

Dreiwertige Logik I

Definition des Ausdrucks der dreiwertigen Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: $\alpha \rightarrow \{0, 1, \times\}$

Wertberechnung:

- $w_\alpha^d(p) = \alpha(p)$ für jede Variable p
- $w_\alpha^d(\neg A)$, $w_\alpha^d((A \wedge B))$, $w_\alpha^d((A \vee B))$ und $w_\alpha^d((A \rightarrow B))$ entsprechend folgender Tabellen

A	$\neg A$	\wedge	0	\times	1	\vee	0	\times	1	\rightarrow	0	\times	1
0	1	0	0	0	0	0	0	\times	1	0	1	1	1
\times	\times	\times	0	\times	\times	\times	\times	\times	1	\times	\times	1	1
1	0	1	0	\times	1	1	1	1	1	1	0	\times	1

- $w_\alpha^d((A \leftrightarrow B)) = w_\alpha^d(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$.

Dreiwertige Logik II

$$\times = \frac{1}{2}$$

$$w_{\alpha}^d(\neg A) = 1 - w_{\alpha}^d(A)$$

$$w_{\alpha}^d((A \wedge B)) = \min\{w_{\alpha}^d(A), w_{\alpha}^d(B)\}$$

$$w_{\alpha}^d((A \vee B)) = \max\{w_{\alpha}^d(A), w_{\alpha}^d(B)\}$$

Satz:

Für einen aussagenlogischen Ausdruck A der dreiwertigen Logik ist es entscheidbar, ob A eine Tautologie oder erfüllbar oder eine Kontradiktion ist.

Fuzzy-Logik

Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_M : G \rightarrow [0, 1]$

Definition des Ausdrucks der Fuzzy-Logik wie bei Aussagenlogik

Belegung: α ist Zugehörigkeitsfunktion

Wertberechnung:

- $w_\alpha^f(p) = \alpha(p)$ für eine Variable p ,
- $w_\alpha^f(\neg A) = 1 - w_\alpha^f(A)$,
- $w_\alpha^f((A \wedge B)) = \min\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,
- $w_\alpha^f((A \vee B)) = \max\{w_\alpha^f(A), w_\alpha^f(B)\}$,
- $w_\alpha^f((A \rightarrow B)) = \min\{1, 1 + w_\alpha^f(B) - w_\alpha^f(A)\}$,
- $w_\alpha^f((A \leftrightarrow B)) = 1 - |w_\alpha^f(A) - w_\alpha^f(B)|$.

Ausdrücke der dynamischen Logik

Definition:

Die Menge $dau\text{sd}$ der Ausdrücke dynamischen Aussagenlogik und die Menge P der Programme der dynamischen Aussagenlogik über der Menge var von Variablen, der Menge anw von Grundanweisungen und den Symbolen $(,), <, >, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \cup, ;, *, ?$ sind induktiv wie folgt definiert.

1. Jede Variable aus var ist ein Element von $dau\text{sd}$.
Jede Anweisung aus anw ist ein Programm aus P .
2. Für $A \in dau\text{sd}$, $B \in dau\text{sd}$, $p \in P$ und $q \in P$ sind auch $\{p; q\}$, $(p \cup q)$, p^* und $A?$ Programme in P und $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ und $\langle p \rangle A$ in $dau\text{sd}$.
3. Ein Wort gehört nur dann zu $dau\text{sd}$ oder P , wenn dies aufgrund der Bedingungen 1 und 2 der Fall ist.

Kripke-Modell

Definition:

Ein Kripke-Modell der dynamischen Logik ist ein Tripel $M = (S, K, R)$, wobei

- S eine beliebige Menge (von Zuständen) ist,
- $K : var \rightarrow 2^S$ ist eine Funktion, die jeder Variablen eine Menge von Zuständen zuordnet,
- $R : anw \rightarrow 2^{S \times S}$ ist eine Funktion, die jeder Anweisung eine binäre Relation über S zuordnet.

Semantik in der dynamischen Logik I

Definition:

Seien die Funktion K für $A \in \text{dausd}$ und $B \in \text{dausd}$ und die Funktion R für $p \in P$ und $q \in P$ definiert. Dann setzen wir

$$K(\neg A) = S \setminus K(A),$$

$$K((A \vee B)) = K(A) \cup K(B),$$

$$K((A \wedge B)) = K(A) \cap K(B),$$

$$K((A \rightarrow B)) = (S \setminus K(A)) \cup K(B),$$

$$K((A \leftrightarrow B)) = ((S \setminus K(A)) \cup K(B)) \cap ((S \setminus K(B)) \cup K(A)),$$

$$K(\langle p \rangle A) = \{s \mid (s, s') \in R(p), s' \in K(A)\},$$

Semantik in der dynamischen Logik II

$$\begin{aligned}R(\{p; q\}) &= R(p) \circ R(q) = \{(s, s') \mid (s, s'') \in R(p), (s'', s') \in R(q)\}, \\R(p \cup q) &= R(p) \cup R(q), \\R(p^*) &= \{(s, s) \mid s \in S\} \cup R(p) \cup (R(p) \circ R(p)) \cup \dots \\&= \bigcup_{i \geq 0} R(p)^i \text{ (transitiver und reflexiver Abschluss von } R(p)\text{)}, \\R(A?) &= \{(s, s) \mid s \in K(A)\}.\end{aligned}$$

Semantische Äquivalenz in der dynamischen Logik

Definition:

Zwei Ausdrücke A und B aus $dausd$ heißen semantisch äquivalent in der dynamischen Aussagenlogik, wenn $K(A) = K(B)$ für alle Kripke-Modelle (S, K, R) gilt.

Bezeichnung: $A \equiv_d B$

Satz:

Für beliebige Ausdrücke A und B aus $dausd$ und beliebige Programme p und q gelten die folgenden Äquivalenzen:

- i) $\langle p \rangle (A \vee B) \equiv_d (\langle p \rangle A \vee \langle p \rangle B)$,
- ii) $\langle (p \cup q) \rangle A \equiv_d (\langle p \rangle A \vee \langle q \rangle A)$,
- iii) $\langle \{p; q\} \rangle A \equiv_d \langle p \rangle \langle q \rangle A$,
- iv) $\langle A? \rangle B \equiv_d (A \wedge B)$.

Entscheidbarkeit in der dynamischen Logik

Satz:

Das Erfüllbarkeitsproblem der dynamischen Aussagenlogik

Gegeben: Ausdruck $A \in \text{dau}sd$ der dynamischen Aussagenlogik

Frage: Ist u erfüllbar?

ist entscheidbar.