2. Universelle Algebra

Die Theorie der universellen Algebra verallgemeinert die Theorien der klassischen Algebren. Obwohl ursprünglich nur eine Sorte betrachtet wurde, werden wir hier gleich den mehrsortigen Fall betrachten. Inhaltlich wird die Theorie hierdurch nicht komplizierter, viele Anwendungen lassen sich im mehrsortigen Fall jedoch direkter modellieren.
Klassen von universellen Algebren werden durch **Signaturen** Σ (Spezifikation der Sorten und Aritäten der Operationen) und **Gleichungen** beschrieben. Die Semantik einer Gleichung wird dabei durch eine universelle Quantifizierung (für alle) festgelegt.
Ist $S = \{s_i : i \in Nat\}$ eine Menge von Sorten, so ist die **Arität** einer Operation durch $\omega: s_1 \times ... \times s_j \rightarrow s_k$ oder $\omega: \rightarrow s_k$ gegeben. Im letzten Fall repräsentiert die Inputsorte s^0 $(=\{\emptyset\})$ praktisch eine einelementige Menge, weshalb hierdurch Konstanten gegeben sind. Für sie ist daher keine gesonderte Behandlung erforderlich.
Will man beispielsweise Gruppen im Rahmen der universellen Algebra behandeln, so reicht es nicht, wenn nur eine zweistellige Operation zugelassen ist. Die Existenz eines neutralen und eines inversen Element kann man mit einer Gleichung ohne Existenzquantor nicht ausdrücken. Daher wird folgende Signatur mit entsprechenden Gleichungen benötigt:

Gruppen:
<u>sorts</u>: G
<u>opers</u>: +: G x G → G
-: G → G
null: → G
<u>axioms</u>:
x + (y + z) = (x + y) + z
x + null = null + x = x
x + (-x) = (-x) + x = null
<u>end</u>

Definition 2.1:
Es sei S eine beliebige Menge, deren Elemente wir als Sorten bezeichnen und OP eine beliebige Familie von Mengen $OP = (OP_{w,s})$ mit $(w,s) \in S^* \times S$,
deren Elemente wir als Operationssymbole bezeichnen. Dann heißt das Paar $\Sigma=(S,OP)$ **algebraische Signatur**. Für ein $\omega \in OP_{w,s}$ heißt w **domain** und s **codomain** von ω.

In Anlehnung an die Schreibweise für Abbildungen schreiben wir für $\omega \in OP_{w,s}$ üblicherweise wie folgt:

$\omega: w \rightarrow s$

Für $w = \lambda \in S^*$ schreiben wir $\omega: \rightarrow s$ und bezeichnen ω in diesem Fall als Konstantensymbol.
Wenn wir konkrete algebraische Signaturen angeben, werden wir die Notation, wie sie im obigen Gruppenbeispiel angegeben wurde, benutzen.

Definition 2.2:
Seien zwei Signaturen $\Sigma_1 = (S_1, OP_1)$ und $\Sigma_2 = (S_2, OP_2)$ mit den Eigenschaften $S_1 \subseteq S_2$ und $OP_1 \subseteq OP_2$ gegeben, so heißt Σ_1 **Untersignatur** von Σ_2.

Definition 2.3:
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur. Für alle $s \in S$ sei A_s eine Menge und für alle $\omega: s_1 ... s_n \rightarrow s \in OP$ sei $\omega_A: A_{s1} \times \ldots \times A_{sn} \rightarrow A_s$ eine Abbildung. Dann heißt das Paar $A = ((A_s)_{s \in S}, (\omega_A)_{\omega \in OP})$ **Σ - Algebra**. Für alle $s \in S$ heißt A_s **Trägermenge der Sorte s**.

Da $A^0 = \{\emptyset\}$, entspricht ein Konstantensymbol der Auswahl eines Elements aus der entsprechenden Sorte von A.

