Theoretische Informatik 1 (Bachelor)

Übungsblatt 5
(für die 46. Kalenderwoche)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2007/2008

Magdeburg, 6. November 2007

1. Man konstruiere eine Turing-Maschine M, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $f(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ für $n \in \mathbb{N}$, berechnet. ($\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner ist als x). Dabei sei die verwendete Zahlendarstellung

   a) die binäre Zahlendarstellung (Eingabealphabet $X = \{0, 1\}$) und

   b) die unäre Zahlendarstellung („Strichkode“, Eingabealphabet $X = \{|\}$).

2. Eine *k-Band-Turing-Maschine* hat k Bänder, $k \geq 1$, mit je einem Schreib-Lesekopf, der in jedem Schritt unabhängig von den anderen lesen, schreiben und sich bewegen kann. Ein- und Ausgabe soll auf dem ersten Band analog der Standard-Turing-Maschine erfolgen.

   Formal kann eine solche Maschine als Tupel $M = (X, Z, z_0, Q, \delta)$ definiert werden, mit

   $$\delta \colon (Z \setminus Q) \times (X \cup \{*\})^k \to Z \times (X \cup \{*\})^k \times \{R, L, N\}^k.$$

   Eine Konfiguration K ist ein $(2k+1)$-Tupel $K = (u_1, u_2, \ldots, u_k, z, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ mit $z \in Z$ und $u_i, v_i \in (X \cup \{*\})^*$ für $1 \leq i \leq k$, Wobei z der augenblickliche Zustand und $u_i v_i$ für $1 \leq i \leq k$ der Bandinhalt des i-ten Bandes (abgesehen von weiteren Blankzeichen) sind. Ein *direkter Überführungsschritt* wird analog der Standard-Turing-Maschine definiert.

   Die *berechnete Funktion* f_M einer k-Band-Turing-Maschine $M = (X, Z, z_0, Q, \delta)$ ist dann definiert durch $f_M(w) = v$ für alle $w \in X^*$ genau dann, wenn die Anfangskonfiguration $K_0 = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda, z_0, w, \lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ in endlich vielen Schritten mittels M in eine Endkonfiguration $K_q = (u_1, u_2, \ldots, u_k, q, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ mit $q \in Q$ überführt wird und $u_1 v_1 = *^r v *^s$ für $r, s \geq 0$ ist.

   Zeigen Sie, die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, vermöge $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, kann durch eine geeignete Mehrband-Turing-Maschine berechnet werden (mit der Darstellung der Zahlen als Binärzahlen) – „einfacher“ als mit einer Standard-Turing-Maschine.

3. Zeigen Sie, die Funktion $f \colon \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ vermöge

   $$f(w) = \begin{cases} a & \text{für } w = w^R, \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

   kann durch eine geeignete Mehrband-Turing-Maschine berechnet werden.
   (Dabei steht w^R für das *Spiegelbild* von w – also w *rückwärts* gelesen.)

4. Eine Wortfunktion $h \colon \Sigma^* \to \Delta^*$ heißt *Homomorphismus*, wenn für alle Wörter $v, w \in \Sigma^*$ gilt

   $$h(vw) = h(v)h(w).$$

   Offensichtlich ist ein Homomorphismus $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ eindeutig durch die Wörter $h(a)$ für alle $a \in \Sigma$ bestimmt, und es gilt

   $$h(\lambda) = \lambda, \qquad h(a_1 a_2 \ldots a_n) = h(a_1) h(a_2) \ldots h(a_n).$$

   a) Es sei $X = \{a, b, c\}$ und $h : X^* \to X^*$ der Homomorphismus mit $h(a) = ab$, $h(b) = aba$, $h(c) = a$. Konstruieren Sie eine Turing-Maschine oder eine Mehrband-Turing-Maschine, die die Funktion h berechnet.

   b) Beweisen Sie, dass jeder Homomorphismus Turing-berechenbar ist.

5*. Zeigen Sie, die Funktion $f \colon \{a\}^* \to \{a\}^*$, definiert durch

   $$f(a^n) = \begin{cases} a & \text{für } n \text{ Primzahl}, \\ \lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$, kann durch eine geeignete Mehrband-Turing-Maschine berechnet werden.

---

*Diese Aufgabe zählt nicht zu den zu votierenden Aufgaben.