

Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe
Fakultät für Informatik
Institut für Simulation und Graphik
Otto-von-Guericke-Universität
Postfach 4120
39016 Magdeburg
e-mail: `truthe@isg.cs.uni-magdeburg.de`

19. Dezember 2002

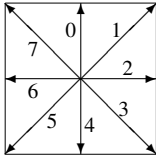
Zusammenfassung

Ketten-Code-Bild-Systeme sind LINDENMAYER-Systeme über einem speziellen Alphabet. Die erzeugten Wörter werden als Bilder interpretiert. Dies führt zu Ketten-Code-Bildsprachen. In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, deterministische Ketten-Code-Bild-Systeme (*sDOL*-Systeme) in Hinsicht auf die Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht.

Zunächst wird eine Abstrahierungshierarchie entwickelt, in der die Interpretation eines Wortes als Bild einen mehrstufigen Prozeß durchläuft. Anhand dieser Hierarchie wird ein Algorithmus aufgestellt, der in polynomialer Zeit die Endlichkeit oder Unendlichkeit eines beliebigen *sDOL*-Systems feststellt.

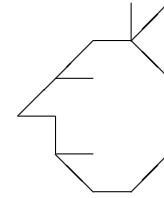
1. Einleitung

Zentrale Aufgaben der Bildverarbeitung liegen beim Beschreiben, Erzeugen, Speichern und Erkennen von Bildern. Mit Ketten-Codes lieferte FREEMAN in den 60er Jahren eine Beschreibungsmöglichkeit für Strichgraphiken [Fre74]. Dabei entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole (Buchstaben) repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. FREEMAN benutzt ein achtelementiges Alphabet $\{0, \dots, 7\}$, dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Zum Beispiel entsteht das nebenstehende Bild aus dem Wort 1261204153445672606:

(Beim Nachvollziehen beginne man an der Nasenspitze.)



Dieser Zusammenhang von Wörtern und Bildern legt es nahe, Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildmengen zu suchen. Für sprachentheoretische Betrachtungen genügen die vier Richtungen $\{0, 2, 4, 6\}$, da die restlichen vier keine andersartigen Resultate liefern und keine anderen Beweismethoden erfordern [DHi89].

In Anlehnung an Plotter-Befehle schreibt man r, u, l, d für die Richtungen *right, up, left, down*. Mittels Ketten-Codes lassen sich Muster – wie Kurven, Fraktale oder Folkloremuster – beschreiben:

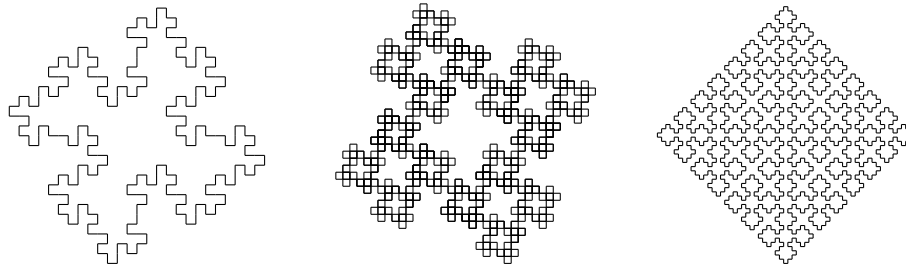


Abbildung 1: Anwendungen von Ketten-Codes

Ketten-Code-Bild-Systeme sind LINDENMAYER-Systeme über Ketten-Codes; in diesem Zusammenhang interessieren die generierten/generierbaren Bildsprachen.

Die vorliegende Arbeit schließt an Untersuchungen zur Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Bildsprachen synchroner Ketten-Code-Bild-Systeme (*sTOL*-Systeme) an, die von Dassow und Hromkovič in [DHR92] präsentiert wurden. Jene Arbeit sagt nichts darüber aus, wie viele Bilder im endlichen Falle erzeugt werden. Während des Arbeitens an diesem Thema stellte sich heraus, daß es unter synchronen, deterministischen Ketten-Code-Bild-Systemen mit dem Synchronisationsparameter $k = 1$ sowohl solche mit endlicher als auch solche mit unendlicher Bildsprache gibt. Dies steht im Gegensatz zu einer Aussage in [DHR92].

In der vorliegenden Arbeit werden Bedingungen hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein solches System eine endliche oder eine unendliche Bildsprache erzeugt. Dafür wurde eine Hierarchie entwickelt, in der die Interpretation eines Wortes als Bild einen mehrstufigen Abstrahierungsprozeß durchläuft.

Auf dieser Grundlage wird ein vollständiges System von Endlichkeitsbedingungen angegeben, das einen Algorithmus liefert, der zu einem beliebigen synchronen, deterministischen Ketten-Code-Bild-System (mit beliebigem Synchronisationsparameter) in polynomieller Zeit entscheidet, ob die erzeugte Bildsprache endlich oder unendlich ist und wie viele Bilder im endlichen Falle höchstens erzeugt werden.

2. Grundlagen

Die Endlichkeitsuntersuchungen zu Bildsprachen synchroner, deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme beruhen auf einer Abstrahierungshierarchie. Die unterste Schicht bilden Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$. Ihnen sind Graphen unterschiedlich hoher Abstraktion zugeordnet, die verschiedene Interpretationen der Wörter darstellen. Zu jedem Ketten-Code-Bild-System über dem Alphabet \mathcal{A} existiert eine solche Hierarchie. Die unterste Ebene umfaßt jeweils die von dem System erzeugte Wortmenge. Die zugeordnete Graphenmenge der obersten Schicht wird als generierte Bildsprache des Systems betrachtet.

2.1. Strukturen über einem Alphabet

Es sei $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$ ein Alphabet. Die Menge \mathcal{A}^* aller endlichen Zeichenketten über dem Alphabet \mathcal{A} umfaßt jene Wörter, die durch Aneinanderreihung (Konkatenation) von Buchstaben aus \mathcal{A} entstehen. Mit λ sei das Leerwort symbolisiert, mit \mathcal{A}^+ die Menge \mathcal{A}^* ohne Leerwort: $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\lambda\}$. Die freie Struktur (\mathcal{A}^*, \cdot) über dem Alphabet \mathcal{A} mit der Operation der Konkatenation \cdot ist ein Monoid.

Die Länge $\#w$ eines Wortes w ist die Anzahl der Buchstaben in w . Die Menge aller Wörter aus \mathcal{A}^* mit der Länge n sei mit \mathcal{A}^n bezeichnet. Ein Wort $w \in \mathcal{A}^n$ sei, wenn nicht anders angegeben, aus Buchstaben w_1, \dots, w_n zusammengesetzt: $w = w_1 \cdots w_n$. In diesem Zusammenhang bezeichnet \vec{w}_i das Teilwort $w_1 \cdots w_i$ für $i = 0, \dots, n$ ($\vec{w}_0 = \lambda$).

Zu einem Wort $w \in \mathcal{A}^n$ und einem Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ sei $\#_x w$ die Anzahl der Vorkommen von x in w . Zu einem Wort $w \in \mathcal{A}^*$ sei $[w]$ die Menge der in w auftretenden Buchstaben:

$$[w] = \{x \mid \#_x w \geq 1\}.$$

Mit den Elementen aus \mathcal{A}^* seien Abbildungen auf dem \mathbb{Z}^2 assoziiert:

$$w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad (w \in \mathcal{A}^*).$$

Die atomaren Abbildungen r, l, u, d ordnen einem Punkt $q \in \mathbb{Z}^2$ seine Nachbarn zu:

$$\begin{array}{ll} r(q) = q + (1, 0) & l(q) = q - (1, 0) \\ u(q) = q + (0, 1) & d(q) = q - (0, 1) \end{array}.$$

(Die Funktionsnamen r, l, u, d stammen von den Richtungen right, left, up, down.)

Die Verschiebungen $x(q) - q$ eines beliebigen Punktes $q \in \mathbb{Z}^2$ zu seinen Nachbarn $x(q)$ seien mit $v_x \in \mathbb{Z}^2$ bezeichnet:

$$v_x = \begin{cases} (1, 0), & \text{falls } x = r \\ (-1, 0), & \text{falls } x = l \\ (0, 1), & \text{falls } x = u \\ (0, -1), & \text{falls } x = d \end{cases}.$$

Die Abbildungen x aus \mathcal{A} sind Translationen. Jede Abbildung $x \in \mathcal{A}$ ist surjektiv (der Wertebereich stimmt mit \mathbb{Z}^2 überein), injektiv (aus $x(\mathfrak{p}) = x(\mathfrak{q})$ folgt stets $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$) und damit bijektiv (umkehrbar eindeutig).

Zwei beliebige Abbildungen x, y heißen disjunkt, wenn ihre Funktionswerte für jedes Argument verschieden sind.