Für folgende Signatur <u>TEST</u> betrachten wir folgende Algebren:

<u>sorts</u> Nat, Bool
<u>opers</u> z → Nat
t, f: → Bool
s: Nat → Nat
add: Nat Nat → Nat
even: Nat → Bool
odd: Nat → Bool
<u>end</u>

	A	C	FUN
Nat	nat. Zahlen	$\{R\}^*$	{@,!}
Bool	{true, false}	{1, -1}	{1, 2, 7, 42, x}
z	0	λ	@
s	n→ n+1	w → Rw	{(@,!),(!,!)}
t	true	-1	7
f	false	1	42
even	0→ true 1→ false $even_A(n+2)=even_A(n)$	$even(\lambda)= -1$ R→ 1 RRw → $even_C(w)$	{(@,x),(!,1)}
odd	$odd_A(n)=even_A(n+1)$	$odd_C(w)=even_C(Rw)$	{(@,x},(!,2)}

Definition 2.4
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und seien A, B zwei Σ-Algebren mit den Eigenschaften
1. Für alle $s \in S$ gilt: $A_s \subseteq B_s$
2. Für alle $\omega \in OP$ gilt: $\omega_A \subseteq \omega_B$ (Hier wird eine Abbildung als Menge von Tupeln betrachtet.)

Dann heißt A **Unteralgebra** von B.

Beispiel:
Für eine zweisortige Signatur mit einer einstelligen Operation gibt es beispielsweise folgende Unteralgebren:

$M = \{1, 2, 3\}$
$N = \{a, b, c, d\}$
$\omega: M \to N \quad \omega= \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

entfernt man d, so entsteht eine Unteralgebra. Entfernt man 1 aus M, so muss man auch (1,a) aus ω entfernen, damit eine Unteralgebra entsteht.
$\omega' =_{def} \omega \cap (M' \times N)$ $(M' \subseteq M)$.
Entfernt man dagegen lediglich (1,a), so entsteht keine Unteralgebra; man muss zusätzlich noch 1 aus M entfernen.

Definition 2.5
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur, A und B Σ-Algebren und $f = (f_s: A_s \to B_s)_{s \in S}$ eine S-Familie von Abbildungen. f heißt **Homomorphismus**, wenn für jedes Operationssymbol $\omega \in OP$ mit $\omega: w \to s$ und jedes Element $a \in A_w$ gilt : $f_s(\omega_A(a)) = \omega_B(f_w(a))$
Die Forderung der Homomorphie von f ist gleichbedeutend mit der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} A_w & \xrightarrow{f_w} & B_w \\ \downarrow \omega_A & = & \downarrow \omega_B \\ A_s & \xrightarrow{f_s} & B_s \end{array}$$

Hierbei ist für w= $s_1 \ldots s_n$ f_w: $A_{s1} \times \ldots \times A_{sn} \rightarrow B_{s1} \times \ldots \times B_{sn}$ mit
$f_w(a_1,\ldots,a_n) = (f_{s1}(a_1),\ldots,f_{sn}(a_n))$.
Ein Homomorphismus $f = (f_s)_{s\in S}$ heißt **Isomorphismus**, wenn jede der Abbildungen eine Bijektion (injektive und surjektive Abbildung) ist.

Die Algebren A und C der Signatur Test sind isomorph, vermöge der folgenden Abbildung f

f_{Nat}: $0 \rightarrow \lambda$
$1 \rightarrow R$
$n \rightarrow RR...R$ (n-mal)
f_{Bool}: $T \rightarrow -1$
$F \rightarrow 1$

Lemma 2.6:
Ist f: A → B ein Homomorphismus, so bildet die Familie aller Bildelemente von f eine Unteralgebra von B.
Beweis: Es ist klar, dass $(f_s(A_s))_{s\in S}$ eine Teilfamilie von $(B_s)_{s\in S}$ ist. Daher ist lediglich zu zeigen, dass die Bildmengen abgeschlossen bzgl. aller Operationen von OP sind.
Sei ω: w → s eine beliebige Operation aus OP mit w =$(s_1,...,s_n)$ und $(b_1,...,b_n)$ ein beliebiges Tupel der Bildmenge B_w ($b_i \in B_{si}$). Dann existiert ein Urbildtupel $(a_1,...,a_n)$ mit $f_w(a_1,...,a_n) = (b_1,...,b_n)$. $\omega_A(a_1,...,a_n)$ existiert, da ω eine totale Operation ist und
$\omega_B(b_1,\ldots,b_n) = \omega_B(f_{s1}(a_1),\ldots,f_{sn}(a_n)) = f_s(\omega_A(a_1,...,a_n)) = f_s(a) = b \in B_s$.

q.e.d.

Lemma 2.7:
Ist f: A → B ein Isomporphismus, so ist auch die Familie aller Umkehrabbildungen f^{-1}: B → A ein Isomorphismus.
f ist genau dann Isomporphismus, wenn es einen Homomorhismus g: B → A mit $f \bullet g = id_A$ und $g \bullet f = id_A$ gibt. g ist dann ebenfalls Isomorphismus (die Umkehrabbildung).

