1.4 Grundbegriffe der Kategorientheorie

Kategorientheorie ist eine Theorie über Theorien, in denen der Begriff des Morphismus (Abstraktion des Homomorphismus) eine große Rolle spielt.

Definition 1.11:

Eine **Kategorie** Cat ist eine Kollektion von Objekten mit folgenden Eigenschaften. Sind A und B Objekte dann exisitiert eine Menge Mor(A, B) von Morphismen $f: A \rightarrow B$, für die eine Komposition definiert ist und die assoziativ sind und für die die Identitätseigenschaft gilt.

Komposition: Sind $f: A \rightarrow B$, und $g: B \rightarrow C$ Morphismen, so gibt es einen Morphismus

$$g \bullet f: A \rightarrow C$$

Assoziativität: Sind $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ und $h: C \rightarrow D$ Morphismen, so gilt

$$h \bullet (g \bullet f) = (h \bullet g) \bullet f$$

Identität: Für jedes Objekt A gibt es einen Morphismus $i_A : A \rightarrow A$ ($i_A \in Mor(A,A)$),

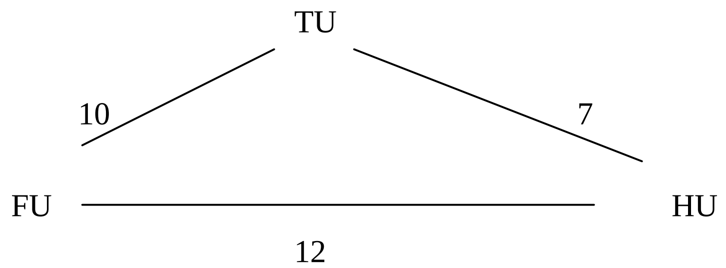
so dass für jeden Morphismus $f: A \rightarrow B$ gilt:

$$i_B \bullet f = f \bullet i_A = f$$

D.h., in einer Kategorie wird ein Objekt durch das Verhalten zu anderen Objekten beschrieben.

Beispiele:

1. $Obj_{BUNI} = \{TU, FU, HU\}$



Lageskizze der Berliner Universitäten

Mor(TU, TU) = {0, 14, 20, 28, 29, 34, 40, 46, …}

Mor(HU, HU) = {0, 14, 24, 28, 29, ...}

Mor(FU, FU) = {0, 20, 24, 29, ...}

Mor(TU, FU) = {10, 19, 24, 39, …}

Mor(FU, TU) = {10, 19, …}

Mor(TU, HU) = {7, 21, 22, …}

Mor(HU, TU) = {7, 21, 22, ...}

Mor(FU, HU) = {12, 17, 19, ...}

Mor(HU, FU) = {12, 17, 19, ...}

Komposition: $n: x \rightarrow y$, $m: y \rightarrow z$ $m \bullet n =_{def} (n + m)$

(Assoziativität erfüllt)

$id_A =_{def} 0$

2. Kategorie SET:
   Obj_{SET} = Klasse aller Mengen
   (Menge aller Mengen führt zum Widerspruch.)
   Mor(A, B) = Menge aller Abbildungen von vom Typ $A \rightarrow B$
   Komposition von Morphismen gleich Komposition von Abbildungen
   Identitätsmorphismus = identische Abbildung
3. Die Klasse aller Gruppen mit Gruppenhomomorphismen
4. Kategorie RELS von Mengen mit Relationen
   Obj_{RELS} = Klasse aller Mengen
   $Mor_{RELS}(A, B) = P(A \times B)$ (P = Potenzmenge)
   $R1 \in P(A \times B)$, $R2 \in P(B \times C)$
   $R2 \bullet R1 = \{ (a, c)$: es gibt ein b mit $(a, b) \in R1$ & $(b, c) \in R2\}$
   $id_A = \{(a, a): a \in A \}$
5. Jede Halbordnung $(S, \leq)$, definiert eine Kategorie REL2, wenn man für jedes Paar
   $A, B \in S$ Mor(A, B) =$\{1\}$ annimmt, wenn $A \leq B$ und leer sonst.
   Für $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ gilt:
   $g \bullet f = 1$ falls $f = 1$ und $g = 1$ (Assoziativität gilt aufgrund der Transitivität)
   $id_A = 1$

Definitionen 1.12 (kategorielle Begriffe):
Ein Objekt I einer Kategorie Cat heißt **initial**, wenn für jedes andere Objekt X der Kategorie genau ein Morphismus $f : I \rightarrow X$ existiert.
Ein Objekt T einer Kategorie Cat heißt **terminal,** wenn es von jedem anderen Objekt X von Cat genau einen Morphismus $f: X \rightarrow T$ gibt.
Ein Morphismus $f \in Mor(A, B)$ heißt **Epimorphismus**, wenn für alle Paare $g, h: B \rightarrow C$ aus $g \bullet f = h \bullet f$ folgt $g = h$.
Ein Morphismus $f \in Mor(B, C)$ heißt **Monomorphismus**, wenn für alle Paare $g, h : A \rightarrow B$ gilt: aus $f \bullet g = f \bullet h$ folgt $g = h$
$f \in Mor(A, B)$ heißt **linksinvertierbar**, falls es einen Morphismus $h: B \rightarrow A$ gibt mit $h \bullet f = id_A$
$f \in Mor(A,B)$ heißt **rechtsinvertierbar**, falls es einen Morphismus $g: B \rightarrow A$ gibt mit $f \bullet g = id_B$
$f \in Mor(A, B)$ heißt **Isomorphismus**, wenn ein Morphismus $g: B \rightarrow A$ existiert mit den Eigenschaften $g \bullet f = id_A$ und $f \bullet g = id_B$.