2.1. Folgerung: *Jeweils zwei verschiedene Abbildungen $x, y \in \mathcal{A}$, ($x \neq y$), liefern niemals denselben Nachbarn: $\forall \mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2 : x(\mathfrak{q}) \neq y(\mathfrak{q})$. Das bedeutet, daß die Abbildungen in \mathcal{A} paarweise disjunkt sind.*

Dem Leerwort entspricht die identische Abbildung

$$\lambda : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}.$$

Ein zusammengesetztes Wort $w \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $v \circ w$:

$$v \circ w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } \mathfrak{q} \mapsto w(v(\mathfrak{q})).$$

Der Nullpunkt des \mathbb{Z}^2 sei $\mathfrak{o} = (0, 0)$.

Die dargelegte Interpretation von Wörtern als Abbildungen auf dem \mathbb{Z}^2 ist ein Homomorphismus von der freien Struktur (\mathcal{A}^*, \cdot) in die freie Struktur (\mathcal{A}^*, \circ) . Damit ist (\mathcal{A}^*, \circ) ebenfalls ein Monoid. Zu jeder Abbildung $w \in \mathcal{A}^*$ existiert eine inverse Abbildung w^{-1} mit $w^{-1} \circ w = w \circ w^{-1} = \lambda$:

- Die identische Abbildung ist zu sich selbst invers: $\lambda^{-1} = \lambda$.
- Die Inversen der atomaren Abbildungen sind $r^{-1} = l$, $l^{-1} = r$, $u^{-1} = d$, $d^{-1} = u$ wegen $v_x = -v_{x-1}$ ($x \in \mathcal{A}$).
- Es sei $w = w_1 \circ \dots \circ w_n$ ($w_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$) eine verkettete Abbildung. Dann ist die inverse Abbildung $w^{-1} = w_n^{-1} \circ \dots \circ w_1^{-1}$.

Somit ist die algebraische Struktur (\mathcal{A}^*, \circ) eine Gruppe.

Der Operator \circ wird nicht geschrieben, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Operation es sich handelt. So impliziert beispielsweise $(x_1 x_2)(\mathfrak{o})$, daß $x_1 x_2$ die verkettete Abbildung $x_1 \circ x_2$ symbolisiert, wohingegen $x_1 x_2$ in $[x_1 x_2]$ für das zusammengesetzte Wort $x_1 x_2$ steht.

Die Abbildungen ru, ur und ld, dl weisen einem Punkt \mathfrak{q} seine Diagonalnachbarn zu:

$$ru(\mathfrak{q}) = ur(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} + (1, 1); \quad ld(\mathfrak{q}) = dl(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} - (1, 1).$$

Diese Beziehungen werden durch $\bar{}$ und $^\perp$ gekennzeichnet:

| x | \bar{x} | x^\perp | \bar{x}^\perp |
|-----|-----------|-----------|-----------------|
| r | l | u | d |
| l | r | d | u |
| u | d | r | l |
| d | u | l | r |

Die Abbildungen $w \in \mathcal{A}^n$ sind Translationen, $w(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) = w(\mathfrak{p}) + \mathfrak{q}$, was mittels vollständiger Induktion über n bewiesen werden kann. Dies führt zu folgender Schlußfolgerung.

2.2. Folgerung: Es seien v, w zwei Wörter aus \mathcal{A}^* . Die Abbildung des Nullpunkts durch die verkettete Abbildung $v \circ w$ ist $(v \circ w)(\mathfrak{o}) = v(\mathfrak{o}) + w(\mathfrak{o})$.

Beweis: Die Abbildung des Nullpunkts durch $v \circ w$ liefert

$$\begin{aligned} (v \circ w)(\mathfrak{o}) &= w(v(\mathfrak{o})) \\ &= w(\mathfrak{o} + v(\mathfrak{o})) \\ &= w(\mathfrak{o}) + v(\mathfrak{o}) \\ &= v(\mathfrak{o}) + w(\mathfrak{o}). \end{aligned}$$

✱

2.2. Graphische Einbettung

Ein Graph ist eine Struktur

$$G = (V, R_u, R_g)$$

mit einer endlichen Menge V , einer endlichen Menge R_u von symmetrischen Relationen und einer endlichen Menge R_g von asymmetrischen Relationen auf V (s. [Hol02]).

Ein Gittergraph ist ein Graph mit folgenden Eigenschaften:

- Die Knotenmenge ist eine Untermenge des \mathbb{Z}^2 .
- Jede Kante verbindet zwei Nachbarn $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ und $x(\mathfrak{q})$ für ein $x \in \mathcal{A}$.

Die Position der Knoten ist wesentlich; ein Umbenennen von Knoten führt im allgemeinen nicht zu einem isomorphen Graphen. Beispielsweise sollen die Graphen $\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}$ und $\begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \\ \bullet \end{array}$ als verschieden angesehen werden.

Zu jedem Punkt $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ gibt es Funktionen, die einem Wort $w \in \mathcal{A}^n$

- die Knotenmenge $\odot^{\mathfrak{a}}(w) = \{ \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) \mid i = 0, \dots, n \}$,
- den gerichteten Gittergraphen (möglicherweise mit Mehrfachkanten)

$$g^{\mathfrak{a}}(w) = \left(\odot^{\mathfrak{a}}(w), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \}_{i=1, \dots, n} \right),$$

- den schlichten gerichteten Gittergraphen $s^{\mathfrak{a}}(w)$ zu $g^{\mathfrak{a}}(w)$,
- die Kantenmenge $\parallel^{\mathfrak{a}}w$ von $s^{\mathfrak{a}}(w)$ (in einer anderen Notation)

$$\parallel^{\mathfrak{a}}w = \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), w_i) \mid i = 1, \dots, n \}$$

- und das Bild (den Schatten von $s^{\mathfrak{a}}(w)$)

$$p^{\mathfrak{a}}(w) = (\odot^{\mathfrak{a}}(w), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a})) \mid i = 0, \dots, n \})$$

je zwei Wörter $v, w \in \mathcal{A}^*$ gilt

$$\begin{aligned} \odot^{\mathbf{a}}(vw) &= \odot^{\mathbf{a}}(v) \cup \odot^{v(\mathbf{a})}(w), \\ g^{\mathbf{a}}(vw) &= g^{\mathbf{a}}(v) \cup g^{v(\mathbf{a})}(w), \\ \parallel^{\mathbf{a}}vw &= \parallel^{\mathbf{a}}v \cup \parallel^{v(\mathbf{a})}w, \\ p^{\mathbf{a}}(vw) &= p^{\mathbf{a}}(v) \cup p^{v(\mathbf{a})}(w). \end{aligned}$$

Beweis: Es seien v ein Wort aus \mathcal{A}^n und w aus \mathcal{A}^m . Dann gilt für die Vereinigung der Knotenmengen $\odot^{\mathbf{a}}(v)$ und $\odot^{v(\mathbf{a})}(w)$

$$\begin{aligned} \odot^{\mathbf{a}}(v) \cup \odot^{v(\mathbf{a})}(w) &= \{ \vec{v}_i(\mathbf{a}) \mid i = 0, \dots, n \} \cup \{ \vec{w}_i(v(\mathbf{a})) \mid i = 0, \dots, m \} \\ &= \{ \mathbf{a}, v_1(\mathbf{a}), \dots, v(\mathbf{a}), w_1(v(\mathbf{a})), \dots, vw(\mathbf{a}) \} \\ &= \odot^{\mathbf{a}}(vw). \end{aligned}$$

Die Vereinigung der anderen Mengen kann auf ähnliche Weise gezeigt werden. (Man beachte, daß die nicht-schlichten Graphen möglicherweise Mehrfachkanten enthalten.)

✱

Die Mengen

- \mathcal{A}^* von Wörtern,,
- $\mathcal{G} = \{ g^{\mathbf{a}}(w) \mid w \in \mathcal{A}^*, \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2 \}$ von gerichteten Graphen,
- $\mathcal{S} = \{ s^{\mathbf{a}}(w) \mid w \in \mathcal{A}^*, \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2 \}$ von schlichten gerichteten Graphen und
- $\mathcal{P} = \{ p^{\mathbf{a}}(w) \mid w \in \mathcal{A}^*, \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2 \}$ von Bildern

bilden unterschiedliche Ebenen einer Abstrahierungshierarchie. Das folgende Diagramm zeigt einen Ausschnitt:

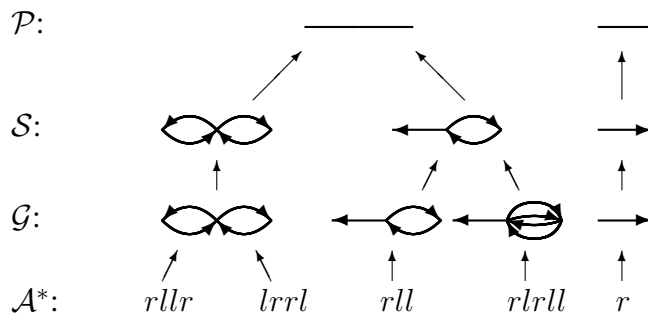


Abbildung 2: Abstrahierungshierarchie

Ein späteres Ableiten von Wörtern durch simultanes Ersetzen von Buchstaben kann als

Ableiten von Graphen interpretiert werden, bei dem Kanten durch Graphen ersetzt werden. Bei einem deterministischen System wird ein Buchstabe stets durch das gleiche Wort ersetzt. Somit wird eine Kante stets durch den gleichen Graphen ersetzt – die Ableitung einer Kante ist unabhängig von der Häufigkeit, mit der sie auftritt. Bei einem nichtdeterministischen System kann jedoch ein Buchstabe an einer Stelle durch ein anderes Wort als der gleiche Buchstabe an einer anderen Stelle ersetzt werden. Daher kann eine Kante, die mehrfach auftritt, (mehrfach) durch unterschiedliche Graphen ersetzt werden – die Häufigkeit des Auftretens ist wesentlich. Aus diesem Grunde werden Graphen mit Mehrfachkanten in der Hierarchie belassen, obwohl in dieser Arbeit schlichte Graphen ausreichen.