Definition 2.8 (a)
Sei Σ = (S, OP) eine Signatur und A und B Σ-Algebren. Dann ist das wie folgt definierte kartesische Produkt der Familien der Trägermengen mit der folgenden Definition der Operationen wieder eine Σ-Algebra C: das **direkte Produkt** von A und B :

$C_s = \{(a,b): a\in A_s \;\&\; b\in B_s\}$

$\omega_C((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) =_{def} (\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_B(b_1,\ldots,b_n))$ für ω:$s_1 \ldots s_n \rightarrow s$ und $a_i \in A_{si}$, $b_i \in B_{si}$ (i= 1…n)

Schreibweise: $C = A \times B$

Beispiele:
1. $Z(2) \times Z(3)$ ist isomorph zur $Z(6)$
2. $Z(2) \times Z(2)$ ist isomorph zur $V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Definition 2.8 (b)
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und $(A_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von Σ-Algebren. Eine Σ-Algebra P mit Homomorphismen (Projektionen) $p_i: P \rightarrow A_i$ heißt **direktes Produkt** von $(A_i)_{i\in I}$, wenn die folgende Universaleigenschaft erfüllt ist: Für jede I-Familie von Homomorphismen $f_i: A \rightarrow A_i$ gibt es genau einen Homomorphismus $f: A \rightarrow P$, so dass $f_i = p_i \bullet f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & A_i \arrow[dl, phantom, "=" near end] \\ & P \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 2.9:
Die Projektionen $p1:C \rightarrow A$ und $p2:C\rightarrow B$ mit $p1_s(a,b) = a$ und $p2_s(a,b) = b$ des direkten Produkts in die Ausgangsalgebren sind Homomorphismen.
Beweis: $\omega: s_1 ... s_n \rightarrow s$

$$\begin{aligned} & p1_s(\omega_C((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) \\ &= p1_s((\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_B(b_1,\ldots,b_n))) \\ &= \omega_A(a_1,\ldots,a_n) \\ &= \omega_A(p1_{s1}(a_1,b_1),\ldots,p1_{sn}(a_n,b_n)) \end{aligned}$$

Analog für p2 q.e.d.

Bemerkung 1:
Das direkte Produkt nach Definition 2.8(a) mit den beiden Projektionen p_1 und p_2 ist auch direktes Produkt nach Definition 2.8(b).
Beweis:
Für $P = A\times B$ und $f_1: X \rightarrow A$ und $f_2 : X \rightarrow B$ definieren wir $f : X \rightarrow P$ durch
$f_s(x) = (f_{1s}(x), f_{2s}(x))$
Dann gilt offensichtlich $f_{1s} = p_{1s} \bullet f_s$ (analog f_2)
Sei $g: X \rightarrow P$ ein weiterer Homomorphismus mit $f_1 = p_1 \bullet g$ und $f_2 = p_2 \bullet g$.
Dann gilt:
$p_{1s}(g_s(x)) = f_{1s}(x) = p_{1s}(f_s(x))$
$p_{2s}(g_s(x)) = f_{2s}(x) = p_{2s}(f_s(x))$
Setzt man $g_s(x) = (a,b)$ und $f_s(x) = (a', b')$ so folgt aus der ersten Gleichung $a=a'$ und aus der zweiten $b=b'$. Daher folgt $g = f$.

q.e.d.

Bemerkung 2:
Das direkte Produkt nach Definition 2.8(b) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
Beweis:
(siehe Übung)

q.e.d.

Definition 2.10
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und $A = ((A_s)_{s\in S}, (\omega_A)_{\omega\in OP})$ eine Σ-Algebra, dann heißt eine Familie $(R_s)_{s\in S}$ von Äquivalenzrelationen **Kongruenzrelation**, wenn folgende Kompatibilitätsbedingung für jede Operation $\omega:s_1...s_n \rightarrow s$ erfüllt ist.

