

Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, einfach nichtdeterministischer, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe*

22. April 2003

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, einfach nichtdeterministische, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme (*sOL*-Systeme) in Hinsicht auf die Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht. Es wird gezeigt, daß jedes *sOL*-System eine endliche oder abzählbare Bildmenge erzeugt und ein Algorithmus angegeben, der zu jedem solchen System entscheidet, ob es eine endliche Bildmenge erzeugt oder nicht.

1 Einleitung

Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf der Erzeugung von Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefaßt werden. Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden 1968 von J. FEDER eingeführt. Seit Mitte der 80er Jahre werden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur CHOMSKY-Hierarchie gehören. Bei den biologisch motivierten LINDENMAYER-Systemen wurde eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert. Jedoch liegen hierzu nahezu keine theoretischen Erkenntnisse vor.

Kontextfreie LINDENMAYER-Systeme werden nach [RS80] in folgende Klassen eingeteilt: *DOL* (deterministisches Ersetzen von Buchstaben), *OL* (nichtdeterministisches Ersetzen), *DTOL* (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und *TOL* (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird).

In [T02] wurde eine Abstrahierungshierarchie entwickelt und die Entscheidbarkeit

*truthe@isg.cs.uni-magdeburg.de

der Endlichkeit von Ketten-Code-Bild-Sprachen zu synchronen, deterministischen, kontextfreien LINDENMAYER-Systemen (*sDOL*-Systemen) auf Grundlage dieser Hierarchie bewiesen. Die Abstrahierungshierarchie ist auch für Untersuchungen an Bildsprachen weiterer Systeme verwendbar.

Die vorliegende Arbeit schließt an [T02] an, indem die Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, einfach nichtdeterministischer, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme (*sOL*-Systeme) untersucht wird. Dies ist dadurch motiviert, daß die in [T02] behandelten deterministischen Systeme im endlichen Falle höchstens vier Bilder erzeugen. Nichtdeterministische Systeme bieten jedoch mehr Ableitungsmöglichkeiten, so daß zu erwarten ist, daß in endlichen Fällen mehr als vier Bilder erzeugt werden können.

2 Grundlagen

Die Endlichkeitsuntersuchungen zu Bildsprachen von *sOL*-Systemen in der vorliegenden Arbeit beruhen auf der Abstrahierungshierarchie, die in [T02] entwickelt wurde. In diesem Abschnitt werden die benötigten Begriffe zusammengestellt.

2.1 Strukturen über einem Alphabet

Es seien $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$ ein Alphabet und (\mathcal{A}^*, \cdot) die freie Struktur über \mathcal{A} mit der Operation der Aneinanderreihung (Konkatenation). Die Elemente aus \mathcal{A}^* heißen Wörter; λ ist das Leerwort: $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{A}^* : \mathbf{w}\lambda = \lambda\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Die Menge \mathcal{A}^+ enthalte alle Wörter aus \mathcal{A}^* außer dem Leerwort λ . Ein Operationssymbol für die Aneinanderreihung wird im allgemeinen nicht geschrieben. Das Mengensystem der endlichen, nichtleeren Teilmengen von \mathcal{A}^* sei \mathbb{A} . Die Konkatenation zweier Wortmengen $U, V \in \mathbb{A}$ liefert die Menge aller Wörter uv , bei denen u aus der Menge U und v aus V sind:

$$UV = \{ uv \mid u \in U \text{ und } v \in V \}.$$

Das Mengensystem \mathbb{A} bildet mit den Operationen Vereinigung \cup und Konkatenation \cdot einen Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$, da (\mathbb{A}, \cup) und (\mathbb{A}, \cdot) Halbgruppen sind und die bekannten Distributivgesetze gelten.

Auf \mathcal{A}^* wird eine Längenfunktion \sharp induktiv erklärt:

1. $\sharp\lambda = 0$, $\sharp r = \sharp l = \sharp u = \sharp d = 1$.
2. Sind u, v Wörter, so ist die Länge $\sharp uv = \sharp u + \sharp v$.