Eine Menge R von Punkten in \mathbb{Z}^2 heißt Rechteckmenge, wenn es zwei Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ aus R gibt, so daß

$$R = \left\{ \mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{array}{l} \min \{ p_x, q_x \} \leq a_x \leq \max \{ p_x, q_x \} \text{ und} \\ \min \{ p_y, q_y \} \leq a_y \leq \max \{ p_y, q_y \} \end{array} \right\}$$

gilt (also alle und nur die Punkte zwischen \mathfrak{p} und \mathfrak{q} zur Menge R gehören). Ein solches Rechteck wird durch $R = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ beschrieben.

Es seien U, V zwei Rechteckmengen mit

$$U = \{ \mathfrak{x} \mid \underline{\mathfrak{u}} \leq \mathfrak{x} \leq \bar{\mathfrak{u}} \}, \quad V = \{ \mathfrak{x} \mid \underline{\mathfrak{v}} \leq \mathfrak{x} \leq \bar{\mathfrak{v}} \},$$

wobei die Relation \leq komponentenweise gemeint ist: $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \iff a_x \leq b_x \wedge a_y \leq b_y$. Dann gilt für den Durchschnitt

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{ \mathfrak{x} \mid \underline{\mathfrak{u}} \leq \mathfrak{x} \leq \bar{\mathfrak{u}} \wedge \underline{\mathfrak{v}} \leq \mathfrak{x} \leq \bar{\mathfrak{v}} \} \\ &= \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \max \{ \underline{u}_x, \underline{v}_x \} \leq x \leq \min \{ \bar{u}_x, \bar{v}_x \} \text{ und} \\ \max \{ \underline{u}_y, \underline{v}_y \} \leq y \leq \min \{ \bar{u}_y, \bar{v}_y \} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß der Durchschnitt zweier Rechteckmengen ebenfalls eine Rechteckmenge ist.

Die Bildfläche einer Menge $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, geschrieben \mathfrak{B}_S , ist die kleinste Rechteckmenge, die S enthält. Das Skalieren einer Bildfläche $\mathfrak{B} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$ um einen Faktor $s \in \mathbb{N}_0$ liefert die Bildfläche

$$s\mathfrak{B} = \{ s\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{B} \} = [s\mathfrak{p}, s\mathfrak{q}].$$

Die Vereinigung zweier Bildflächen liefert in der Regel keine Rechteckmenge. Eine erweiterte Vereinigung zweier Bildflächen soll die Bildfläche der Vereinigung sein:

$$\mathfrak{B}_X \cup \mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_{X \cup Y}.$$

Es seien $\mathfrak{B} = [\underline{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{b}}], \mathfrak{C} = [\underline{\mathfrak{c}}, \bar{\mathfrak{c}}]$ zwei Bildflächen und es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\underline{\mathfrak{b}} \leq \bar{\mathfrak{b}}$ und $\underline{\mathfrak{c}} \leq \bar{\mathfrak{c}}$, dann ist die erweiterte Vereinigung

$$\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} = \left[\left(\min \{ \underline{\mathfrak{b}}_x, \underline{\mathfrak{c}}_x \}, \min \{ \underline{\mathfrak{b}}_y, \underline{\mathfrak{c}}_y \} \right), \left(\max \{ \bar{\mathfrak{b}}_x, \bar{\mathfrak{c}}_x \}, \max \{ \bar{\mathfrak{b}}_y, \bar{\mathfrak{c}}_y \} \right) \right].$$

Zu jedem Punkt $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ und Wort $w \in \mathcal{A}^*$ seien $|\cdot|_w^{\mathfrak{a}}, \dot{\cdot}_w^{\mathfrak{a}}, \cdot|_w^{\mathfrak{a}}, \overline{\cdot}_w^{\mathfrak{a}}$ die Randkoordinaten der Knoten aus $\odot^{\mathfrak{a}}(w)$:

$$\begin{aligned} |\cdot|_w^{\mathfrak{a}} &= \min \{ x \mid (x, y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(w) \}, & \dot{\cdot}_w^{\mathfrak{a}} &= \min \{ y \mid (x, y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(w) \}, \\ \cdot|_w^{\mathfrak{a}} &= \max \{ x \mid (x, y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(w) \}, & \overline{\cdot}_w^{\mathfrak{a}} &= \max \{ y \mid (x, y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(w) \}. \end{aligned}$$

Die Symbole $\sqsubset_w^{\mathfrak{a}}$ und $\sqsupset_w^{\mathfrak{a}}$ stehen für die Eckpunkte

$$\sqsubset_w^{\mathfrak{a}} = (|\cdot|_w^{\mathfrak{a}}, \dot{\cdot}_w^{\mathfrak{a}}), \quad \sqsupset_w^{\mathfrak{a}} = (\cdot|_w^{\mathfrak{a}}, \overline{\cdot}_w^{\mathfrak{a}}).$$

Zu jedem Punkt $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ sei $\square^{\mathfrak{a}}$ eine Funktion, die einem Wort $w \in \mathcal{A}^*$ die Bildfläche der Knotenmenge $\odot^{\mathfrak{a}}(w)$ zuordnet:

$$\square^{\mathfrak{a}}(w) = [\sqsubset_w^{\mathfrak{a}}, \sqsupset_w^{\mathfrak{a}}].$$

Der Index \mathfrak{a} wird im Falle des Nullpunkts ($\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$) weggelassen.

2.3. Spezielle Endomorphismen

Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$. Ein Endomorphismus h auf (\mathcal{A}^*, \cdot) heißt (κ, μ) -Endomorphismus, falls die folgenden Bedingungen für alle $x \in \mathcal{A}$ erfüllt sind:

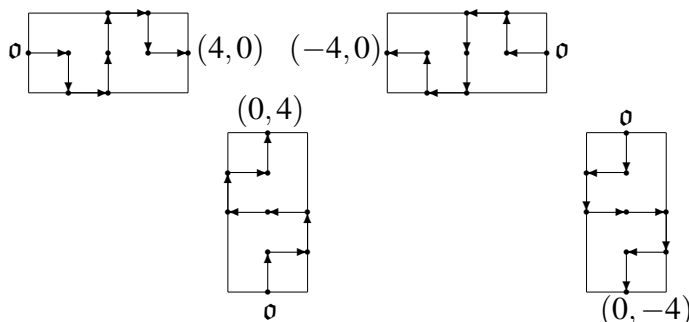
1. $(h(x))(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x$.
2. $\square(h(x)) \subseteq \kappa [\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \cup \mu [\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

Das folgende Beispiel soll dies veranschaulichen.

2.6. Beispiel: Es sei h ein Endomorphismus auf \mathcal{A}^* mit $r \mapsto rdruurdr$, $l \mapsto lulddlul$, $u \mapsto urulluru$ und $d \mapsto dldrrdld$. Dann gilt

$$\begin{aligned} rdruurdr(\mathfrak{o}) &= 4\mathfrak{v}_r + 2\mathfrak{v}_d + 2\mathfrak{v}_u = 4\mathfrak{v}_r, \\ lulddlul(\mathfrak{o}) &= 4\mathfrak{v}_l + 2\mathfrak{v}_u + 2\mathfrak{v}_d = 4\mathfrak{v}_l, \\ urulluru(\mathfrak{o}) &= 4\mathfrak{v}_u + 2\mathfrak{v}_r + 2\mathfrak{v}_l = 4\mathfrak{v}_u, \\ dldrrdld(\mathfrak{o}) &= 4\mathfrak{v}_d + 2\mathfrak{v}_l + 2\mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_d. \end{aligned}$$

Somit ist die erste Bedingung erfüllt. Die schlichten gerichteten Graphen von $h(x)$ sind:



Für jeden Punkt $x \in \mathcal{A}$ gilt: Die Punkte aus $\odot(h(x))$ liegen in dem Rechteck, das durch die Strecken $[\mathfrak{o}, 4\mathfrak{v}_x]$ und $[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}]$ aufgespannt wird. Daher gilt für die Bildfläche

$$\square(h(x)) = 4[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \cup [\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}].$$

Somit ist h ein $(4, 1)$ -Endomorphismus. Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Endpunkte einer Zeichnung liegen; die zweite bewirkt, daß die Bilder in gewissen Rechtecken liegen. \heartsuit

Die n -stellige Verkettung eines Endomorphismus h wird kurz h^n geschrieben. Angewendet auf ein Wort $w \in \mathcal{A}^*$, liefert sie die n -te Ableitung von w , geschrieben $w^{(n)}$ (w' , w'' , w''' für die ersten drei Ableitungen, $w^{(0)} = w$). Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.

