Prädikatenlogische Entscheidbarkeitsprobleme

Erfüllbarkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A erfüllbar ?

Gültigkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A allgemeingültig ?

Unerfüllbarkeitsproblem:

Gegeben: prädikatenlogischer Ausdruck A über einer Signatur $\mathcal{S}$
Frage: Ist A unerfüllbar ?

Algorithmus und Entscheidbarkeit

Ein *Algorithmus* überführt in endlicher Zeit die Eingabedaten in eine Antwort "ja" oder "nein" und besteht aus einer Folge von Anweisungen mit folgenden Eigenschaften:

- es gibt eine eindeutig festgelegte Anweisung, die als erste auszuführen ist,

- nach Abarbeitung einer Anweisung gibt es eine eindeutig festgelegte Anweisung, die als nächste abzuarbeiten ist, oder die Abarbeitung des Algorithmus ist beendet.

Ein Problem heißt *entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus zu seiner Lösung gibt, d.h. einen Algorithmus, der auf die Frage die korrekte Antwort "ja" oder "nein" gibt. Falls kein Algorithmus zur Lösung existiert, heißt das Problem *unentscheidbar*.

Unentscheidbarkeit in der Prädikatenlogik

Satz:
Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A eine Tautologie ist.

Satz:
Das Unerfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A unerfüllbar ist.

Satz:
Das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen prädikatenlogischen Ausdruck A feststellt, ob A erfüllbar ist.

Herbrand-Universum – Definition

Definition:
Für einen prädikatenlogischen Ausdruck A in bereinigter Skolemform definieren das Herbrand-Universum $H(A)$ von A induktiv wie folgt:

- Alle in A vorkommenden Konstanten sind in $H(A)$. Falls A keine Konstante enthält, so ist $a \in H(A)$ (wobei a ein Symbol ist, das in A nicht vorkommt).

- Sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ in $H(A)$ und ist f ein k-stelliges Funktionssymbol in A, so ist $f(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in H(A)$.

Herbrand-Erweiterung – Definition

Definition:
Für einen Ausdruck $A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A'$ in bereinigter Skolemform definieren wir die Herbrand-Erweiterung $E(A)$ als die Menge

$$\begin{aligned} E(A) \quad = \quad & \{sub(sub(\ldots(sub(sub(A', x_n, t_n), x_{n-1}, t_{n-1})\ldots), x_2, t_2), x_1, t_1) \mid \\ & t_1, t_2, \ldots, t_n \in H(A)\} \end{aligned}$$

und setzen

$$\begin{aligned} E'(A) \quad = \quad & \{sub(\ldots(sub(sub(B, x_n, t_n), x_{n-1}, t_{n-1})\ldots), x_1, t_1) \mid \\ & B \in B(A), t_1, t_2, \ldots, t_n \in H(A)\}\,. \end{aligned}$$

Sätze der Herbrand-Theorie

Satz: Ein Ausdruck A in bereinigter Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn die Menge $E(A)$ im aussagenlogischen Sinn erfüllbar ist (d.h., wenn es eine Belegung α von $E'(A)$ derart gibt, dass $w_\alpha(B) = 1$ für alle $B \in E(A)$ gilt).

Satz: Ein Ausdruck A in bereinigter Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von $E(A)$ erfüllbar ist.

Satz: Ein Ausdruck A in bereinigter Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(A)$ gibt, die unerfüllbar ist.

Semi-Algorithmus (von Gilmore) für das Unerfüllbarkeitsproblem

Wir nennen ein Verfahren zur Entscheidung einer Eigenschaft E einen Semi-Algorithmus, wenn es

— auf einer Eingabe X mit Eigenschaft E nach einer endlichen Anzahl von Schritten antwortet, dass X die Eigenschaft E hat und

— auf einer Eingabe, die die Eigenschaft E nicht hat, keine Antwort gibt.

Eingabe: prädikatenlogischer Ausdruck A in bereinigter Skolemform,
Aufzählung von $E(A) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$

$n = 1$; $F = A_1$;
`while` (F ist erfüllbar) $\{$ $n = n + 1$; $F = F \wedge A_n$;$\}$
Gib "A ist unerfüllbar" aus (und stoppe);

Grundresolutionsalgorithmus zur Entscheidung der Unerfüllbarkeit eines prädikatenlogischen Ausdrucks

Eingabe: präd.log. Ausdruck $A = \forall x_1 \ldots \forall x_k A'$ in bereinigter Skolemform
A' in konjunktiver Normalform
Aufzählung von $E(A) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$
für $n \geq 1$ sei K_n die Klauselmenge zu A_n

$n = 1$; $M = \{K_1\}$; $M = res^*(M)$;
`while` $(\emptyset \notin M)$ $\{$ $n = n + 1$; $M = M \cup \{K_n\}$; $M = res^*(M)$; $\}$
Gib "A ist unerfüllbar" aus (und stoppe);