Alle Wörter \mathbf{w} mit der Länge $\sharp\mathbf{w} = n$ werden in der Menge \mathcal{A}^n zusammengefaßt. Ein Wort $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^n$ sei aus Buchstaben w_1, \dots, w_n zusammengesetzt: $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_n$. Mit \vec{w}_i ist in diesem Zusammenhang das Wort $\vec{w}_i = w_1 \cdots w_i$ ($0 \leq i \leq n$, $\vec{w}_0 = \lambda$) gemeint. Zu einem Wort $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ und einem Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ sei $\#_x \mathbf{w}$ die Anzahl

der Vorkommen von x in w . Die Menge $[w]$ sei die Menge der in w auftretenden Buchstaben:

$$[w] = \{ x \mid \#_x w \geq 1 \}.$$

Mit den Elementen aus \mathcal{A}^* seien Abbildungen auf dem \mathbb{Z}^2 assoziiert. Die atomaren Abbildungen r, l, u, d ordnen einem Punkt $q \in \mathbb{Z}^2$ seine Nachbarn zu:

$$\begin{aligned} r(q) &= q + (1, 0) & l(q) &= q - (1, 0) \\ u(q) &= q + (0, 1) & d(q) &= q - (0, 1) \end{aligned}.$$

(Die Funktionsnamen r, l, u, d stammen von den Richtungen right, left, up, down.)

Die Verschiebungen $x(q) - q$ eines beliebigen Punktes $q \in \mathbb{Z}^2$ zu $x(q)$ seien für $x \in \mathcal{A}$ mit $v_x \in \mathbb{Z}^2$ bezeichnet. Dem Leerwort entspricht die identische Abbildung. Ein zusammengesetztes Wort $vw \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $v \circ w$:

$$v \circ w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } q \mapsto w(v(q)).$$

Der Nullpunkt des \mathbb{Z}^2 sei $\mathfrak{o} = (0, 0)$. Ein Punkt $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}^2$ sei durch (p_x, p_y) dargestellt. Die Interpretation von Wörtern als Abbildungen auf dem \mathbb{Z}^2 ist ein Homomorphismus von der freien Struktur (\mathcal{A}, \cdot) in die freie Struktur (\mathcal{A}, \circ) . Die Operatoren \cdot und \circ werden nicht geschrieben, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Operation es sich handelt.

Die Abbildungen r und l sowie u und d sind zu einander invers. Die Abbildungen ru und ur sowie ld und dl ordnen einem Punkt q seine Diagonalnachbarn zu:

$$ru(q) = ur(q) = q + (1, 1), \quad ld(q) = dl(q) = q - (1, 1).$$

Diese Beziehungen werden durch die Symbole $\bar{}$ und \perp dargestellt:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & \bar{x} & x^\perp & \bar{x}^\perp \\ \hline r & l & u & d \\ l & r & d & u \\ u & d & r & l \\ d & u & l & r \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{array}.$$

2.2 Graphische Einbettung

Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von \mathbb{Z}^2 ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten $q, x(q)$ mit $q \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \{r, l, u, d\}$ verbindet. Die „Lage“ der Knoten ist wesentlich, d. h. ein Umbenennen der Knoten führt in der Regel nicht zu einem isomorphen Gittergraphen.

Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}^2$ gibt es Funktionen, die einem Wort $w \in \mathcal{A}^n$

- die Knotenmenge $\odot^a(w) = \{ \vec{w}_i(a) \mid i = 0, \dots, n \},$

- den gerichteten Gittergraphen

$$g^a(\mathbf{w}) = \left(\odot^a(\mathbf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})) \}_{i=1, \dots, n} \right),$$

- den schlichten gerichteten Gittergraphen $s^a(\mathbf{w})$ zu $g^a(\mathbf{w})$,
- die Kantenmenge $\parallel^a \mathbf{w}$ von $s^a(\mathbf{w})$ (in einer anderen Notation)

$$\parallel^a \mathbf{w} = \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), w_i) \mid i = 1, \dots, n \},$$

- das Bild (den Schatten von $s^a(\mathbf{w})$)

$$p^a(\mathbf{w}) = (\odot^a(\mathbf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a})) \mid i = 0, \dots, n \})$$