2.4. Ketten-Code-Bild-Systeme

Ein synchrones, deterministisches, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (kurz *sDOL*-System) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$, einem (κ, μ) -Endomorphismus h auf (\mathcal{A}^*, \cdot) und einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$.

Die von einem *sDOL*-System G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω :

$$B_G = \left\{ p(\omega^{(n)}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Ein *sDOL*-System heißt längenkontrahierend (-konstant, -expandierend), wenn der zugrundeliegende (κ, μ) -Endomorphismus diese Eigenschaft hat.

3. Endlichkeitsuntersuchungen

Bei Aufgaben, in denen Ketten-Code-Bild-Systeme eine Rolle spielen, muß geklärt werden, ob ein gegebenes System eine endliche oder unendliche Bildmenge erzeugt oder welche Systeme Bildmengen mit gewissen Eigenschaften erzeugen.

In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein *sDOL*-System eine endliche Bildmenge erzeugt oder nicht.

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sDOL*-System mit einem (κ, μ) -Endomorphismus h . Die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) eines Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ bildet den Nullpunkt \mathfrak{o} auf den Punkt $\kappa^n \mathfrak{v}_x$ ab: $x^{(n)}(\mathfrak{o}) = \kappa^n \mathfrak{v}_x$. Dies kann mittels vollständiger Induktion über n gezeigt werden. Aus der ersten Synchronisationsbedingung folgt desweiteren, daß

$$x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x + c \mathfrak{v}_x + c \mathfrak{v}_{\bar{x}} + d \mathfrak{v}_{x^\perp} + d \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}$$

für zwei natürliche Zahlen c und d gilt. Daraus folgt, daß x^\perp und \bar{x}^\perp gleich häufig in der Ableitung x' auftreten, und die Anzahl der Vorkommen von x um κ größer ist, als die von \bar{x} . Diese Beobachtungen werden in der nächsten Folgerung zusammengefaßt.

3.1. Folgerung: Für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt

1. $x^{(n)}(\emptyset) = \kappa^n \mathbf{v}_x$ für $n \in \mathbb{N}$,
2. $\#_x x' = \kappa + \#_{\bar{x}} x'$,
3. $\#_{x^\perp} x' = \#_{\bar{x}^\perp} x'$.

Ketten-Code-Bild-Systeme werden durch ihr „Längenverhalten“ unterschieden (gekennzeichnet durch den Parameter κ).

3.1. Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sDOL*-System mit einem längenkontrahierenden (κ, μ) -Endomorphismus h . Da $\kappa < 1$ und $\kappa \in \mathbb{N}_0$ gilt, muß κ gleich 0 sein.

Die zweite Synchronisationsbedingung bewirkt, daß die Bildfläche der Ableitung x' eines Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ eine Strecke ist: $\square(x') \subseteq \mu[\mathbf{v}_x^\perp, \mathbf{v}_{\bar{x}^\perp}]$. So treten x und \bar{x} nicht im Wort x' auf.

Für einen beliebiges Wort $w \in \mathcal{A}^*$ tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

1. $w' = \lambda$. Dann sind auch alle weiteren Ableitungen leer: $w^{(n)} = \lambda, n \geq 1$.
2. $w' \neq \lambda, w'' = \lambda$. Dann sind auch alle weiteren Ableitungen leer: $w^{(n)} = \lambda, n \geq 2$.
3. $w' \neq \lambda, w'' \neq \lambda$. Da $w' \neq \lambda$ gilt, tritt ein Buchstabe $x \in \mathcal{A}$ in w' auf und damit auch \bar{x} . Somit ist die Buchstaben-Menge $[w']$ eine der Mengen $\{r, l\}, \{u, d\}$ oder \mathcal{A} .

Als Beispiel sei h ein $(0, \mu)$ -Endomorphismus mit $r \mapsto ud, u \mapsto rl, d \mapsto \lambda$ und $l \mapsto \lambda$. Gilt $w = r$, dann ist $[w'] = \{u, d\}$, gilt $w = u$, dann ist $[w'] = \{r, l\}$. Wenn $w = ru$ ist, dann besteht die Buchstaben-Menge $[w']$ aus allen Buchstaben: $[w'] = \mathcal{A}$.

Gilt $[w'] = \{r, l\}$, dann ist die Buchstaben-Menge $[w''] = \{u, d\}$ (sie kann nicht leer sein, da $w'' \neq \lambda$). Ähnlich ist $[w''] = \{r, l\}$, wenn $[w'] = \{u, d\}$ gilt. Gilt $[w'] = \mathcal{A}$, dann tritt ein Buchstabe $x \in \mathcal{A}$ gemeinsam mit x^\perp oder \bar{x}^\perp im Wort w auf. Da diese Buchstaben auch in w' auftreten, besteht w'' aus den gleichen Buchstaben wie w' . Zusammengefaßt liefert dies

$$[w''] = \begin{cases} \{u, d\}, & \text{falls } [w'] = \{r, l\}, \\ \{r, l\}, & \text{falls } [w'] = \{u, d\}, \\ \mathcal{A}, & \text{falls } [w'] = \mathcal{A}. \end{cases}$$

Auf analoge Weise erhält man

$$[w'''] = \begin{cases} \{r, l\}, & \text{falls } [w'] = \{r, l\}, \\ \{u, d\}, & \text{falls } [w'] = \{u, d\}, \\ \mathcal{A}, & \text{falls } [w'] = \mathcal{A}, \end{cases}$$

also $[w'''] = [w']$. Daher stimmt auch die Buchstaben-Menge der vierten mit der der zweiten überein:

$$[w^{(4)}] = \bigcup_{x \in [w''']} [x'] = \bigcup_{x \in [w']} [x'] = [w''].$$

Aus dieser Fallunterscheidung schließt man induktiv folgendes.

3.2. Folgerung: Die Buchstaben-Mengen ab der 2. Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ sind entweder leer oder alternieren ab der 1. Ableitung:

$$[w''] = \emptyset \implies [w^{(n)}] = \emptyset \quad (n \geq 2),$$

$$[w''] \neq \emptyset \implies [w^{(2n-1)}] = [w'] \wedge [w^{(2n)}] = [w''] \quad (n \geq 2).$$

Ein ähnlicher Zusammenhang läßt sich auch für Kantenmengen finden. Dazu sei $w^{(n)}$ die n -te Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$:

$$w^{(n)} = x_1 \cdots x_l \quad (x_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, l).$$

Für die Kantenmenge von $w^{(n+1)}$ gilt nach Folgerung 2.5:

$$\|w^{(n+1)}\| = \|x'_1 \cup \|x'_1(\mathfrak{o})x'_2 \cup \dots \cup \|x'_1 \cdots x'_{l-1}(\mathfrak{o})x'_l\|.$$

Aus den Folgerungen 2.2 und 3.1 ergibt sich $(x'_1 \cdots x'_i)(\mathfrak{o}) = x'_1(\mathfrak{o}) + \dots + x'_i(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ für $i = 1, \dots, l$, folglich gilt

$$\|w^{(n+1)}\| = \bigcup_{i=1}^l \|x'_i\| = \bigcup_{x \in [w^{(n)}]} \|x'\| \quad (\text{wenn } \hat{x} = \check{x}, \text{ so auch } \hat{x}' = \check{x}' \text{ und } \|\hat{x}'\| = \|\check{x}'\|).$$

Zusammenen mit Folgerung 3.2 schließt man: Die Kantenmengen ab der 2. Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ sind entweder leer oder alternieren ab der 2. Ableitung:

Wenn $w'' = \lambda$, so ist $\|w^{(n)}\| = \emptyset$ für $n \geq 2$; sonst gilt $\|w^{(2n)}\| = \|w''\|$ und $\|w^{(2n+1)}\| = \|w'''\|$ für $n \geq 2$ (die Kantenmengen gerader Ableitungen stimmen ab der zweiten überein, die ungerader Ableitungen ab der dritten).

Mit Folgerung 2.4 kann man auf die zugeordneten Bilder schließen: Wenn $w'' = \lambda$ gilt, bestehen die Bilder zu $w^{(n)}$ ab $n \geq 2$ nur aus dem Nullpunkt, sonst stimmen die Bilder zu geraden Ableitungsstufen ab der zweiten Ableitung und die zu ungeraden Ableitungsstufen ab der dritten überein. Nach der dritten Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ entsteht kein neues Bild.

3.3. Satz: Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein langenkontrahierendes $sDOL$ -System. Dann ist die erzeugte Bildsprache B_G endlich und enthält höchstens vier Bilder:

$$B_G = \{ p(\omega), p(\omega'), p(\omega''), p(\omega''') \}.$$

Das folgende Beispiel zeigt ein langenkontrahierendes $sDOL$ -System und seine Bildsprache.

