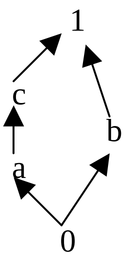
Zum 12.4.06

Serie 2

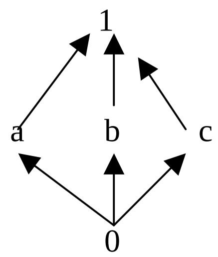
1. Zeigen Sie: wenn ein Ring ein Linkseinselement ($e * x = x$ für alle x) und ein Rechtseinselement ($x * e' = x$ für alle x) besitzt, dass diese dann gleich sind.

2. Ein Element *a* eines Grundbereiches eines Ringes heißt Nullteiler, wenn gilt
   $a * b = 0$ oder $b * a = 0$ für $b \neq 0$.
   Geben Sie im Ring der stetigen Funktionen im Intervall [-1, 1] Beispiele für Nullteiler an.
   $(f + g) = h$ mit $h(x) = f(x) + g(x)$
   $(f * g) = h$ mit $h(x) = f(x) * g(x)$

3. Skizzieren Sie die Verbände der natürlichen Zahlen V1={1, 3, 9} und V2=Nat, mit ggT und kgV, den Potenzmengenverband V3 von {1, 3, 9}. Weiterhin seien Verbände V4 und V5 gegeben:



(V4)



(V5).

   Welche der fünf Verbände sind distributiv, modular und Boole'sch
   (Ein Verband (V, op1, op2) ist ein modularer Verband genau dann, wenn für beliebige $x, y, z \in V$ gilt: aus $x \leq z$ folgt $x \text{ op2 } (y \text{ op1 } z) = (x \text{ op2 } y) \text{ op1 } z)$

4. Geben Sie in der Kategorie aller Gruppen einen Morphismus $f: A \rightarrow B$, der kein Isomorphismus ist, für den es aber einen Morphismus $g: B \rightarrow A$ mit $g \bullet f = id_B$ gibt, an.

5. Zeigen Sie, dass ein links- und rechtinvertierbarer Morphismus ein Isomorphismus ist.
   Zeigen Sie, dass der Morphismus g in der Definition des Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Dadurch kann man $f^{-1} = g$ definieren.
   Beweisen Sie, dass $(f^{-1})^{-1} = f$ ist.

6. Sei $(A_i : i \in I)$ eine Familie von Objekten einer Kategorie K. Ein Objekt A zusammen mit Morphismen $\pi_i: A \rightarrow A_i$ heißt **direktes Produkt** der Familie $(A_i: i \in I)$, wenn für jede Familie $f_i: B \rightarrow A_i$ $(i \in I)$ genau ein Morphismus $f : B \rightarrow A$ existiert, so dass $f_i = f \bullet \pi_i$ für alle i gilt.
   Beweisen Sie, dass das direkte Produkt bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.
   Geben Sie die direkten Produkte einer endlichen Familie von Gruppen an.