- und die Bildfläche

$$\square^a(\mathbf{w}) = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \cdot \frac{a}{w} \leq x \leq \cdot \frac{a}{w} \text{ und} \\ \dot{\cdot} \frac{a}{w} \leq y \leq \overline{\cdot} \frac{a}{w} \end{array} \right\},$$

mit den Randkoordinaten $\cdot \frac{a}{w}$, $\dot{\cdot} \frac{a}{w}$, $\cdot \frac{a}{w}$ und $\overline{\cdot} \frac{a}{w}$ der Knoten aus $\odot^a(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned} \cdot \frac{a}{w} &= \min \{ x \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, & \dot{\cdot} \frac{a}{w} &= \min \{ y \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, \\ \cdot \frac{a}{w} &= \max \{ x \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, & \overline{\cdot} \frac{a}{w} &= \max \{ y \mid (x, y) \in \odot^a(\mathbf{w}) \}, \end{aligned}$$

zuordnen. Der obere Index kann entfallen, falls sich die Funktionen auf den Nullpunkt beziehen ($\mathbf{a} = \mathbf{o}$).

Die Bildflächen sind Rechteckmengen. Das Skalieren einer von zwei Punkten \mathbf{p}, \mathbf{q} bestimmten Bildfläche $\mathfrak{P} = [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ um einen Faktor $s \in \mathbb{N}_0$ liefert die Bildfläche

$$s\mathfrak{P} = \{ s\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{P} \} = [s\mathbf{p}, s\mathbf{q}].$$

Die Vereinigung zweier Bildflächen liefert in der Regel keine Rechteckmenge. Eine erweiterte Vereinigung zweier Bildflächen soll die Bildfläche der Vereinigung sein:

$$\mathfrak{P}_X \cup \mathfrak{P}_Y = \mathfrak{P}_{X \cup Y}.$$

2.3 Spezielle Endomorphismen

Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$. Ein Endomorphismus h auf dem Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ heißt (κ, μ) -Endomorphismus, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ folgendes erfüllt ist: Wenn $x' \in h(\{x\})$ ist, so gilt

1. $x'(\mathbf{o}) = \kappa \mathbf{v}_x$ und
2. $\square(x') \subseteq \kappa[\mathbf{o}, \mathbf{v}_x] \cup \mu[\mathbf{v}_{x^\perp}, \mathbf{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

Aus der zweiten Bedingung folgt für das Leerwort: Wenn $\lambda' \in h(\{\lambda\})$ ist, gilt für die Bildfläche $\square(\lambda') \subseteq [\mathfrak{o}, \mathfrak{o}]$. Da die leere Menge nicht in \mathbb{A} auftritt, besteht die Bildfläche aus dem Nullpunkt: $\square(\lambda') = [\mathfrak{o}, \mathfrak{o}]$, d. h. das Leerwort wird auf sich abgebildet: $h(\{\lambda\}) = \{\lambda\}$.

Folgendes Beispiel soll die Synchronisationsbedingungen veranschaulichen:

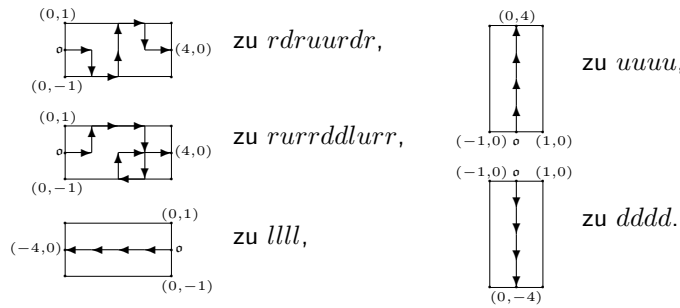
Es sei h ein Endomorphismus auf $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ mit

$$h(\{r\}) = \{rdruurdr, rurrddlurr\} \text{ und } h(\{x\}) = \{xxxx\} \text{ für } x \neq r.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (rdruurdr)(\mathfrak{o}) &= \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r, \\ (rurrddlurr)(\mathfrak{o}) &= \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_l + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r, \\ (xxxx)(\mathfrak{o}) &= 4\mathfrak{v}_x. \end{aligned}$$

Die schlichten, gerichteten Gittergraphen zu den Ableitungen sind



Alle Punkte zu einer Ableitung $x' \in h(\{x\})$ liegen in der Bildfläche $4[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \cup [\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{x^\perp}]$.

Somit ist der Endomorphismus h ein $(4, 1)$ -Endomorphismus.

Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabet liegen; die zweite Bedingung bewirkt, daß das Bild zu jeder Ableitung von $x \in \mathcal{A}$ in einem gewissen Rechteck liegt.

Es sei w ein Wort aus \mathcal{A}^n ; dann gilt wegen der Konkatenation von Wortmengen

$$\{w\} = \{w_1 \cdots w_n\} = \{w_1\} \cdots \{w_n\}.$$

Desweiteren sei h ein (κ, μ) -Endomorphismus. Dann gilt wegen der Operationstreue von h bezüglich der Konkatenation

$$h(\{w\}) = h(\{w_1 \cdots w_n\}) = h(\{w_1\} \cdots \{w_n\}) = h(\{w_1\}) \cdots h(\{w_n\}).$$

Aus der Operationstreue von h bezüglich der Vereinigung folgt für eine endliche Wortmenge $W \in \mathbb{A}$

$$h(W) = \bigcup_{w \in W} h(\{w\}).$$

Es sei bemerkt, daß es zu je zwei natürlichen Zahlen κ und μ einen (κ, μ) -Endomorphismus gibt; beispielsweise ist h mit $\{x\} \mapsto \{x^\kappa\}$ ($x \in \mathcal{A}$) für jede natürliche Zahl $\mu \in \mathbb{N}_0$ ein (κ, μ) -Endomorphismus.

Es sei $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $\mu \geq \mu_0$ die Inklusion $\mu_0[\mathbf{v}_{x^\perp}, \mathbf{v}_{\bar{x}^\perp}] \subseteq \mu[\mathbf{v}_{x^\perp}, \mathbf{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

2.1. Folgerung: *Jeder (κ, μ) -Endomorphismus ist auch ein $(\kappa, \mu + 1)$ -Endomorphismus.*

Die n -stellige Verkettung eines (κ, μ) -Endomorphismus h wird kurz h^n geschrieben. Jedes Element von $h^n(\{\mathbf{w}\})$ mit $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ heißt n -te Ableitung von \mathbf{w} ; ein solches Wort wird auch mit $\mathbf{w}^{(n)}$ bezeichnet ($\mathbf{w}', \mathbf{w}'', \mathbf{w}'''$ für die ersten drei Ableitungen; $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}$). Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.

Sind bei einem (κ, μ) -Endomorphismus h die atomaren Bilder einelementig, so hat jedes Wort genau eine Ableitung; die Mengenzeichen werden in diesem Falle weggelassen: $h(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$.

2.4 Ketten-Code-Bild-Systeme

In diesem Abschnitt werden synchrone, einfach nichtdeterministische Ketten-Code-Bild-Systeme (*sOL*-Systeme) definiert, die dann in Zusammenhang mit synchronen, deterministischen Ketten-Code-Bild-Systemen gebracht werden.

2.4.1 sOL-Systeme

Ein synchrones, einfach nichtdeterministisches, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt *sOL*-System) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$, einem (κ, μ) -Endomorphismus h und einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$.

Die von einem *sOL*-System G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω :

$$B_G = \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ein *sOL*-System heißt längenexpandierend (-kontrahierend, -konstant), wenn der zugehörige (κ, μ) -Endomorphismus längenexpandierend (-kontrahierend, -konstant) ist.

2.4.2 Deterministische Untersysteme

Um Untersuchungsergebnisse von deterministischen Systemen nutzen zu können, werden deterministische Untersysteme definiert.

Ein *sDOL*-System $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ heißt deterministisches Untersystem eines nicht-deterministischen Ketten-Code-Bild-Systems G (geschrieben $U \sqsubseteq G$), wenn jede Ableitung eines Wortes $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$ mittels U auch Ableitung mittels G ist.

Es seien $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sOL*-System und $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ein *sDOL*-System. Auf Grund der Homomorphie-Eigenschaft ist U genau dann ein deterministisches Untersystem von G , wenn für alle Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ gilt: Die Ableitung von x mittels U ist auch Ableitung mittels G

$$U \sqsubseteq G \iff \forall x \in \mathcal{A} : h_\circ(x) \in h(\{x\}).$$

Daraus folgt, wenn h ein (κ, μ) -Endomorphismus ist, ist h_\circ auch einer.