3.4. Beispiel: Es sei $G = (\mathcal{A}, h, r)$ ein $sDOL$ -System mit einem $(0, \mu)$ -Endomorphismus h mit $r \mapsto ud, l \mapsto du, u \mapsto rl$ und $d \mapsto \lambda$. Die von G erzeugten Wörtern sind $r, ud, rl, uddu, (rl)^2, (uddu)^2, (rl)^4, (uddu)^4, \dots$. Diesen entsprechen die Bilder

$$\rightarrow, \downarrow, \rightarrow, \downarrow, \rightarrow, \downarrow, \rightarrow, \downarrow, \dots$$

Andere Bilder entstehen nicht; die Bildsprache ist $\left\{ \rightarrow, \downarrow, \rightarrow, \downarrow \right\} = \left\{ \rightarrow, \downarrow, \downarrow \right\}$. \heartsuit

3.2. Langenexpandierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein langenexpandierendes $sDOL$ -System. Da der (κ, μ) -Endomorphismus h längenexpandierend ist, gilt $\kappa > 1$.

Es sei $x \in \mathcal{A}$ der Anfangsbuchstabe von ω (da $\omega \in \mathcal{A}^+$ nicht das Leerwort ist, besteht es aus mindestens einem Buchstaben): $\omega = xw$ ($w \in \mathcal{A}^*$). Die n -te Ableitung von ω ist dann $\omega^{(n)} = x^{(n)}w^{(n)}$. Somit gehört für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Punkt $x^{(n)}(\mathfrak{o})$ zum Graphen von $\omega^{(n)}$:

$$x^{(n)}(\mathfrak{o}) \in \odot(\omega^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Desweiteren seien X_ω die Menge aller Punkte $x^{(n)}(\mathfrak{o})$, V_ω die Vereinigung der Knotenmengen $\odot(\omega^{(n)})$ und P_ω die Menge aller Bilder $p(\omega^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$X_\omega = \left\{ x^{(n)}(\mathfrak{o}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ k^n \mathfrak{v}_x \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (\text{Folg. 3.1}),$$

$$V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \odot(\omega^{(n)}),$$

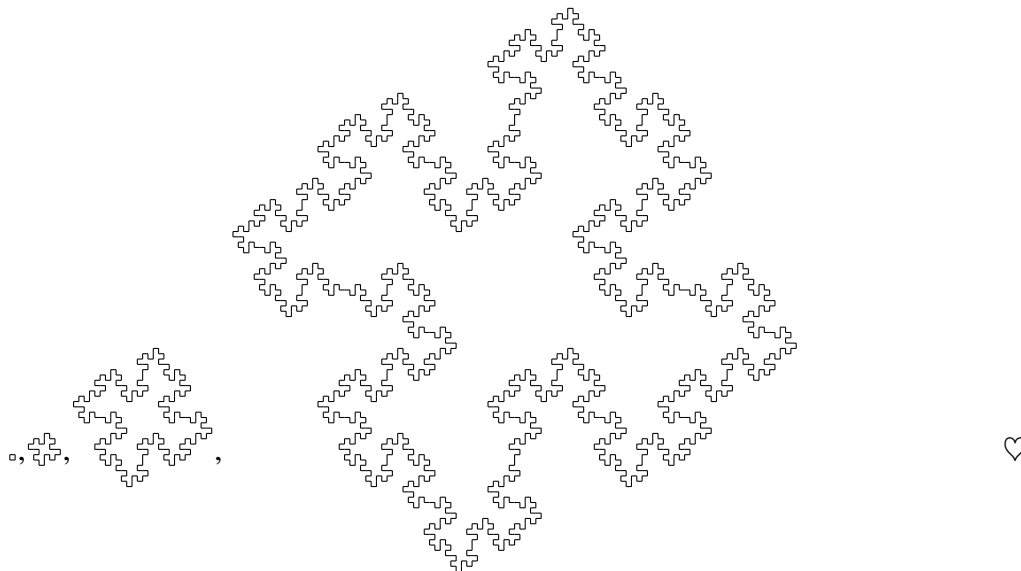
$$P_\omega = \left\{ p(\omega^{(n)}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Die Menge X_ω ist unendlich, da $\kappa > 1$ und $\mathfrak{v}_x \neq \mathfrak{o}$ gilt. Jeder Punkt aus X_ω liegt auch in V_ω : $X_\omega \subseteq V_\omega$; daher ist die Menge V_ω auch unendlich. Jede Knotenmenge $\odot(\omega^{(n)})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist endlich; folglich müssen zur Vereinigung V_ω unendlich viele verschiedene Knotenmengen beitragen. Sind die Knotenmengen zweier Wörtern u, v verschieden, so sind es auch ihre Bilder. Folglich gibt es unter den Bildern $p(\omega^{(n)})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ unendlich viele verschiedene: $|P_\omega| = \infty$.

3.5. Satz: Die Bildsprache jedes langenexpandierenden $sDOL$ -Systems ist unendlich.

Das folgende Beispiel zeigt ein langenexpandierendes *sDOL*-System.

3.6. Beispiel: Es sei $G = (\mathcal{A}, h, ruld)$ ein langenexpandierendes *sDOL*-System mit dem $(4, 1)$ -Endomorphismus h aus dem Beispiel von Seite 9. Die bis zur dritten Ableitung erzeugten Bilder sind:



3.3. Langenkonstante Ketten-Code-Bild-Systeme

Im Gegensatz zu den vorherigen Situationen gibt es unter den langenkonstanten *sDOL*-Systems sowohl solche mit endlicher als auch solche mit unendlicher Bildmenge. Das folgende Beispiel zeigt ein *sDOL*-System, das eine endliche Bildsprache erzeugt und ein ähnliches mit einer unendlichen Bildsprache.

3.7. Beispiel: Es sei h ein $(1, \mu)$ -Endomorphismus mit $r \mapsto rud$, $u \mapsto uldru$, $d \mapsto d$ und $l \mapsto l$. Dann ist $G = (\mathcal{A}, h, r)$ ein längenkonstantes *sDOL*-System. Der schlichte gerichtete Graph des Axioms ist \rightarrow , der zur ersten Ableitung ist $\rightarrow \uparrow$ und der zur zweiten $\rightarrow \uparrow \rightarrow$. Die Graphen späterer Ableitungen stimmen überein: $\rightarrow \uparrow \rightarrow$. Damit ist die erzeugte Bildsprache endlich: $B_G = \{ _ , _ \uparrow , \square \}$.

Nun sei h so abgeändert, daß l auf lrl abgebildet wird. Dann ist der schlichte gerichtete Graph zur dritten Ableitung von dem zur zweiten verschieden, nämlich $\rightarrow \uparrow \rightarrow$. Es entstand eine neue r -Kante, die im nächsten Schritt durch ihre Ableitung ersetzt wird, was bei der

vierten Ableitung zu dem Graphen $\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow$ führt. Bei jeder dritten Ableitung entsteht eine neue r -Kante. Daher steigt mit jeder Ableitung die Bildgröße; die Bildsprache ist unendlich. ♡

Das obige Beispiel zeigt, daß im Falle $\kappa = 1$ nähere Untersuchungen nötig sind, um herauszufinden, wann ein *sDOL*-System eine endliche Bildsprache erzeugt und wann nicht. Verschiedene Beispiele legen die Vermutung nahe, daß der Unterschied zwischen den

Kantenmengen zur zweiten und dritten Ableitung die Endlichkeit anzeigt: Wenn es keinen Unterschied gibt, ist die Bildsprache endlich; wenn es einen gibt, ist die Bildsprache unendlich. Diese Vermutung wird im folgenden bestätigt und bewiesen.

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkonstantes *sDOL*-System. Zunächst wird die erste Aussage aus der Folgerung 3.1 auf Wörter ausgedehnt.

3.8. Folgerung: *Es sei h ein $(1, \mu)$ -Endomorphismus. Dann gilt für jedes Wort $w \in \mathcal{A}^*$ und jede Ableitungsstufe $n \in \mathbb{N}_0$: $w^{(n)}(\sigma) = w(\sigma)$.*

Beweis: Es sei $w \in \mathcal{A}^l$ ein Wort der Länge l : $w_1 \cdots w_l$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w^{(n)}(\sigma) &= (w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)})(\sigma) \\ &= w_1^{(n)}(\sigma) \cdots w_l^{(n)}(\sigma) && \text{(Folg. 2.2)} \\ &= \mathfrak{v}_{w_1} + \cdots + \mathfrak{v}_{w_l} && \text{(Folg. 3.1)} \\ &= w_1(\sigma) + \cdots + w_l(\sigma) \\ &= w(\sigma), \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. *

Zu einem Wort $w \in \mathcal{A}^*$ liefern der Operator $\|\cdot\|$ die Kantenmenge $\|w$ und die n -stellige Verkettung eines $(1, \mu)$ -Endomorphismus h die n -te Ableitung $w^{(n)}$, deren Kantenmenge wiederum $\|w^{(n)}$ ist. Wie die Kantenmenge $\|w^{(n)}$ aus der Kantenmenge $\|w$ erhalten werden kann, zeigt die nächste Folgerung.

