Komplexitätstheorie

Script Kapitel 3

Fragestellung: Welcher Aufwand (Laufzeit, Speicherplatz) ist notwendig, um ein entscheidbares Problem zu lösen?

- formale Definition von Komplexitätsklassen mittels Turingmaschinen
- nichtdeterministische Turingmaschinen und die Klasse $\mathbb{NP}$
- einige beweisbar “schwierige” Probleme ($\mathbb{NP}$-Vollständigkeit)

Vergleich von Funktionen

Definition Sei g eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $O(g)$ die Klasse der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) \leq c_1 \cdot g(n) + c_2$$

für gewisse $c_1 \geq 0$ und $c_2 \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Schreibweise: $f = O(g)$ anstelle von $f \in O(g)$.
$f = \Theta(g)$, falls $f = O(g)$ und $g = O(f)$.

Beispiel Seien f_1, f_2, f_3 die Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ vermöge

$$f_1(n) = n^2,\ f_2(n) = 999n^2 + 100n + 2^{1000}, f_3(n) = 2^n.$$

Dann gelten $f_1 = \Theta(f_2)$, $f_1 = O(f_3)$, $f_2 = O(f_3)$
sowie $f_3 \neq O(f_1)$, $f_3 \neq O(f_2)$.

Verschiedene Funktionen

Annahme: ein Programm wird berechnet, wobei die Funktion f die Anzahl der auszuführenden Operationen in Abhängigkeit von der Eingabelänge angibt. In der Tabelle ist die Zeit für die Ausführung angegeben, falls ein Computer eine Million Operationen pro Sekunde ausführt.

$f \setminus n$	5	10	50	100	200
n^2	0,000 025 s	0,0001 s	0,0025 s	0,01 s	0,04 s
n^5	0,003 125 s	0,1 s	312,5 s	3 h	89 h
2^n	0,000 032 s	0,001 024 s	36 a	10^{17} a	10^{47} a
n^n	0,003 125 s	3 h	10^{71} a	10^{185} a	10^{447} a

Definition Zeitkomplexität

Definition

Für eine Turingmaschine M mit dem Eingabealphabet Σ ist die Zeitkomplexität $time_M$ die Funktion $time_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, wobei $time_M(x)$ die Anzahl der Rechenschritte von M bei der Abarbeitung der Eingabe x ist.

Bemerkung: Hält M nicht für die Eingabe x, so ist $time_M(x)$ nicht definiert.

Die Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$

Definition Ein Polynom ist eine Funktion $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Form

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{N}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ gilt.

Definition Die Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{P} = \{A \mid \text{es gibt eine TM } M\text{, die } A \text{ entscheidet,} \\ \text{und ein Polynom } p \text{ mit } time_M(x) \leq p(|x|) \text{ für alle } x\}$$

Bemerkungen zur Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$

Um zu zeigen, dass ein Problem in $\mathbb{P}$ liegt, reicht es zu zeigen dass es einen Algorithmus gibt, der das Problem in einer Zeitkomplexität $O(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ entscheidet.

$\sqrt{n} = O(n)$

$n \log n = O(n^2)$

$2^n \neq O(n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$n^{\log n} \neq O(n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$n^n \neq O(n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiele zu $\mathbb{P}$

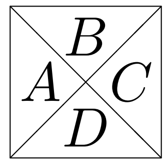
Palindromproblem, d.h. die Menge $PAL = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$, wobei w^R das Wort w von rechts nach links gelesen ist.

Eulergraph-Problem
gegeben: ein ungerichteter Graph G
Frage: Gibt es einen in G einen Kreis, der jede Kante genau einmal enthält?

Teilerfremdheitsproblem
gegeben: natürliche Zahlen m, n
Frage: Sind m und n teilerfremd, d.h. gilt $ggT(m, n) = 1$?
Beachte: Hier braucht man einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit bezüglich $|bin(m)| + |bin(n)|$, d.h. bezüglich $\log m + \log n$.

Das Domino-Problem

- Ein Dominostein ist in 4 Dreiecke aufgeteilt, die jeweils ein Symbol aus einem Alphabet Σ enthalten.



