Formale Sprachen

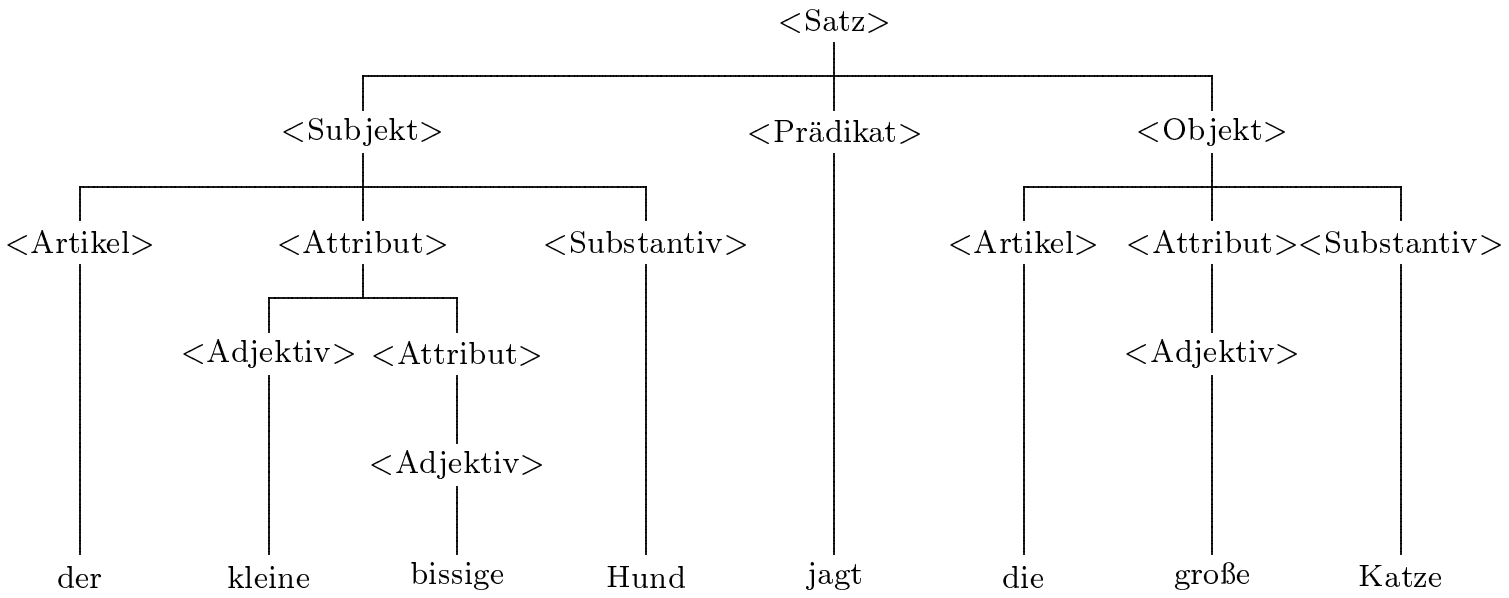
Script, Kapitel 4

- Grammatiken
  - erzeugen Sprachen
  - eingeführt von Chomsky zur Beschreibung natürlicher Sprachen
  - bedeutend für die Syntaxdefinition von Programmiersprachen (Compilerbau)
- Automaten
  - akzeptieren Sprachen
  - enge Beziehungen zu Grammatiken

Beispiel für eine Grammatik

$$
\begin{aligned}
\text{<Satz>} &\rightarrow \text{<Subjekt><Prädikat><Objekt>} \\
\text{<Subjekt>} &\rightarrow \text{<Artikel><Attribut><Substantiv>} \\
\text{<Prädikat>} &\rightarrow \text{jagt} \\
\text{<Objekt>} &\rightarrow \text{<Artikel><Attribut><Substantiv>} \\
\text{<Artikel>} &\rightarrow \varepsilon \mid \text{der} \mid \text{die} \mid \text{das} \\
\text{<Attribut>} &\rightarrow \varepsilon \mid \text{<Adjektiv>} \mid \text{<Adjektiv><Attribut>} \\
\text{<Adjektiv>} &\rightarrow \text{kleine} \mid \text{bissige} \mid \text{große} \\
\text{<Substantiv>} &\rightarrow \text{Hund} \mid \text{Katze}
\end{aligned}
$$

Syntaxbaum für den Satz
der kleine bissige Hund jagt die große Katze



Definition Grammatik

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V ein Alphabet ist (Nichtterminalalphabet oder Alphabet der Variablen),
- Σ ein Alphabet ist (Terminalalphabet),
- $V \cap \Sigma = \emptyset$ gilt,
- P eine endliche Teilmenge von $((V \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^*) \times (V \cup \Sigma)^*$ ist (Menge der Regeln),
- $S \in V$ ist (die Startvariable oder Axiom).