2.2. Folgerung: *Ist ein sOL-System längenkontrahierend, -expandierend bzw. -konstant, so hat auch jedes deterministische Untersystem diese Eigenschaft. Zu einem sOL-System $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ gibt es genau*

$$\#_U G = \prod_{x \in \mathcal{A}} |h(\{x\})|$$

deterministische Untersysteme.

Ein deterministisches Untersystem $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ eines *sOL*-Systems erzeugt die Bildmenge

$$B_U = \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} = h_\circ^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

2.3. Folgerung: *Die von einem deterministischen Untersystem eines sOL-Systems G erzeugte Bildmenge ist eine Teilmenge der von G erzeugten Bildmenge.*

Beweis: Es seien $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sOL*-System und $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$ ein deterministisches Untersystem von G mit den Bildmengen B_G bzw. B_U . Nach der Definition gilt für alle Wörter $\mathbf{w} \in \mathcal{A}^*$: Die Ableitung von \mathbf{w} mittels U ist gleichzeitig eine Ableitung mittels G , d. h. $h_\circ(\mathbf{w}) \in h(\{\mathbf{w}\})$ und allgemein $h_\circ^n(\mathbf{w}) \in h^n(\{\mathbf{w}\})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Bildmenge B_U gilt daher

$$B_U = \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} = h_\circ^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0\} = B_G.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. *

Folgendes Beispiel soll den Zusammenhang illustrieren:

Es seien h_1, h_2 zwei $(2, 1)$ -Endomorphismen, für die gilt

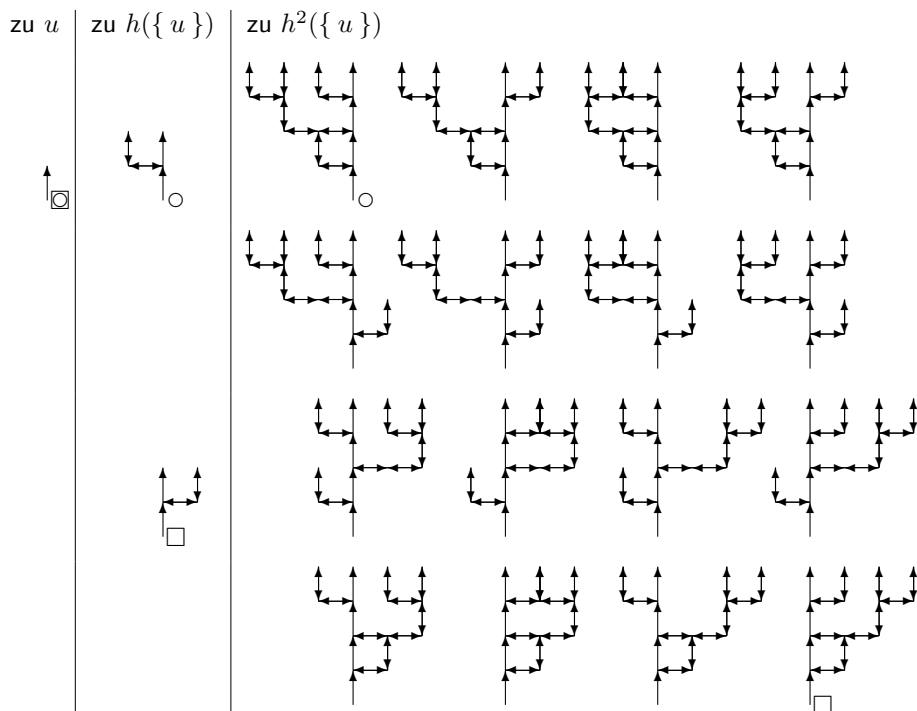
$$h_1(u) = uludru, h_2(u) = urudlu, h_1(x) = h_2(x) = xx \text{ für } x \neq u.$$

Desweiteren sei $G = (\mathcal{A}, h, u)$ ein sOL -System, wobei h ein $(2, 1)$ -Endomorphismus ist mit $h(\{x\}) = \{h_1(x), h_2(x)\}$. Folglich gilt

$$h(\{u\}) = \{uludru, urudlu\} \text{ und } h(\{x\}) = \{xx\} \text{ f\u00fcr } x \neq u.$$

Die beiden $sDOL$ -Systeme $U_1 = (\mathcal{A}, h_1, u)$, $U_2 = (\mathcal{A}, h_2, u)$ sind die einzigen deterministischen Untersysteme von G .