- Ein Dominospiel besteht aus endlich vielen Sorten von Dominosteinen, wobei von jeder Sorte beliebig viele Steine vorhanden sind.
- Zwei Steine dürfen benachbart sein, wenn ihre Grenzen übereinstimmen.
- Die Steine dürfen nicht gedreht werden.

- Ein rechteckiger Rahmen für ein Dominospiel besteht aus Steinen mit einem Symbol aus Σ, z.B.:

A	B	B	A	B	B	C	A	B	B
C									A
C									C
A									A
C									C
A	B	B	A	B	B	C	A	B	A

Domino-Problem
gegeben: Domino-Spiel Π, Rahmen R
Frage: Kann man den Rahmen R mit Steinen aus Π auslegen?

Bemerkungen zum Domino-Problem

- Ein gegebenes Domino-Problem (Π, R) kann man durch systematisches Probieren lösen. Eine bessere Lösung ist im allgemeinen Fall nicht zu sehen.
- Für ein zweidimensionales Bild über Π kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob es eine Lösung des Domino-Problems ist.
- Nichtdeterministischer Algorithmus A mit polynomieller Laufzeit:
  1. Rate ein Bild B über Π.
  2. Entscheide, ob B eine Lösung für (Π, R) ist.
- Gibt es eine Lösung, so gibt es einen Lauf von A mit Ausgabe "JA". Anderenfalls liefert A immer die Ausgabe "NEIN".
- Formalisierung nichtdeterministischer Algorithmen durch nichtdeterministische Turingmaschinen.

Nichtdeterministiche Turingmaschinen

Eine nichtdeterministische Turingmaschine (NTM) ist gegeben durch ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$. Hierbei sind

- Z eine endliche Menge (Zustandsmenge),
- Σ ein Alphabet (Eingabealphabet),
- Γ ein Alphabet (Bandalphabet) mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- $\delta\colon (Z \setminus E) \times \Gamma \to 2^{Z \times \Gamma \times \{L,R,N\}}$ eine Funktion (Überführungsfunktion),
- $z_0 \in Z$ (Anfangszustand),
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ (Leerzeichen, Blank),
- $E \subseteq Z$ (Menge der Endzustände).

Konfigurationen von NTM

- Konfigurationen sind formal definiert wie bei TM.
- Nachfolgerelation $\vdash$ ist ähnlich definiert wie bei TM, aber:
  Eine Konfiguration kann mehrere Nachfolgekonfigurationen haben.

Beispiel: Es sei $\delta(z, a) = \{(z_1, a, R), (z_2, b, L), (z_3, c, N)\}$.
Dann gelten für die Konfiguration $aczabb$ folgende Nachfolgerelationen:

$$aczabb \vdash acaz_1bb, \qquad aczabb \vdash azcbbb, \qquad aczabb \vdash acz_3cbb.$$

Akzeptierte Mengen von NTM

Definition Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine. Die von M akzeptierte Menge $T(M)$ ist definiert durch

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid z_0 x \vdash^* wzy \text{ für } z \in E,\ w, y \in \Gamma^*\}.$$

$T(M)$ ist also die Menge aller Eingaben, für die M bei geschickter Wahl der Nachfolgekonfigurationen stoppt.

Beispiel einer NTM

$M = (\{z_0, z_1, z_2, q\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{q\})$
mit Überführungsfunktion δ:

	z_0	z_1	z_2
a	$\{(z_0, a, R), (z_1, a, R)\}$	$\{(z_2, a, R)\}$	$\emptyset$
b	$\{(z_0, b, R)\}$	$\emptyset$	$\{(q, b, N)\}$
$\Box$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$T(M) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält das Teilwort $aab\}$

Graphische Interpretation von TM und NTM

TM: Es gibt für jede Eingabe genau einen Berechnungspfad:

$$k_0 \vdash k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots$$

NTM: Berechnungspfade verzweigen sich (Baum)

$$\begin{tikzcd}
 & & k_{2,1} & \cdots \\
 & k_{1,1} \arrow[ur] \arrow[r] & k_{2,2} & \cdots \\
k_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & k_{1,2} \arrow[r] & k_{2,3} & \cdots \\
 & & k_{2,4} & \cdots \\
 & k_{1,3} \arrow[ur] \arrow[r] & k_{2,5} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Akzeptiert wird, falls eine Endkonfiguration erreichbar ist.