$(a_1,b_1)\in R_{s1},..., (a_n,b_n)\in R_{sn}$, so ist $(\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_A(b_1,\ldots,b_n))\in R_s$

Lemma 2.11:
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur, $A = ((A_s)_{s\in S}, (\omega_A)_{\omega\in OP})$ eine Σ-Algebra und $R = (R_s)_{s\in S}$ eine Kongruenzrelation in A. Dann ist die Faktorstruktur (Menge aller Äquivalenzklassen) mit der repräsentantenweisen Definition der Operationen wieder eine Σ-Algebra.
Beweis:

Es ist lediglich zu zeigen, dass die Definition der Operationen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten erfolgt.
$[a] = \{b: (a,b) \in R_s \}$
Definition: $\omega_F([a_1],\ldots,[a_n]) =_{def} [\omega_A(a_1,\ldots,a_n)]$
Sei $[a_1] = [b_1],\ldots, [a_n] = [b_n]$
Dann gilt: $(a_1,b_1)\in R_{s1},..., (a_n,b_n)\in R_{sn}$
Laut Kompatibilitätsbedingung gilt jetzt:
$(\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_A(b_1,\ldots,b_n))\in R_s$.
Also ist $[\omega_A(a_1,\ldots,a_n)] = [\omega_A(b_1,\ldots,b_n)]$
und $\omega_F([a_1],...,[a_n]) = \omega_F([b_1],...,[b_n])$

q.e.d.

Beispiel:
(Z, +, -, 0)
besitzt Kongruenzrelation mod 5 : $(x, y) \in$ mod 5 g.d.w. x-y=0 mod 5
Menge aller Äquivalenzklassen :
R5 = {[0], [1], [2], [3], [4]}
Faktoralgebra: R5 mit
$0_{R5} =[0]$
$-_{R5}([x]) = [-x]$
$[x] +_{R5} [y] = [x+y]$

Lemma 2.12:
Der **Kern** eines Homomorphismus ist eine Kongruenzrelation:
$f: A \rightarrow B$ sei Σ-Homomorphismus
Definition: $ker(f)_s = \{(a, a'): a \in A_s, a' \in A_s, f_s(a) = f_s(a')\}$
Beweis:
Reflexivität:
$(a,a)\in ker(f)_s$, da $f_s(a) = f_s(a)$
Symmetrie:
Sei $(a,a')\in ker(f)_s$, dann gilt $f_s(a) = f_s(a')$, dann gilt auch $f_s(a') = f_s(a)$, woraus unmittelbar $(a',a)\in ker(f)_s$ folgt.
Transitivität:
Sei $(a,a')\in ker(f)_s$ und $(a',a'')\in ker(f)_s$ dann gilt $f_s(a) = f_s(a')$ und $f_s(a') = f_s(a'')$. Daher gilt $f_s(a) = f_s(a'')$, d.h. $(a,a'') \in ker(f)$
Kompatibilitätsbedingung:
Es sei $\omega:s_1...s_n \rightarrow s$ ein beliebiges Operationssymbol und es gelte $(a_1,b_1)\in R_{s1},..., (a_n,b_n)\in R_{sn}$, daher gilt $f_{s1}(a_1) = f_{s1}(b_1),..., f_{sn}(a_n) = f_{sn}(b_n)$,
da f ein Homomorphismus ist gilt

$f_s(\omega_A(a_1,...,a_n)) = \omega_B(f_{s1}(a_1),\ldots,f_{sn}(a_n)) = \omega_B(f_{s1}(b_1),\ldots,f_{sn}(b_n)) = f_s(\omega_A(b_1,\ldots,b_n))$
d.h. $(\omega_A(a_1,\ldots a_n),\omega_A(b_1,\ldots,b_n)) \in R_s$

q.e.d.

Definition 2.13
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur mit Untersignatur $\Sigma' = (S', OP')$ (d.h. $S' \subseteq S$ und $OP' \subseteq OP$). Sei A eine Σ-Algebra.
Das **Σ'-Redukt** von A, geschrieben A/Σ', ist die wie folgt definierte Σ'-Algebra

1. $(A/\Sigma')_s = A_s$, für alle $s \in S'$.
2. $\omega_{A/\Sigma'} = \omega_A$, für alle $\omega \in OP'$.

Sei f: $A \rightarrow B$ ein Σ-Homomorphismus und Σ' eine Untersignatur von Σ. Das **Σ'-Redukt** von f f/Σ': $A/\Sigma' \rightarrow B/\Sigma'$ ist definiert durch :
$f/\Sigma'_s = f_s$ für alle $s \in S'$.

Beobachtung: Das Σ'-Redukt einer Σ-Algebra ist eine Σ'-Algebra. Das Σ'-Redukt eines Σ-Homomorphismus ist ein Σ'-Homomorphismus.

Terme sind syntaktische Gebilde über die strukturelle Induktion definiert werden kann. Da wir natürliche Zahlen ebenfalls durch Terme repräsentieren können, kann man die strukturelle Induktion als Verallgemeinerung der vollständigen Induktion ansehen.