Illustration der kategoriellen Begriffe
0. Kategorie BUNI
   Da von jedem Objekt unendlich viele Morphismen ausgehen, gibt es kein initiales Objekt.
   Analog existiert kein terminales Objekt.
   Alle Morphismen sind sowohl Epi- als auch Monomorphismen, da aus
   $m + x = n + x$ bzw. $x + m = x + n$ stets $m = n$ folgt.
   0 ist jeweils ein Isomorphismus.

1. Kategorie SET:
   Die leere Menge ist das einzige initiale Objekt
   Jede einelementige Menge ist finales Objekt.
   Die surjektiven Abbildungen sind die Epimorphismen.

   Beweis: *f* sei surjektiv und es gelte $g \bullet f = h \bullet f$, dann existiert zu jedem $b \in B$ ein a_b mit $f(a_b) = b$
   Also gilt: $g(b) = g(f(a_b)) = (g \bullet f)(a_b) = (h \bullet f)(a_b) = h(f(a_b)) = h(b)$

Ist f nicht surjektiv, so existiert ein Element b aus B, das kein Urbild besitzt bzgl. f
Dann kann man zwei Abbildungen mit g(b) != h(b), die aber ansonsten identisch sind betrachten. Dann gilt $g \bullet f = h \bullet f$, aber nicht $g = h$.

Die injektiven Abbildungen sind genau die Monomorphismen:
f sei injektiv und es gelte $f \bullet g = f \bullet h$ und a sei ein beliebiges Element aus A.
Dann gilt: $(f \bullet g)(a) = (f \bullet h)(a)$, $f(g(a)) = f(h(a))$, $g(a)= h(a)$
d.h. $g=h$
Ist f nicht injektiv, so gibt es zwei Elemente b1 und b2 aus B mit f(b1) = f(b2).
Dann kann man A={a} und g(a)=b1 und h(a)=b2 setzen.
Die Bijektionen sind gerade die Isomorphismen.

3. Kategorie der Gruppen:
   Jede Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht, ist initiales und finales Objekt. Epi- und Monomorphismen wie bei SET. Isomorphismen stimmen mit Isomorphismen der Gruppentheorie überein.

4. Kategorie aller abelschen Gruppen:
mit der Klasse aller abelschen Gruppen und den Homomorphismen
5. Klasse aller topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen

6. Kategorie RELS
   Die leere Menge ist initiales und finales Objekt.

1. Kategorie REL2
   (Nat, ≤) hat 0 als initiales Objekt
   (Int, ≤) hat kein initiales Objekt
   beide Kategorien haben kein finales Objekt.

Definition 1.13
Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten. Ein Objekt S zusammen mit Morphismen $e_i: A_i \rightarrow S$ heißt **Summe** der $\mathbf{A_i}$, falls für jeden „Konkurrenten", d.h. für jedes andere Objekt Q mit Morphismen $(q_i: A_i \rightarrow Q)_{i\in I}$ genau ein Morphismus $s: S \rightarrow Q$ existiert,so dass $q_i=s \bullet e_i$ für alle i $\in$I gilt. Wenn ein solches Objekt existiert, ist es bis auf Isomorphie eindeutig und wir schreiben dafür $S= \Sigma_{i\in I} A_i$.

Definition 1.14
Sei $(f_i : A \rightarrow B)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen. Ein Morphismus $g: B\rightarrow C$ heißt Co-Equalizer der f_i, falls gilt:
(1) $g \bullet f_i =g \bullet f_j$, für alle $i,j \in I$
(2) für jedes Objekt Q und jeden Moprphismus $q: B\rightarrow Q$, so dass $q \bullet f_i = q \bullet f_j$ für alle $i,j \in I$, gibt es genau ein $h: C\rightarrow Q$ mit $q=h \bullet g$

Definition 1.15
Sei $(f_i: A \rightarrow B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen. Ein Objekt P mit einer Familie von Morphismen $(p_i: B_i \rightarrow P)_{i\in I}$ heißt Pushout der f_i, falls gilt:
(1) $p_i \bullet f_i = p_j \bullet f_j$ für alle $i,j \in I$
(2) zu jedem “Konkurrenten”, d.h. zu jedem anderen Objekt Q, ebenfalls mit einer Familie $(q_i : B_i \rightarrow Q)_{i\in I}$ von Morphismen, so dass $q_i \bullet f_i = q_j \bullet f_j$ für alle i, j gibt es genau einen Morphismus $h: P \rightarrow Q$ mit $h \bullet p_i = q_i$ für alle $i\in I$.