Zur besseren Lesbarkeit werden wir $u \to v \in P$ für $(u, v) \in P$ schreiben.

Definitionen direkte Ableitung einer Grammatik

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ Wörter. Dann gilt $u \Longrightarrow_G v$ (in Worten: u erzeugt bezüglich G direkt v) genau dann, wenn

(i) $u = \gamma_1 \alpha \gamma_2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in (V \cup \Sigma)^*$,

(ii) $v = \gamma_1 \beta \gamma_2$ und

(iii) $\alpha \to \beta \in P$ ist.

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir statt "$\Longrightarrow_G$" einfach "$\Longrightarrow$".

Definitionen Ableitung und erzeugte Sprache

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ Wörter. Dann gilt $u \overset{*}{\Longrightarrow}_G v$ (in Worten: u erzeugt bezüglich G in endlich vielen Schritten v) genau dann, wenn $u = v$ gilt oder es ein $n \in \mathbb{N}$ und Wörter $w_0, w_1, \ldots, w_n$ gibt, so dass

$$u = w_0 \Longrightarrow_G w_1 \Longrightarrow_G w_2 \Longrightarrow_G \cdots \Longrightarrow_G w_n = v$$

gilt.

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik. Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ wird definiert als

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Longrightarrow}_G w\}.$$

Beispiel einer Grammatik

Es sei

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb,\ S \to ab\}, S)$$

eine Grammatik, dann gilt

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}.$$

Eine Ableitung für das Wort a^4b^4 sieht dann so aus:

$$S \Longrightarrow aSb \Longrightarrow aaSbb \Longrightarrow aaaSbbb \Longrightarrow aaaabbbb.$$

Weiteres Beispiel einer Grammatik

Es sei

$$G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aaS,\ S \to a\}, S)$$

eine Grammatik, dann gilt

$$L(G) = \{a^{2n+1} \mid n \geq 0\}.$$

Eine Ableitung für das Wort a^7 sieht dann so aus:

$$S \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aaaaS \Longrightarrow aaaaaaS \Longrightarrow aaaaaaa.$$

Weiteres Beispiel einer Grammatik

Es sei

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to bS,\ S \to a,\ S \to b\}, S)$$

eine Grammatik, dann gilt

$$L(G) = \{a, b\}^+ = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \neq \varepsilon\}.$$

Eine Ableitung für das Wort $aaba$ sieht dann so aus:

$$S \Longrightarrow aS \Longrightarrow aaS \Longrightarrow aabS \Longrightarrow aaba.$$

Komplexeres Beispiel einer Grammatik

Es sei die Grammatik $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$$

gegeben. Wir können zum Beispiel die Ableitung

$$\begin{aligned} S &\Longrightarrow aSBC \Longrightarrow aaSBCBC \Longrightarrow aaaBCBCBC \\ &\Longrightarrow aaaBBCCBC \Longrightarrow aaaBBCBCC \Longrightarrow aaaBBBCCC \\ &\Longrightarrow aaabBBCCC \Longrightarrow aaabbBCCC \Longrightarrow aaabbbCCC \\ &\Longrightarrow aaabbbcCC \Longrightarrow aaabbbccC \Longrightarrow aaabbbccc \end{aligned}$$

aufstellen, also gehört das Wort $aaabbbccc = a^3b^3c^3$ zur erzeugten Sprache $L(G)$, es gilt also $a^3b^3c^3 \in L(G)$.

Komplexeres Beispiel einer Grammatik – Erzeugte Sprache Teil 1

Vermutung: $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

Zunächst wird $L(G) \supseteq \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ gezeigt,
d.h. $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^n b^n c^n$ für jedes $n \geq 1$.

- Wende $(n-1)$-mal Regel $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an,
  d.h.: $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^n (BC)^n$.
- Solange wie möglich wende $CB \to BC$ an,
  d.h.: $a^n (BC)^n \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^n B^n C^n$.
- Wende einmal $aB \to ab$ und $(n-1)$-mal $bB \to bb$ an,
  d.h.: $a^n B^n C^n \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^n b^n C^n$.
- Wende einmal $bC \to bc$ und $(n-1)$-mal $cC \to cc$ an,
  d.h.: $a^n b^n C^n \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^n b^n c^n$.