Äquivalenz von TM und NTM

Satz

$\boxed{\text{Für jede NTM } M \text{ existiert eine TM } M' \text{ mit } T(M') = T(M)}$

Beweisidee (Dovetailing)

- Bestimme für wachsendes n alle Konfigurationen, die in n Schritten erreichbar sind.
- Wird eine Endkonfiguration erreicht, so stoppe.

Äquivalenz von TM und NTM – Fortsetzung

Simulation von M durch folgende 2-Band-TM:

- Band 1 enthält alle nach n Schritten von M erreichbaren Konfigurationen (zuerst also die Startkonfiguartion).
- Ist eine der Konfigurationen auf Band 1 eine Endkonfiguration von M, so stoppe.
- Anderenfalls schreibe für jede Konfiguration auf Band 1 alle Nachfolgekonfigurationen auf Band 2. Lösche dabei Band 1.
- Verschiebe den Inhalt von Band 2 nach Band 1.
  Band 1 enthält nun alle nach $n + 1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen.

Komplexität nichtdeterministischer Turingmaschinen

Definition Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine; $time_M(x)$ ist definiert durch

$$time_M(x) = \begin{cases} \text{Minimum der Längen aller akzeptierenden Rechnungen von } M \text{ auf } x & \text{falls } x \in T(M), \\ 0 & \text{falls } x \notin T(M). \end{cases}$$

Die Komplexitätsklasse $\mathbb{NP}$ und die $\mathbb{P}$-$\mathbb{NP}$-Problematik

Definition Die Komplexitätsklasse $\mathbb{NP}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{NP} = \{A \mid \text{es gibt eine NTM } M \text{ und ein Polynom } p \text{ mit } T(M) = A \\ \text{und } time_M(x) \leq p(|x|) \text{ für alle } x\}$$

$\mathbb{P}$-$\mathbb{NP}$-Problematik: $\boxed{\text{Gilt } \mathbb{P} = \mathbb{NP}?}$

Polynomiale Reduzierbarkeit

Definition Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Mengen. Dann heißt A auf B polynomial reduzierbar (in Zeichen $A \leq_p B$) falls es eine totale und mit polynomialer Komplexität berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Lemma

(i) Gilt $A \leq_p B$ und $B \in \mathbb{NP}$, so ist auch $A \in \mathbb{NP}$.

(ii) Gilt $A \leq_p B$ und $B \in \mathbb{P}$, so ist auch $A \in \mathbb{P}$.

$\mathbb{NP}$-vollständige Mengen (Probleme)

Wir wollen jetzt die im gewissen Sinne "schwierigsten Probleme" aus $\mathbb{NP}$ charakterisieren und führen dazu folgenden Begriff ein.

Definition Eine Menge A heißt $\mathbb{NP}$-vollständig genau dann, wenn

(i) $A \in \mathbb{NP}$ und

(ii) für alle Mengen $A' \in \mathbb{NP}$ $A' \leq_p A$ gilt.

Folgerungen

Es gelten offensichtlich folgende Sätze.

Satz

Sei A $\mathbb{NP}$-vollständig und $B \in \mathbb{NP}$.
Dann folgt aus $A \leq_p B$ die $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit von B.

Satz

Sei A $\mathbb{NP}$-vollständig; dann gilt $A \in \mathbb{P} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{P} = \mathbb{NP}$.

$\mathbb{NP}$-Vollständigkeit des Domino-Problems

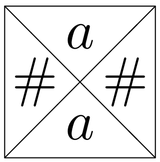
Satz: Das Domino-Problem ist $\mathbb{NP}$-vollständig.