Nach zweimaligem Ableiten des Startwortes u mittels G liegen folgende schlichte, gerichtete Gittergraphen vor:



Die Gittergraphen, die durch zweimaliges Ableiten mittels U_1 bzw. U_2 entstehen, sind durch \circ bzw. \square markiert. Andere Graphen entstehen bei zweimaligem Ableiten nicht.

3 Endlichkeitsuntersuchungen

Bei Aufgaben, in denen Ketten-Code-Bild-Systeme eine Rolle spielen, mu\u00df gekl\u00e4rt werden, ob ein gegebenes System eine endliche oder unendliche Bildmenge erzeugt oder welche Systeme Bildmengen mit gewissen Eigenschaften erzeugen.

In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein sOL -System eine endliche Bildmenge erzeugt oder nicht.

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein sOL -System mit einem (κ, μ) -Endomorphismus h . Jede n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) eines Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ bildet den Nullpunkt \mathfrak{o} auf den Punkt $\kappa^n \mathfrak{v}_x$ ab. Dies kann mittels vollst\u00e4ndiger Induktion \u00fcber n gezeigt werden.

Aus der ersten Synchronisationsbedingung folgt au\u00dferdem f\u00fcr alle $x' \in h(\{x\})$, da\u00df $x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x + c(\mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_{\bar{x}}) + d(\mathfrak{v}_{x^\perp} + \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp})$ f\u00fcr zwei nat\u00fcrliche Zahlen c, d gilt. Daraus folgt, da\u00df x^\perp und \bar{x}^\perp gleich h\u00e4ufig in der Ableitung x' auftreten, und die Anzahl

der Vorkommen von x um κ größer ist, als die von \bar{x} . Diese Beobachtungen faßt die nächste Folgerung zusammen.

3.1. Folgerung: Für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: Wenn $x' \in h(\{x\})$ und $x^{(n)} \in h^n(\{x\})$ sind ($n \in \mathbb{N}$), so gilt auch

1. $x^{(n)}(\mathfrak{o}) = \kappa^n \mathfrak{v}_x$,
2. $\#_x x' = \kappa + \#_{\bar{x}} x'$,
3. $\#_{x^\perp} x' = \#_{\bar{x}^\perp} x'$.

Aus der ersten Aussage kann man für Wörter sofort folgendes schließen.

3.2. Folgerung: Für alle Wörter $\mathfrak{w} \in \mathcal{A}^*$ gilt: Wenn $\mathfrak{w}^{(n)} \in h^n(\{\mathfrak{w}\})$ eine n -te Ableitung von \mathfrak{w} ist, so gilt $\mathfrak{w}^{(n)}(\mathfrak{o}) = \kappa^n \mathfrak{w}(\mathfrak{o})$ ($n \in \mathbb{N}$).

Beweis: Es seien $\mathfrak{w} = w_1 \cdots w_l$ ein Wort aus \mathcal{A}^l , $w_1^{(n)}, \dots, w_l^{(n)}$ Ableitungen von w_1, \dots, w_l und $\mathfrak{w}^{(n)} = w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)}$. Dann gilt $\mathfrak{w}^{(n)} \in h^n(\{\mathfrak{w}\})$ und

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}^{(n)}(\mathfrak{o}) &= (w_1^{(n)} \cdots w_l^{(n)})(\mathfrak{o}) \\
&= w_1^{(n)}(\mathfrak{o}) + \cdots + w_l^{(n)}(\mathfrak{o}) && \text{([T02], Folg. 2.3)} \\
&= \kappa^n \mathfrak{v}_{w_1} + \cdots + \kappa^n \mathfrak{v}_{w_l} && \text{Folg. 3.1} \\
&= \kappa^n (w_1(\mathfrak{o}) + \cdots + w_l(\mathfrak{o})) \\
&= \kappa^n \mathfrak{w}(\mathfrak{o}) && \text{([T02], Folg. 2.3).}
\end{aligned}$$

✱

Die Ketten-Code-Bild-Systeme werden nach ihrem „Längenverhalten“ getrennt betrachtet, zunächst längenkontrahierende, dann längenexpandierende und schließlich längenkonstante Systeme.

