sprache** über  $\Sigma$ : Teilmenge  $L \subseteq \Sigma^*$

# Konkatenation von Wörtern

Produkt oder **Konkatenation** von Wörtern:

2 Wörter werden hintereinander geschrieben, z.B. *abba* · *ba* = *abbaba*

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) \text{ (Assoziativgesetz)}$$

$$w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w \text{ (\varepsilon ist das neutrale Element)}$$

**Potenzen** eines Wortes:

$$w^0 = \varepsilon; \quad w^n = w^{n-1} \cdot w \text{ für } n \geq 1$$

# Konkatenation von Sprachen

Produkt oder Konkatenation von Sprachen:

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

$$\begin{aligned} \{abba, ab\} \cdot \{ba, baba\} &= \{abbaba, abbababa, abba, abbaba\} \\ &= \{abbaba, abbababa, abba\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 &= L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ L \cdot \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon\} \cdot L = L && (\{\varepsilon\} \text{ ist das neutrale Element}) \\ L \cdot \emptyset &= \emptyset \cdot L = \emptyset && (\emptyset \text{ ist das Nullelement}) \end{aligned}$$

Potenzen einer Sprache:

$$L^0 = \{\varepsilon\}; \quad L^n = L^{n-1} \cdot L \text{ f\u00fcr } n \geq 1$$

$$\text{Kleene'sche H\u00fclle: } L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$