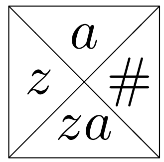
Beweisidee:

- Das Domino-Problem ist offensichtlich in $\mathbb{NP}$.
- Zu einer beliebigen NTM M konstruiere Dominospiel Π.
- Jede Eingabe w wird in polynomialer Zeit auf einen Rahmen R_w abgebildet.
- Eine korrekte Ausfüllung von R_w entspricht einem akzeptierenden Lauf von M bei Eingabe w.
  Also: $w \in T(M)$ genau dann, wenn (Π, R_w) eine Lösung hat.

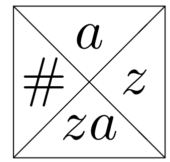
Domino-Problem: Konstruktion des Dominospiels

NTM sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$.
Π enthält folgende Steine, wobei $a, b \in \Gamma$, $y, z \in Z$, $\# \notin \Gamma \cup Z$:

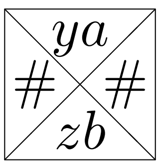




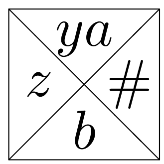
“Kopf von links”



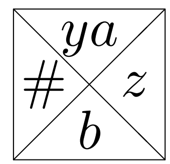
“Kopf von rechts”



$(z, b, N) \in \delta(y, a)$



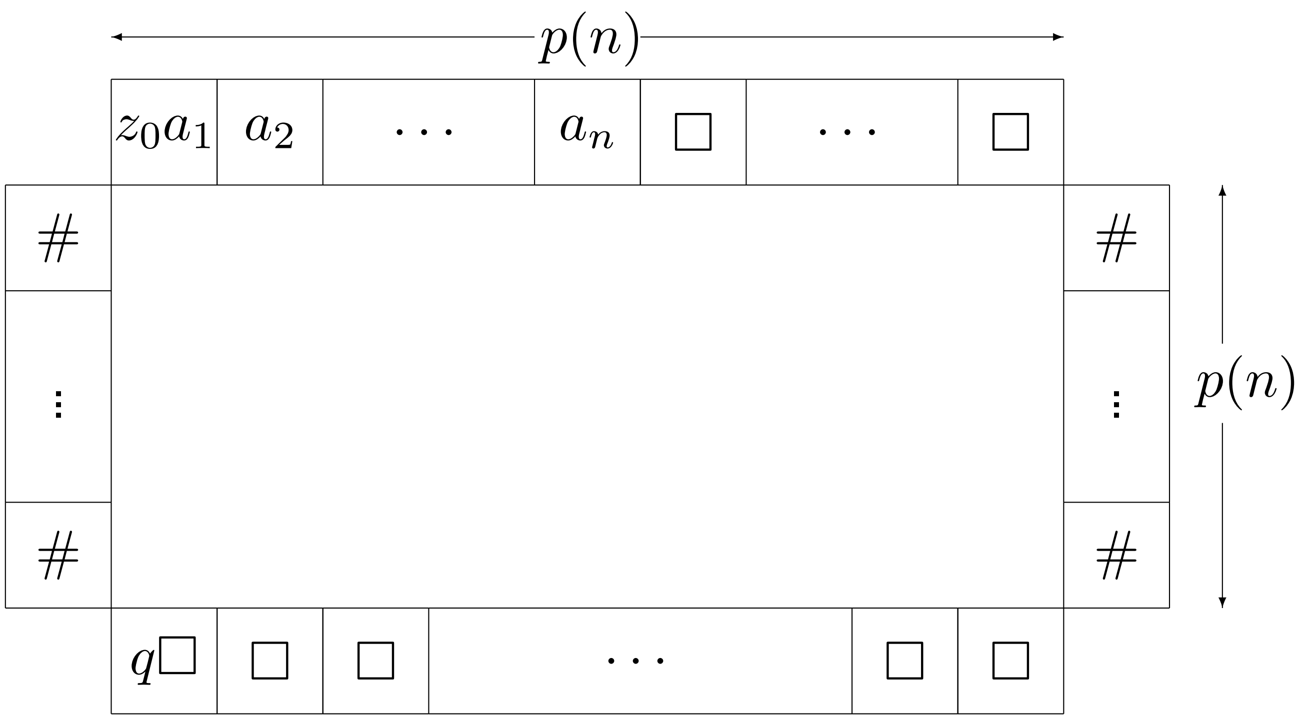
$(z, b, L) \in \delta(y, a)$



$(z, b, R) \in \delta(y, a)$

Domino-Problem: Konstruktion des Rahmens

- Es gelte $time_M(x) \leq p(|x|)$ für ein Polynom p.
- Eingabe sei $a_1 a_2 \cdots a_n$.