3.1 Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme

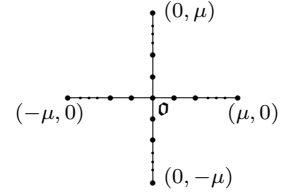
Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkontrahierendes $s0L$ -System mit einem $(0, \mu)$ -Endomorphismus h . Nach Folgerung 3.2 gilt für alle Wörter $\mathfrak{w} \in \mathcal{A}^*$:

Wenn $\mathfrak{w}^{(n)} \in h^n(\{\mathfrak{w}\})$ eine n -te Ableitung von \mathfrak{w} ist, so gilt $\mathfrak{w}^{(n)}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$.

Es seien $\mathfrak{w} = w_1 \cdots w_n$ ein Wort aus \mathcal{A}^n , w'_1, \dots, w'_n Ableitungen von w_1, \dots, w_n und $\mathfrak{w}' = w'_1 \cdots w'_n$. Alle Knoten $\mathfrak{q} \in \odot(w'_i)$ des Gittergraphen zu w'_i ($i = 1, \dots, n$) liegen in der Bildfläche $\square(w'_i) = \mu[\mathfrak{v}_{w'_i}, \mathfrak{v}_{\bar{w}'_i}]$. Die Knotenmenge $\odot(\mathfrak{w}')$ des Gittergraphen zu \mathfrak{w}' ist die Vereinigung der Knotenmengen $\odot(w'_i)$ zu den Teilwörtern w'_i ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
\odot(\mathfrak{w}') &= \odot(w'_1) \cup \odot(w'_1(\mathfrak{o}))(w'_2) \cup \cdots \cup \odot(w'_1 \cdots w'_{n-1}(\mathfrak{o}))(w'_n) && \text{([T02], Folg. 2.5)} \\
&= \odot(w'_1) \cup \odot(w'_2) \cup \cdots \cup \odot(w'_n);
\end{aligned}$$

alle Punkte $\mathfrak{q} \in \odot(\mathbf{w}')$ des Gittergraphen zu \mathbf{w}' liegen daher in der Bildfläche $\mu[(0, -1), (0, 1)]$ oder $\mu[(-1, 0), (1, 0)]$:



Der Nullpunkt \mathfrak{o} gehört zur Knotenmenge, der Gittergraph ist zusammenhängend, folglich gibt es $(\mu + 1)^4$ Möglichkeiten für ein Ableitungsbild. Außerdem gehört das Bild zu ω auch zur Bildmenge.

3.3. Satz: *Jedes längenkontrahierende s0L-System $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ mit einem $(0, \mu)$ -Endomorphismus h erzeugt eine Bildmenge B_G mit höchstens $(\mu + 1)^4 + 1$ Elementen:*

$$|B_G| \leq (\mu + 1)^4 + 1 < \infty.$$

3.2 Längenexpandierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei G ein längenexpandierendes s0L-System. Dann gibt es ein längenexpandierendes deterministisches Untersystem $U \sqsubseteq G$ (Folg. 2.2). Nach Folgerung 2.3 ist die Bildmenge B_U des s0L-Systems U eine Teilmenge der Bildmenge B_G von G :

$$B_U \subseteq B_G.$$

In [T02] wurde gezeigt, daß die Bildmenge jedes längenexpandierenden sD0L-Systems unendlich ist. Folglich ist auch die Bildmenge des s0L-Systems G unendlich.

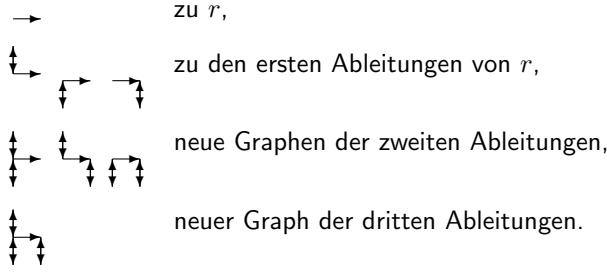
3.4. Satz: *Die von einem längenexpandierenden s0L-System erzeugte Bildmenge ist stets unendlich.*


3.3 Längenkonstante Ketten-Code-Bild-Systeme

Längenkonstante s0L-Systeme können wie längenkonstante sD0L-Systeme sowohl endliche als auch unendliche Bildmengen erzeugen. Bei deterministischen Systemen kann man anhand der schlichten, gerichteten Gittergraphen der zweiten und dritten Ableitungen die Endlich- oder Unendlichkeit der Bildmenge erkennen. Stimmen bei nichtdeterministischen Systemen die schlichten, gerichteten Gittergraphen zu den zweiten und dritten Ableitungen nicht überein, so kann trotzdem die Bildmenge endlich sein (was bei deterministischen Systemen nicht gilt).

