Theoretische Informatik 1 (Bachelor)

Übungsblatt 13
(für die 4. Kalenderwoche 2008)

zur Vorlesung von Prof. Dr. J. Dassow
im Wintersemester 2007/2008

Magdeburg, 14. Januar 2008

1. Was muss man zeigen, um zu beweisen, dass ein Problem $\mathbb{NP}$-vollständig ist? Welche Optionen gibt es zum Nachweis der Teilbehauptungen?

2. Seien A und B echte, nichtleere Teilmengen von X^*. Zeigen Sie: Falls A und B in $\mathbb{P}$ liegen, so gilt $A \;\alpha\; B$.

3. Seien A und B Sprachen bzw. Probleme, die $\mathbb{NP}$-vollständig sind. Zeigen Sie, dass dann $A \;\alpha\; B$ gilt.

4. In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ *vollständig* oder *Clique*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten aus V' eine Kante existiert.

   In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ *unabhängig*, wenn keine Kante zwischen zwei Knoten aus V' existiert.

   In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bildet eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ eine *Knotenüberdeckung*, wenn jede Kante in E mindestens einen Knoten aus V' enthält.

   Wir definieren die Mengen *Clique*, *Independent Set* (*IS*) und *Vertex Cover* (*VC*) durch

$$\begin{aligned}
\mathit{Clique} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\
&\qquad\quad \text{Clique mit } k \text{ Knoten}, k \in \mathbb{N}\}, \\
\mathit{IS} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\
&\qquad\quad \text{unabhängigen Knotenmenge mit } k \text{ Knoten}, k \in \mathbb{N}\}, \\
\mathit{VC} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\
&\qquad\quad \text{Knotenüberdeckung mit } k \text{ Knoten}, k \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

   a) Beweisen Sie, dass *Clique* polynomial auf *IS* reduzierbar ist.
   b) Beweisen Sie, dass *IS* polynomial auf *VC* reduzierbar ist.
   c) Darf aus den Beweisen zu a) und b) geschlussfolgert werden, dass auch *Clique* polynomial auf *VC* reduzierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.