Domino-Problem: Simulation eines Laufes der NTM

- Ist die obere Hälfte einer Domino-Zeile eine Konfiguration k, so ist die untere Hälfte eine Nachfolgekonfiguration von k.
- Die untere Hälfte einer Domino-Zeile wird auf die obere Hälfte der nächsten Zeile kopiert.
- Oberer Rand ist Startkonfiguration, unterer Rand ist Endkonfiguration; d.h. Lösung des Domino-Problems entspricht akzeptierendem Lauf.
- Technische Voraussetzungen an NTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, z_0, \delta, \square, E)$:
  - $E = \{q\}$, $time_M(x) = p(|x|)$.
  - Der Schreib/Lese-Kopf befindet sich niemals links von seiner Startposition.
  - Bei Akzeptanz ist das Band leer, und der Schreib/Lese-Kopf ist in seiner Startposition.

Das Erfüllbarkeitsproblem (SAT)

Problem: Erfüllbarkeitsproblem (*Satisfiability*, **SAT**)
Eingabe: Boolesche Formel φ in konjunktiver Normalform
Frage: Ist die Formel φ erfüllbar?

Satz: SAT ist $\mathbb{NP}$-vollständig.

Beweisidee

- $\mathbf{SAT} \in \mathbb{NP}$: Rate Belegung und prüfe, ob sie die Formel erfüllt.
- $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit: Zeige $\mathbf{Domino} \leq_p \mathbf{SAT}$.

Weitere $\mathbb{NP}$-vollständige Probleme

Problem:	*3-Satisfiability*, (**3SAT**)
Eingabe:	Boolesche Formel φ in konjunktiver Normalform mit höchstens 3 Variablen je Klausel
Frage:	Ist die Formel φ erfüllbar?

Problem:	Cliquen-Problem (**Clique**)
Eingabe:	ungerichteter Graph G, $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Enthält G einen vollständigen Teilgraphen mit k Knoten?

Weitere $\mathbb{NP}$-vollständige Probleme

Problem: Hamiltonkreis-Problem (*Hamiltonian Circuit*, **HC**)
Eingabe: ungerichteter Graph G
Frage: Gibt es in G einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal passiert?

Problem: Rundreiseproblem (*Traveling Salesperson Problem*, **TSP**)
Eingabe: Schranke $M \in \mathbb{N}$, n Städte, $n \times n$-Kostenmatrix C mit
$C_{i,j} =$ Kosten einer Fahrt von Stadt i nach Stadt j
Frage: Gibt es eine Rundreise durch alle Städte
mit Kosten von höchstens M?

Weitere $\mathbb{NP}$-vollständige Probleme

Problem: Partitionierungs-Problem (**PARTITION**)
Eingabe: Menge U, Gewichtsfunktion $g : U \to \mathbb{N}$
Frage: Gibt es eine Zerlegung $U = V \cup W$, $V \cap W = \emptyset$,
so dass $\sum\limits_{v \in V} g(v) = \sum\limits_{w \in W} g(w)$?

Problem: Bin Packing
Eingabe: m Gegenstände mit Volumen $a_1, a_2, \ldots a_m$,
k Behälter mit Volumen jeweils ℓ.
Frage: Kann man die Gegenstände auf die k Behälter verteilen?

$\mathbb{NP}$-vollständige Probleme in der Praxis

- zumeist Optimierungsprobleme, z.B.

  Problem: Rundreiseproblem

  Eingabe: n Städte, $n \times n$-Kostenmatrix C

  gesucht: Rundreise mit minimalen Kosten

- $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit des zugehörigen Entscheidungsproblems heißt:
  Suche nach einem effizienten und exakten Algorithmus ist "aussichtslos".

- Häufig existieren aber gute Näherungsalgorithmen.