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \|w \\ \downarrow h & & \downarrow? \\ w^{(n)} & \xrightarrow{\|\cdot\|} & \|w^{(n)} \end{array}$$

3.9. Folgerung: *Die Kantenmenge $\|w^{(n)}$ zur n -ten Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ ist die Vereinigung der n -ten Ableitungen aller in $\|w$ auftretenden Kanten:*

$$\|w^{(n)} = \bigcup_{(q,x) \in \|w} \|q x^{(n)}$$

Beweis: Es sei $w \in \mathcal{A}^l$, $w = w_1 \cdots w_l$. Dann ist die n -te Ableitung von w

$$w^{(n)} = w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)}.$$

Für die Kantenmenge zu w gilt

$$\begin{aligned} \|w &= \|w_1 \cup \|\overrightarrow{w_1(\sigma)} w_2 \cup \cdots \cup \|\overrightarrow{w_{l-1}(\sigma)} w_l && \text{(Folg. 2.5)} \\ &= \{(\sigma, w_1)\} \cup \{(\overrightarrow{w_1(\sigma)}, w_2)\} \cup \cdots \cup \{(\overrightarrow{w_{l-1}(\sigma)}, w_l)\} \\ &= \{(\sigma, w_1), (\overrightarrow{w_1(\sigma)}, w_2), \dots, (\overrightarrow{w_{l-1}(\sigma)}, w_l)\}, \end{aligned}$$

und für die Kantenmenge zu $w^{(n)}$ gilt

$$\|w^{(n)} = \|w_1^{(n)} \cup \|\overrightarrow{w_1^{(n)}(\sigma)} w_2^{(n)} \cup \dots \cup \|\overrightarrow{w_{l-1}^{(n)}(\sigma)} w_l^{(n)} \quad (\text{Folg. 2.5})$$

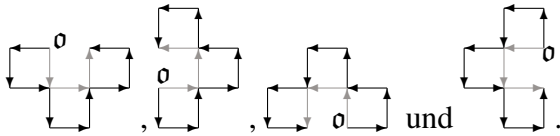
$$= \|w_1^{(n)} \cup \|\overrightarrow{w_1^{(n)}(\sigma)} w_2^{(n)} \cup \dots \cup \|\overrightarrow{w_{l-1}^{(n)}(\sigma)} w_l^{(n)} \quad (\text{Folg. 3.8})$$

$$= \bigcup_{(q,x) \in \|w} \|q x^{(n)},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ✱

Der schlichte gerichtete Graph zur n -ten Ableitung eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ entsteht aus dem schlichten gerichteten Graphen zu w , indem jede x -Kante $(q, x) \in \|w$ durch den schlichten gerichteten Graphen zur n -ten Ableitung von x bezüglich des Punktes q ersetzt wird.

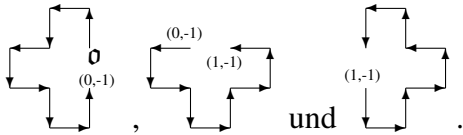
3.10. Beispiel: Es sei h ein $(1, \mu)$ -Endomorphismus mit $r \mapsto dru$, $u \mapsto rul$, $l \mapsto uld$ und $d \mapsto ldr$. Die folgende Abbildung zeigt für jeden Buchstaben die schlichten gerichteten Graphen zu den zweiten Ableitungen (die Graphen zu den ersten Ableitungen sind in grauer Farbe eingefügt):



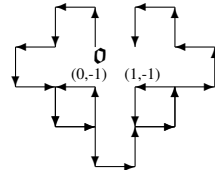
Es sei w die erste Ableitung von r . Dann ist die zugehörige Kantenmenge $\|w = \|dru$ mit

$$\|dru = \{ (\sigma, d), ((0, -1), r), ((1, -1), u) \}.$$

Die Kantenmenge zur zweiten Ableitung von w besteht aus allen Kanten der zweiten Ableitung von d bezüglich σ , der zweiten Ableitung von r bezüglich $(0, -1)$ und der zweiten Ableitung von u bezüglich $(1, -1)$: $\|w'' = \|\sigma d'' \cup \|(0,-1)r'' \cup \|(1,-1)u''$. Diesen Kantenmengen entsprechen die schlichten gerichteten Graphen

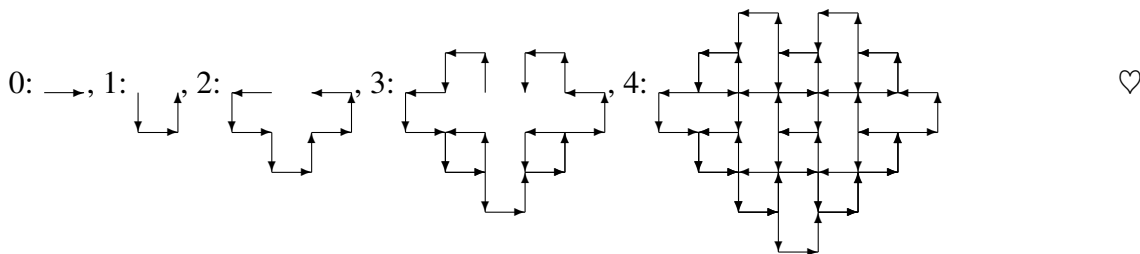


Folglich ist der schlichte gerichtete Graph zu w''



Da w die erste Ableitung von r ist, sollte dieser Graph mit dem zur dritten Ableitung von r gehörenden Graphen übereinstimmen – was auch der Fall ist, wie die ersten Ableitungs-

graphen zeigen.



Mit der vorigen Folgerung kann man auf die Stabilität von Kantenmengen schließen.

3.11. Folgerung: *Stimmt die Kantenmenge eines Wortes $w \in \mathcal{A}^*$ mit der seiner Ableitung w' überein, so stimmt sie auch mit der Kantenmenge jeder höheren Ableitung überein:*

$$\|w = \|w' \implies \|w = \|w^{(n)}, \quad w \in \mathcal{A}^*, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion über die Ableitungsstufe. Es gelte $\|w = \|w^{(i)}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt für die Kantenmenge $\|w^{(n+1)}$

$$\begin{aligned} \|w^{(n+1)} &= \bigcup_{(q,x) \in \|w^{(n)}} \|q x' && \text{(Folg. 3.9)} \\ &= \bigcup_{(q,x) \in \|w} \|q x' && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \|w' && \text{(Folg. 3.9)} \\ &= \|w && \text{(Induktionsvoraussetzung),} \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. *

Mit den Folgerungen 3.11 und 2.4 ist die erste Vermutung von Seite 15 bewiesen, die nun zu einem Lemma formuliert wird.

3.12. Lemma: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkonstantes sDOL-System. Stimmen die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung des Axioms ω überein, so besteht die erzeugte Bildsprache aus den Bildern bis höchstens zur zweiten Ableitung:*

$$\|\omega'' = \|\omega''' \implies B_G = \{p(\omega), p(\omega'), p(\omega'')\}.$$

Am ersten Beispiel dieses Abschnitts (S. 14) kann man folgendes erkennen: Wenn die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung des Axioms nicht übereinstimmen, dann existiert im Graphen zur zweiten Ableitung mindestens eine x -Kante, die beim späteren Ableiten eine neue x -Kante hervorbringt. Die nächste Folgerung schränkt dies weiter ein.

3.13. Folgerung: *Stimmen die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung des Startwortes ω nicht überein, dann gibt es einen Buchstaben $x \in [\omega'']$, so daß die Kantenmenge $\|x'$, $\|x''$ oder $\|x'''$ zu einer der ersten drei Ableitungen eine von (\circ, x) verschiedene x -Kante enthält.*

Beweis: Die Behauptung ist zu folgender Aussage äquivalent: Enthalten für jeden Buchstaben $x \in [\omega'']$ die Kantenmengen der ersten drei Ableitungen von x keine andere x -Kante als (\circ, x) , dann stimmen die Kantenmengen zu ω'' und ω''' überein:

$$(\forall x \in [\omega''] : \|_x x = \|_x x' = \|_x x'' = \|_x x''') \implies \|\omega'' = \|\omega'''.$$

Diese Aussage wird im folgenden bewiesen.

Für alle Buchstaben $x \in [\omega'']$ gelte $\|_x x = \|_x x' = \|_x x'' = \|_x x'''$. Ist (q, y) eine Kante von $\|_x^{(i)}$, dann ist (q, y) auch eine Kante von $\|_x^{(i+1)}$ (wegen $\|_y y = \|_y y'$). Folglich schließt jede Kantenmenge jene Kantenmengen ein, die zu niedrigeren Ableitungen gehören: $\|_x \subseteq \|_x' \subseteq \|_x'' \subseteq \|_x'''$.