Definition 2.14
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur. OP bezeichne gleichzeitig die Vereinigung aller $OP_{w,s}$.
Die Familie aller Mengen $T_{\Sigma,s}$ von **Σ-Grundtermen** zur Sorte s besteht aus der kleinsten Menge von Wörtern über (OP $\cup$ { „(“, „)“, „ ,“}, die folgenden Eigenschaften genügt:

1. $c \in T_{\Sigma,s}$ für alle c: $\rightarrow s \in OP$
2. $\omega(t_1, ..., t_n) \in T_{\Sigma,s}$ für alle $\omega: s_{1, ..., } s_n \rightarrow s \in OP$ und $t_i \in T_{\Sigma,si}$ ($i \in \{1,2,...,n\}$)

Beispiel:
Für Signatur TEST ergeben sich folgende Grundterme:

```
sorts   Nat, Bool
opers   z → Nat
        t, f: → Bool
        s: Nat → Nat
        add: Nat Nat → Nat
        even: Nat → Bool
        odd: Nat → Bool
end
```

	$TEST_{Nat}$	$TEST_{Bool}$
Stufe 0	z	t, f
Stufe 1	s(z)	even(z)
	add(z,z)	odd(z)
Stufe 2	s(s(z))	even(s(z))
	s(add(z,z))	even(add(z,z))
	add(z,s(z))	odd(s(z))
	add(s(z),z))	odd(add(z,z))
	add(add(z,z),z)	
	…	
Stufe 3	…	…

…

Definition 2.15
Sei Σ = (S, OP) eine Signatur und A eine Σ-Algebra. Die **Auswertung (Evaluation) *eval*(A)** der Grundterme zur Signatur Σ in A ist eine Familie von Abbildungen:

$eval(A) = (eval(A)_s: T_{\Sigma,s} \rightarrow A_s)_{s \in S}$ mit

1. Für alle Konstantensymbole c: $\rightarrow$ s $\in$ OP
   $eval(A)_s(c) = c_A$
2. Für jedes Operationssymbol ω: $s_1, \ldots, s_n \rightarrow s \in OP$ und alle Grundterme
   $t_1 \in T_{\Sigma,s1}, \ldots, t_n \in T_{\Sigma,sn}$ gilt:
   $eval(A)_s(\omega(t_1,\ldots,t_n)) = \omega_A(eval(A)_{s1}(t_1),\ldots,eval(A)_{sn}(t_n))$

Beispiel:
Algebra C der Signatur Test:
$eval(C)_{Bool}(even(add(s(z),z)))$
$= even_C\ (eval(C)_{Nat}(add(s(z),z)))$
$= even_C\ (add_C(eval(C)_{Nat}(s(z),eval(C)_{Nat}(z)))$
= …
= 1

$eval(FUN)_{Nat}(s(s(z))$
= …
= !

Definition 2.16
Sei Σ = (S, OP) eine Signatur. $X= (X_s)_{s\in S}$ heißt **Variablensystem** für Σ, wenn für alle $s \in S$ $X_s \cap OP = \emptyset$. Dann heißt Σ = (S, OP, X) **Signatur mit Variablen**.

Definition 2.17
Sei Σ = (S, OP, X) eine Signatur mit Variablen. OP bezeichne gleichzeitig die Vereinigung aller $OP_{w,s}$ und X die Vereinigung aller X_s.
Die Familie aller Mengen $T_{\Sigma,s}(X)$ von **Σ-Termen** zur Sorte s besteht aus der kleinsten Menge von Wörtern über (OP $\cup$ X $\cup$ { „(“, „)“, „ ,“}, die folgenden Eigenschaften genügt:

1. $c \in T_{\Sigma,s}(X)$ für alle c: $\rightarrow$ s $\in$ OP
2. $x \in T_{\Sigma,s}(X)$ für alle $x \in X_s$
3. $\omega(t_1, ..., t_n) \in T_{\Sigma,s}(X)$ für alle ω: $s_{1, ..., }s_n \rightarrow s \in OP$ und $t_i \in T_{\Sigma,si}(X)$ ($i \in \{1,2,...,n\}$)

Definition 2.18
Sei Σ = (S, OP, X) eine Signatur mit Variablen und A eine Σ-Algebra. Eine S-induzierte Familie von Abbildungen

$ass: X \rightarrow A = (ass_s: X_s \rightarrow A_s)_{s\in S}$

die jeder Variablen ein Element der Trägermenge derselben Sorte zuordnet, heißt **Variablenbelegung** (engl. Assignment).