Komplexeres Beispiel einer Grammatik – Erzeugte Sprache Teil 2

Schwieriger zu zeigen ist die Behauptung $L(G) \subseteq \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

- Für jedes erzeugbare Wort α gilt: $|\alpha|_a = |\alpha|_b + |\alpha|_B = |\alpha|_c + |\alpha|_C$.
- In jedem erzeugbaren Wort stehen die a's am Anfang.
- Ein Symbol B kann nur dann in ein b umgewandelt werden, wenn unmittelbar links vor ihm ein a oder ein b steht, d.h. kein c steht vor einem b.
- Mathematisch exakter Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Chomsky-Hierarchie

Definition: Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ heißt vom

- Typ 0, wenn sie keinen Beschränkungen unterliegt,
- Typ 1 oder kontextabhängig, falls für jede Regel $\alpha \to \beta$ gilt: $|\alpha| \leq |\beta|$, mit der Ausnahme $S \to \varepsilon$, falls S nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.
- Typ 2 oder kontextfrei, wenn jede Regel von der Form $A \to \beta$ mit $A \in V$ und $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ ist.
- Typ 3 oder regulär, wenn jede Regel von der Form $A \to wB$ oder $A \to w$ mit $A, B \in V$ und $w \in \Sigma^*$ ist.

Chomsky-Hierarchie – Fortsetzung

Definition: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt vom Typ 0 (Typ 1, Typ 2, Typ 3), falls es eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 0 (Typ 1, Typ 2, Typ 3) gibt, so dass $L = L(G)$ gilt.

Notation: Typ i: Familie der Sprachen vom Typ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Satz (Chomsky-Hierarchie). Es gilt:

$$\boxed{\textbf{Typ 3} \subsetneq \textbf{Typ 2} \subsetneq \textbf{Typ 1} \subsetneq \textbf{Typ 0}.}$$

Der Beweis des Satzes wird in den folgenden Kapiteln erbracht.

Typ-0-Grammatiken und Turingmaschinen

Satz

Eine Sprache ist genau dann eine Typ-0-Sprache,
wenn sie von einer NTM akzeptiert werden kann,
d.h. wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweisidee

- Ableitung einer Grammatik wird in umgekehrter Reihenfolge durch eine NTM simuliert.
- Konfigurationenfolge eines akzeptierenden Laufs einer NTM wird in umgekehrter Reihenfolge durch eine Grammatik erzeugt.

Simulation einer Grammatik durch eine NTM

- gegeben: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$
- Konstruiere NTM $M = (Z, \Sigma, V \cup \Sigma \cup \{\square\}, \delta, z_0, \square, \{q\})$
- Arbeitsweise von M in einer *Phase:*
  Rate eine Regel $\alpha \to \beta$ und ersetze ein Vorkommen von β durch α,
  d.h. Konfigurationsänderung: $z_0 w_1 \beta w_2 \vdash^* z_0 w_1 \alpha w_2$
- M akzeptiert, wenn nur noch S auf dem Band steht.

Linear beschränkte Automaten

Definition Eine nichtdeterministische Turingmaschine M heißt linear beschränkter Automat (LBA), wenn bei jedem Lauf von M nur die Speicherzellen der Eingabe benutzt werden.

Offenes Problem (LBA-Problem):
Sind deterministische LBA so mächtig wie nichtdeterministische LBA?

Typ-1-Grammatiken und LBA

Satz

Eine Sprache ist genau dann eine Typ-1-Sprache, wenn sie von einem linear beschränkten Automaten akzeptiert werden kann.

Beweisidee

- Gleiche Konstruktionen wie für Typ-0-Grammatiken und NTM.
- Nichtverkürzende Regeln erlauben den beschränkten Platzbedarf.

Das Wortproblem

Definition (Wortproblem)

Gegeben: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ i, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, und Wort $w \in \Sigma^*$,

Frage: Gilt $w \in L(G)$?

Folgerung Das Wortproblem für Typ-0-Grammatiken ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Satz Das Wortproblem für Typ-1-Grammatiken ist entscheidbar.

Weitere Entscheidungsprobleme

Leerheitsproblem:

Gegeben: Grammatik G.
Frage: Gilt $L(G) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem:

Gegeben: Grammatik G.
Frage: Ist $L(G)$ endlich?

Schnittproblem:

Gegeben: Zwei Grammatiken G_1, G_2.
Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Äquivalenzproblem:

Gegeben: Zwei Grammatiken G_1, G_2.
Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

Satz: Das Leerheitsproblem, das Endlichkeitsproblem, das Äquivalenzproblem und das Schnittproblem sind unentscheidbar für Typ-1-Grammatiken.