Ausdruck der temporale Logik

Definition:
Die Menge $tausd$ der temporalen aussagenlogischen Ausdrücke wird induktiv als Menge von Wörtern über einer Menge var von Variablen und den Symbolen

$$\{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, F, G, F^\infty, G^\infty, U, B, X\}$$

wie folgt definiert:

1. Jede Variable $p \in var$ gehört zu $tausd$.

2. Sind w und v Wörter aus $tausd$, so gehören auch die Wörter

   $\neg w,\ w \wedge v,\ w \vee v,\ w \rightarrow v,\ w \leftrightarrow v,$
   $Fw,\ Gw,\ F^\infty w,\ G^\infty w,\ wUv,\ wBv,\ Xw$

zu $tausd$.

3. Ein Wort gehört nur dann zu $tausd$, wenn dies aufgrund der Bedingungen 1. und 2. der Fall ist.

Zeitlinien der temporalen Logik

Definition:
Unter einer Zeitlinie verstehen wir ein Paar $Z = (M, x)$, wobei
– M selbst ein Paar $M = (S, L)$ ist,
– S eine Menge ist (deren Elemente wir Zustände nennen),
– L eine Funktion von S in 2^{var} ist, und
– x eine Funktion von der Menge $\mathbf{N}_0$ in S.
(x liefert Folge $(x(0), x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$ von Werten aus S)

L definiert für jedes $s \in S$ eine Belegung durch
$$\alpha_s(p) = \begin{cases} 1 & p \in L(s) \\ 0 & p \notin L(s) \end{cases}$$
(x liefert Folge $(\alpha_{x(0)}, \alpha_{x(1)}, \alpha_{x(2)}, \ldots)$ von Belegungen)

$K : var \to 2^S$ mit $s \in K(p)$ genau dann, wenn $p \in L(s)$

Wertberechnung in der temporalen Logik I

Definition:
Der Wert $w_x^M(u)$ eines temporalen aussagenlogischen Ausdrucks $u \in tausd$ bez. einer Zeitlinie (M, x) wird induktiv über den Aufbau der Ausdrücke wie folgt definiert:

Für eine Variable $p \in var$ gilt $w_x^M(p) = 1$ genau dann, wenn $p \in L(x(0))$ gilt.

Sind $w_x^M(u)$ und $w_x^M(v)$ bereits definiert, so setzen wir:

– $w_x^M(\neg u) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = 0$ gilt,

– $w_x^M(u \wedge v) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v) = 1$ gelten,

– $w_x^M(u \vee v) = 0$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v) = 0$ gelten,

– $w_x^M(u \rightarrow v) = 0$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = 1$ und $w_x^M(v) = 0$ gelten,

– $w_x^M(u \leftrightarrow v) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v)$ gilt,

Wertberechnung in der temporalen Logik II

- $w_x^M(Fu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^j}^M(u) = 1$ für ein $j \geq 0$ gilt,
- $w_x^M(Gu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^j}^M(u) = 1$ für alle $j \geq 0$ gilt,
- $w_x^M(F^\infty u) = 1$ gilt genau dann, wenn es zu jedem $j \geq 0$ ein $k \geq j$ mit $w_{x^k}^M(u) = 1$ gibt,
- $w_x^M(G^\infty u) = 1$ gilt genau dann, wenn es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $w_{x^k}^M(u) = 1$ für alle $k \geq j$ gilt,
- $w_x^M(uUv) = 1$ gilt genau dann, wenn es ein $j \geq 0$ gibt, so dass $w_{x^j}^M(v) = 1$ und $w_{x^k}^M(u) = 1$ für $0 \leq k < j$ gelten,
- $w_x^M(uBv) = 1$ gilt genau dann, wenn es für jedes $j \geq 1$ mit $w_{x^j}^M(v) = 1$ ein $k < j$ mit $w_{x^k}^M(u) = 1$ gibt,
- $w_x^M(Xu) = 1$ gilt genau dann, wenn $w_{x^1}^M(u) = 1$ gilt.

Semantische Äquivalenz in der temporalen Logik

Definition:

i) Zwei Ausdrücke $u \in tausd$ und $v \in tausd$ heißen semantisch äquivalent in der temporalen Aussagenlogik, wenn $w_x^M(u) = w_x^M(v)$ für alle Zeitlinien (M, x) gilt.

ii) Ein Ausdruck $u \in tausd$ der temporalen Aussagenlogik heißt erfüllbar, wenn es eine Zeitlinie (M, x) mit $w_x^M(u) = 1$ gibt.

iii) Ein Ausdruck $u \in tausd$ heißt Tautologie in der temporalen Aussagenlogik, wenn $w_x^M(u) = 1$ für alle Zeitlinien (M, x) gilt.

Bezeichnung: $u \equiv_t v$

Semantische Äquivalenzen der temporalen Logik

Satz:
Für beliebige $u \in tausd$ und $v \in tausd$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

i) $Fu \equiv_t ((u \vee \neg u)Uu$,

ii) $Gu \equiv_t \neg F \neg u$,

iii) $F^\infty u \equiv_t GFu$,

iv) $G^\infty u \equiv_t \neg F^\infty \neg u$,

v) $uBv \equiv_t \neg((\neg u)Uv))$.

Satz:
Zu jedem Ausdruck A der temporalen Aussagenlogik gibt es einen Ausdruck B der temporalen Aussagenlogik, der $A \equiv_t B$ erfüllt und nur die Operatoren $\neg$, $\wedge$, U und X enthält.

Entscheidbarkeit in der temporalen Logik

Satz:
Das Erfüllbarkeitsproblem der temporalen Aussagenlogik

$Gegeben$:	Ausdruck $u \in tausd$ der temporalen Aussagenlogik
$Frage$:	Ist u erfüllbar?

ist entscheidbar.