Definition 2.19
Sei Σ = (S, OP, X) eine Signatur mit Variablen, A eine Σ-Algebra und ass: X $\rightarrow$ A eine Variablenbelegung. Die **erweiterte Auswertung** allgemeiner Σ-Terme in A bzgl. ass geschrieben
xeval(ass) : $T_\Sigma(X) \rightarrow$ A ist eine Familie von Abbildungen
$xeval(ass)_s : T_{\Sigma,s}(X) \rightarrow A_s$
ist in folgender Weise rekursiv definiert:

1. für alle Konstantensymbole $c: \rightarrow s \in OP$: $xeval(ass)_s(c)=c_A$
2. für alle Variablen $x \in X_s$: $xeval(ass)_s(x)=ass_s(x)$
3. für alle zusammengesetzten Terme $\omega(t_w) \in T_{w,s}$
   $xeval(ass)_s(\omega(t_w)) = \omega_A(xeval(ass)_w(t_w))$

Beispiel:
Wir betrachten wieder die Signatur Test mit folgender Variablenmenge:
$X_{Nat} =\{n1,n2\}$ $X_{Bool} = \{x\}$
Wir wollen den Term odd(s(n2)) für die Variablenbelegungen
$\alpha: X \rightarrow A$ und $\varphi: X \rightarrow FUN$ mit

	α	φ
x	false	2
n1	42	!
n2	713	!

$xeval(\alpha)_{Bool}(odd(s(n2)))$
= …
= false

$xeval(\varphi)_{Bool}(odd(s(n2)))$
= …
= 2

Offensichtlich hat die Belegung der Variablen n1 und x keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Satz 2.20 a
Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und $f: A \rightarrow B$ ein Σ-Homomorphismus, dann gilt für beliebige Grundterme $t \in T_{\Sigma,s}$

$$f_s(eval(A)_s(t)) = eval(B)_s(t)$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Grundterme.

Diesen Satz kann man auch benutzen, um die Nichtexistenz eines Homomorphismus zu zeigen.
Beispiel 1 :
Ein Test-Homomorphismus $h: A \rightarrow FUN$
enthielte eine Abbildung $h_{Bool}:\{true, false\} \rightarrow \{1, 2, 7, 42, x\}$
h muss beispielsweise den Term T und den Term even(z) bewahren:

	A	FUN
T	true	7
even(z)	true	x

Also existiert kein Homomorphismus von A nach FUN.
Beispiel 2:
Ein Homomorphismus $g: FUN \rightarrow A$ müsste in gleicher Weise die Auswertungen der Grundterme even(z) und odd(z) bewahren:

	FUN	A
even(z)	x	true

odd(z) x false

Satz 2.20 b:
Sei $\Sigma = (S, OP, X)$ eine Signatur mit Variablen und $h: A \rightarrow B$ ein Σ-Homomorphismus und sei $\alpha: X \rightarrow A$ eine Variablenbelegung in A. Dann ist $\alpha \bullet h: X \rightarrow B$ vermöge $(\alpha \bullet h)_s(x) = h_s(\alpha_s(x))$ ebenfalls eine Variablenbelegung. Nun gilt für alle Terme $t \in T_{\Sigma,s}(X)$

$$h_s(xeval(\alpha)_s(t)) = xeval(\alpha \bullet h)_s(t)$$

Beweis:
Im Vergleich zu Satz 2.20(a) muss lediglich der Induktionsanfang erweitert werden.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "h \bullet \alpha"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

(Definition der Variablenbelegung $\alpha \bullet h$)

$$\begin{tikzcd} & T_\Sigma(X) \arrow[dl, "xeval(\alpha)"'] \arrow[dr, "xeval(h \bullet \alpha)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

(Behauptung von Satz 20.2 b)

Satz 2.21 (Theorem von Birkhoff):
Eine Klasse K von Σ-Algebren läßt sich genau dann durch ein Gleichungssystem G beschreiben (d.h. K ist Varietät von G), wenn

(a) jede Teilalgebra einer Algebra von K wieder zu K gehört ($S(K) \subseteq K$),
(b) jedes homomorphe Bild einer Algebra von K wieder zu K gehört ($H(K) \subseteq K$)
(c) jedes direkte Produkt einer beliebigen Familie von K-Algebren wieder zu K gehört($P(K) \subseteq K$).