Um zu zeigen, daß $\|\omega'' = \|\omega'''$ gilt, muß die Inklusion $\|_x'' \subseteq \|_x'''$ eine Übereinstimmung sein. Dazu wird gezeigt, daß die umgekehrte Inklusion $\|_x''' \subseteq \|_x''$ gilt. Die folgende Fallunterscheidung ist auf Folgerung 3.1 zurückzuführen.

1. $[x'] = \{x\}$, dann gilt auch $[x^{(n)}] = \{x\}$ für alle natürlichen Zahlen n . Insbesondere ist $x'' = x'''$ und damit auch $\|_x'' = \|_x'''$.
2. $[x'] = \{x, \bar{x}\}$.
 - (a) $[x''] = [x']$, dann gilt auch $[x^{(n)}] = [x']$ für alle natürlichen Zahlen n . Wegen der zweiten Synchronisationsbedingung wechseln sich die Buchstaben x und \bar{x} in x'' und in x''' ab. Das bedeutet für die Kantenmengen

$$\begin{aligned} \|_x'' &= \|_x \cup \|_x^{(o)} \bar{x} \cup \|_x \cup \|_x^{(o)} \bar{x} \cup \dots \|_x && \text{(Folg. 2.5)} \\ &= \|_x'''. \end{aligned}$$

- (b) $[x''] = \mathcal{A}$. Die Kantenmenge $\|_x'$ besteht aus den Kanten (\circ, x) und $(x(\circ), \bar{x})$ (wegen der zweiten Synchronisationsbedingung). Die Kantenmenge $\|_x''$ enthält weder eine andere x -Kante noch eine andere \bar{x} -Kante (die Kante (\circ, x) kann nur die Kanten aus $\|_x'$ hervorbringen; die Kante $(x(\circ), \bar{x})$ kann nur die Kante (\circ, x) – wegen $\|_x x = \|_x x''$ – und die Kante $(x(\circ), \bar{x})$ – wegen $\|_{\bar{x}} \bar{x} = \|_{\bar{x}} \bar{x}'$ – liefern). Daher treten die x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kanten paarweise (zwischen den gleichen Punkten) auf:

$$(q, x^\perp) \in \|_x'' \iff (x^\perp(q), \bar{x}^\perp) \in \|_x''.$$

Die Menge $\|_x x'''$ besteht nur aus (\circ, x) . Die Menge $\|_{\bar{x}} x'''$ besteht (wegen $\|_{\bar{x}} \bar{x} = \|_{\bar{x}} \bar{x}''$) nur aus $(x(\circ), \bar{x})$. Aus dem gleichen Grunde liefern die x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kanten keine neuen x - und \bar{x} -Kanten. Demnach treten die x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kanten auch in $\|_x'''$ paarweise auf; x^\perp erzeugt keine neue x^\perp -Kante und daher auch keine neue \bar{x}^\perp -Kante. Für \bar{x}^\perp kann man gleichermaßen argumentieren. Folglich gibt es in $\|_x'''$ keine Kante, die nicht bereits in $\|_x''$ liegt.

3. $[x'] = \{ x, x^\perp, \bar{x}^\perp \}$.

- (a) $[x''] = [x']$, dann gilt $[x^{(n)}] = [x']$ für alle natürlichen Zahlen n . Da es in keiner Kantenmenge \bar{x} -Kanten gibt, ändert sich die Kantenmenge von der ersten zur zweiten Ableitung nicht: $\|x'\| = \|x''\|$. Nach Folgerung 3.11 gilt dann auch die Gleichheit $\|x''\| = \|x'''\|$.
- (b) $[x''] = \mathcal{A}$. In diesem Falle tritt \bar{x} in der Ableitung von x^\perp oder \bar{x}^\perp auf. Wie im obigen Falle treten die x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kanten in $\|x'\|$ paarweise auf. Mit jeder \bar{x} -Kante entsteht auch eine x -Kante. Gäbe es mehr als eine x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kante, so hätten sie verschiedene Positionen gegenüber der Kante (\mathfrak{o}, x) und es entstünde eine neue x -Kante. Da dies nicht geschieht (sonst wäre es ein Widerspruch zu $\|x x = \|x x''\|$), gibt es nur jeweils eine x^\perp - und \bar{x}^\perp -Kante. Auf die Kantenmenge zu x' trifft genau einer der folgenden vier Fälle zu (rechts daneben stehen zur Veranschaulichung die Graphen für $x = r$):

- | | |
|--|--|
| i. $\ x'\ = \{ (\mathfrak{o}, x^\perp), (x^\perp(\mathfrak{o}), \bar{x}^\perp), (\mathfrak{o}, x) \}$ | |
| ii. $\ x'\ = \{ (\mathfrak{o}, x), (x(\mathfrak{o}), x^\perp), ((x x^\perp)(\mathfrak{o}), \bar{x}^\perp) \}$ | |
| iii. $\ x'\ = \{ (\mathfrak{o}, \bar{x}^\perp), (\bar{x}^\perp(\mathfrak{o}), x^\perp), (\mathfrak{o}, x) \}$ | |
| iv. $\ x'\ = \{ (\mathfrak{o}, x), (x(\mathfrak{o}), \bar{x}^\perp), ((x \bar{x}^\perp)(\mathfrak{o}), x^\perp) \}$ | |

In $\|x''\|$ gibt es keine neuen x -, x^\perp - oder \bar{x}^\perp -Kanten. Also ist die neue \bar{x} -Kante $(x(\mathfrak{o}), \bar{x})$ (dann ist $\|x'''\| = \|x''\|$, da keine neuen Kanten hinzukommen) oder $((x x^\perp)(\mathfrak{o}), \bar{x})$ (in den Fällen i. und ii.) oder $((x \bar{x}^\perp)(\mathfrak{o}), \bar{x})$ (in den Fällen iii. und iv.), wobei dann ein neuer Knoten \mathfrak{e} entsteht:

- | | |
|---|--|
| i. $\mathfrak{e} = (x x^\perp)(\mathfrak{o})$ | |
| ii. $\mathfrak{e} = x^\perp(\mathfrak{o})$ | |
| iii. $\mathfrak{e} = (x \bar{x}^\perp)(\mathfrak{o})$ | |
| iv. $\mathfrak{e} = \bar{x}^\perp(\mathfrak{o})$ | |

Da \mathfrak{e} weder der Startknoten \mathfrak{o} noch der Endknoten $x(\mathfrak{o})$ des Graphen ist, gibt es in $\|x''\|$ eine Kante, die nicht in $\|x'\|$ liegt:

- | | |
|--|--|
| i. $(x(\mathfrak{o}), x^\perp) \in \ x''\ $ | |
| ii. $(x^\perp(\mathfrak{o}), \bar{x}^\perp) \in \ x''\ $ | |
| iii. $(x(\mathfrak{o}), \bar{x}^\perp) \in \ x''\ $ | |
| iv. $(\bar{x}^\perp(\mathfrak{o}), x^\perp) \in \ x''\ $ | |

Daraus folgt, daß die \bar{x} -Kante in den Fällen i. und iv. nur durch Ableiten von \bar{x}^\perp sowie in den Fällen ii. und iii. nur durch x^\perp entsteht. Beide liefern keine weiteren \bar{x} -Kanten (sonst würden sie auch neue x -, x^\perp - oder \bar{x}^\perp -Kanten erzeugen). Da die \bar{x} -Kante keine neue Kante liefert, hat die Menge $\|x'''\|$ keine zusätzlichen Kanten: $\|x'''\| \subseteq \|x''\|$.

4. $[x'] = \mathcal{A}$. Es seien v, w, y paarweise und von x verschiedene Buchstaben. Die x - und v -Kanten, die durch Ableiten von v in x' entstehen, liegen bereits in $\|x'\|$. Möglicherweise entsteht eine neue w -Kante. Die durch Ableiten von w in x'' erzeugten

x -, v - und w -Kanten liegen bereits in $\|x''$. Ähnlich zum vorigen Fall liegen auch alle entstehenden y -Kanten in $\|x''$. Folglich ist $\|x'''$ eine Teilmenge von $\|x''$.

Andere Fälle gibt es nicht (s. Folg. 3.1). In jedem Falle gilt $\|x''' \subseteq \|x''$. Zusammen mit der Inklusion $\|x'' \subseteq \|x'''$ erhält man $\|x'' = \|x'''$. Damit stimmen auch die Kantenmengen bezüglich eines beliebigen Punktes $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ überein: $\|\mathfrak{a}x'' = \|\mathfrak{a}x'''$. Es seien w_1, \dots, w_n die Buchstaben von $\omega = w_1 \cdots w_n$. Aus den obigen Überlegungen ergibt sich für die Kantenmenge der zweiten Ableitung von ω

$$\begin{aligned} \|\omega'' &= \|w_1'' \cup \|w_1''(\mathfrak{o})w_2'' \cup \dots \cup \|(w_1'' \cdots w_{n-1}'')(\mathfrak{o})w_n'' && \text{(Folg. 2.5)} \\ &= \|w_1'' \cup \|w_1'''(\mathfrak{o})w_2'' \cup \dots \cup \|(w_1''' \cdots w_{n-1}''')(\mathfrak{o})w_n'' && \text{(Folg. 3.8)} \\ &= \|w_1''' \cup \|w_1'''(\mathfrak{o})w_2''' \cup \dots \cup \|(w_1''' \cdots w_{n-1}''')(\mathfrak{o})w_n''' && (\|\mathfrak{a}x'' = \|\mathfrak{a}x''') \\ &= \|\omega''' && \text{(Folg. 2.5),} \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ✱

Im folgenden sei ω derart, daß $\|_x x \neq \|_x x^{(l)}$ für einen Buchstaben $x \in [\omega''$ und eine Ableitungsstufe $l \in \{1, 2, 3\}$ gilt. Die Kantenmenge $\|x$ besteht aus der Kante (\mathfrak{o}, x) . Auf Grund der gestellten Bedingung gibt es im Graphen der l -ten Ableitung von x eine andere x -Kante: $(\mathfrak{q}, x) \in \|x^{(l)}$ mit $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$. Nach Folgerung 3.9 gilt $\|\mathfrak{q}x^{(l)} \subseteq \|x^{(2l)}$, was bedeutet, daß alle Kanten zur l -ten Ableitung um \mathfrak{q} verschoben in der $2l$ -ten Ableitung auftreten. Damit gilt insbesondere $(\mathfrak{q} + \mathfrak{q}, x) \in \|x^{(2l)}$. Durch Induktionsschluß erhält man allgemein $(n\mathfrak{q}, x) \in \|x^{(nl)}$.

Mit $\omega'' = vx\tilde{v}$ gilt für die Kantenmengen jeder l -ten Ableitung von ω''

$$\begin{aligned} \|\omega^{(nl+2)} &= \|\mathfrak{v}^{(nl)} \cup \|\mathfrak{v}^{(nl)}(\mathfrak{o})x^{(nl)} \cup \|(vx)^{(nl)}(\mathfrak{o})\tilde{v}^{(nl)} \\ &= \|\mathfrak{v}^{(nl)} \cup \|\mathfrak{v}^{(\mathfrak{o})}x^{(nl)} \cup \|(vx)(\mathfrak{o})\tilde{v}^{(nl)} && \text{(Folg. 3.8).} \end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ tritt die Kante $(n\mathfrak{q} + \mathfrak{v}(\mathfrak{o}), x)$ in der Menge $\|\mathfrak{v}^{(\mathfrak{o})}x^{(nl)}$ auf; folglich ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Kante $(n\mathfrak{q} + \mathfrak{v}(\mathfrak{o}), x)$ auch Element von $\|\omega^{(nl+2)}$. Also ist der Knoten $n\mathfrak{q} + \mathfrak{v}(\mathfrak{o})$ Element der Knotenmenge $\odot(\omega^{(nl+2)})$.

Es seien X_ω die Menge aller Punkte $n\mathfrak{q} + \mathfrak{v}(\mathfrak{o})$, V_ω die Vereinigung der Knotenmengen $\odot(\omega^{(nl+2)})$ und P_ω die Menge aller Bilder $p(\omega^{(nl+2)})$ über alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} X_\omega &= \{n\mathfrak{q} + \mathfrak{v}(\mathfrak{o}) \mid n \in \mathbb{N}_0\}, \\ V_\omega &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \odot(\omega^{(nl+2)}), \\ P_\omega &= \left\{ p(\omega^{(nl+2)}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Die Menge X_ω ist unendlich, da $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$ gilt. Jeder Punkt in X_ω tritt auch in V_ω auf; damit ist auch V_ω unendlich. Jede Knotenmenge $\odot(\omega^{(nl+2)})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist endlich, folglich werden unendlich viele verschiedene zu V_ω vereinigt. Sind die Knotenmengen zu zwei Wörtern $x, y \in \mathcal{A}^*$ verschieden, so sind auch die zugehörigen Bilder verschieden. Daher enthält P_ω unendlich viele verschiedene Bilder. Dieses Ergebnis wird wie folgt zusammengefaßt.

3.14. Folgerung: *Gibt es einen Buchstaben $x \in [\omega'']$ derart, daß die Kantenmenge einer der ersten drei Ableitungen, $\|\omega'\|$, $\|\omega''\|$ oder $\|\omega'''\|$, eine andere x -Kante als (σ, x) enthält, so ist die erzeugte Bildsprache unendlich.*

Zusammen mit Folgerung 3.13 führt dies unmittelbar zu folgendem Lemma.

3.15. Lemma: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkonstantes sDOL-System. Stimmen die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung des Axioms ω nicht überein, dann ist die erzeugte Bildsprache unendlich.*

Damit ist auch die zweite Vermutung von Seite 15 bestätigt und bewiesen. Die Lemmata 3.12 und 3.15 besagen zusammen, daß das Vorliegen eines Unterschiedes zwischen den Kantenmengen zur zweiten und dritten Ableitung des Axioms ein notwendiges und hinreichendes Endlichkeitskriterium ist. Dieses Ergebnis wird in folgendem Satz angegeben.

3.16. Satz: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkonstantes sDOL-System. Die von G erzeugte Bildsprache B_G ist genau dann endlich, wenn die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung des Axioms ω übereinstimmen.*

Aus algorithmischer Sicht ist der Fall $\mu = 0$ hervorzuheben.

Wegen der zweiten Synchronisationsbedingung besteht die Kantenmenge $\|\omega^{(n)}\|$ jeder Ableitung eines Buchstabens x bezüglich eines Punktes α aus der Kante $(\alpha, \alpha + \mathbf{v}_x)$. Nach Folgerung 2.4 stimmen die Bilder aller Ableitungen von ω überein.

3.17. Satz: *Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein sDOL-System, wobei h ein $(1, 0)$ -Endomorphismus ist. Dann ist die von G erzeugte Bildsprache B_G einelementig:*

$$B_G = \{p(\omega)\}.$$

Das bedeutet, daß im Falle $\mu = 0$ die Endlichkeit sofort (ohne weitere Untersuchung des Systems) entschieden werden kann.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, deterministische Ketten-Code-Bild-Systeme hinsichtlich der Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprache untersucht.

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein sDOL-System mit einem (κ, μ) -Endomorphismus h ; die erzeugte Bildsprache sei B_G . Anhand des Synchronisationsparameters κ werden sDOL-Systeme eingeteilt in längenkontrahierende ($\kappa < 1$), längenkonstante ($\kappa = 1$) und längenexpandierende ($\kappa > 1$) Systeme.

Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned} \kappa < 1: & \quad B_G = \{p(\omega), p(\omega'), p(\omega''), p(\omega''')\} \\ \kappa > 1: & \quad |B_G| = \infty \\ \kappa = 1: & \quad \mu = 0 \implies B_G = \{p(\omega)\} \\ & \quad s(\omega'') = s(\omega''') \implies B_G = \{p(\omega), p(\omega'), p(\omega'')\} \\ & \quad s(\omega'') \neq s(\omega''') \implies |B_G| = \infty \end{aligned}$$

Wenn die erzeugte Bildsprache endlich ist, so enthält sie höchstens vier Elemente. Außerdem ist damit ein Algorithmus gegeben, der zu einem beliebigen *sDOL*-System G entscheidet, ob die erzeugte Bildsprache B_G endlich ist oder nicht.

Die Entscheidung, ob die Bildsprache endlich ist, kann sofort (ohne nähere Untersuchung des Systems) getroffen werden, wenn der (κ, μ) -Endomorphismus h längenkontrahierend oder längenexpandierend ist oder ein $(1, 0)$ -Endomorphismus ist. Sonst ist das Startwort dreimal abzuleiten, und es sind die Kantenmengen der zweiten und dritten Ableitung auf Übereinstimmung zu prüfen. Damit ergibt sich ein Zeitaufwand von $\mathcal{O}(pn^3)$, wobei p die Länge des Startwortes und n die maximale Länge der ersetzenden Wörter sind.

Die Endlichkeitsuntersuchungen können auf nichtdeterministische Ketten-Code-Bild-Systeme ausgedehnt werden, da zu erwarten steht, daß sie im endlichen Falle mehr als vier Bilder erzeugen. Für Anwendungen sind Systeme wünschenswert, die eine große aber dennoch endliche Menge von Bildern bereitstellen.

Danksagung

Der Autor dankt Prof. Hollatz für die vielen anregenden Diskussionen und Hinweise sowie Prof. Dassow für seine Unterstützung.

Literatur

- [DHi89] DASSOW, J.; HINZ, F.: *Kettenkode-Bildsprachen. Theorie und Anwendungen*. Wiss. Zeitschrift d. Techn. Univ. Magdeburg, 33, 1989.
- [DHr92] DASSOW, J.; HROMKOVIČ, J.: *On Synchronized Lindenmayer Picture Languages*. *Lindenmayer Systems*, 253–261. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [Fre74] FREEMAN, H.: *Computer processing of line-drawing images*. *Computer Surveys*, 6:57–97, 1974.
- [Hol02] HOLLATZ, H.: *Mathematische Grundlagen der Informatik*. <http://horst.hollatz.de>, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, 2002.