Als Beispiel sei $G = (\mathcal{A}, h, r)$ ein s0L-System, wobei $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ eine Abbildung mit $\{ r \} \mapsto \{ udr, dur, rdu \}$ und $\{ x \} \mapsto \{ x \}$ für $x \neq r$ sei. Der Endomorphismus h erfüllt die Bedingungen für einen $(1, 1)$ -Endomorphismus. Damit ist G längenkonstant.

Die schlichten, gerichteten Gittergraphen sind



Unter den schlichten, gerichteten Gittergraphen der 3. Ableitungen tritt  auf, unter denen der 2. Ableitungen jedoch nicht. Trotzdem ist die Bildmenge B_G endlich:

$$B_G = \left\{ -, \perp, \lrcorner, \neg, \ulcorner, \llcorner, \sqcap, \sqcup \right\}.$$

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein sOL -System mit einem $(1, \mu)$ -Endomorphismus h . Nach Folgerung 2.3 erzeugt jedes deterministische Untersystem eines sOL -Systems G eine Teilmenge der Bildmenge von G . Daraus folgt: Existiert zu einem sOL -System G ein deterministisches Untersystem U mit unendlicher Bildmenge, so ist auch die Bildmenge von G unendlich.

Es sei nun $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein längenkonstantes sOL -System mit der Eigenschaft, daß jedes deterministische Untersystem eine endliche Bildmenge erzeugt. Für jedes deterministische Untersystem $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$ ($i = 1, \dots, \#_U G$) von G gilt

$$\forall x \in [h_i^2(\omega)] : \|_x x = \|_x h_i(x) = \|_x h_i^2(x) = \|_x h_i^3(x) \quad ([T02], \text{Folg. 3.8}).$$

3.5. Lemma: *Für jeden Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ gilt: Jeder Buchstabe, der in einer zweiten Ableitung von x mittels G auftritt, tritt auch in einer zweiten Ableitung von x mittels eines Untersystems U_i auf und umgekehrt:*

$$\forall x \in \mathcal{A} : \bigcup_{w \in h^2(\{x\})} [w] = \bigcup_{i=1}^{\#_U G} [h_i^2(x)].$$

Beweis: Es soll im folgenden $[h^n(\{x\})]$ die Menge aller Buchstaben bezeichnen, die in einer n -ten Ableitung von x mittels G auftreten:

$$[h^n(\{x\})] = \bigcup_{w \in h^n(\{x\})} [w].$$

Es seien $H = [h^2(\{x\})]$ und $H_U = \bigcup_{i=1}^{\#_U G} [h_i^2(x)]$. Für H kann auch geschrieben werden

$$H = \bigcup_{y \in [h(\{x\})]} [h(\{y\})].$$

Aus der Synchronisiertheit von G ergeben sich folgende Fälle (Fol. 3.1):

1. $[h(\{x\})] = \{x\}$:

In diesem Falle gilt einerseits $\forall i : [h_i(x)] = \{x\}$, woraus $H_U = \{x\}$ folgt, und andererseits $H = [h(\{x\})] = \{x\}$. Folglich stimmen H und H_U überein.

2. $[h(\{x\})] = \{x, \bar{x}\}$:

Damit ist $H = [h(\{x\})] \cup [h(\{\bar{x}\})]$ und es gibt zwei Möglichkeiten:

(a) $H = \{x, \bar{x}\}$:

In diesem Falle gilt $[h(\{\bar{x}\})] \subseteq \{x, \bar{x}\}$. Damit sind $\bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i(x)] = H$ und

$\bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i(\bar{x})] \subseteq H$, woraus $H_U = H$ folgt.

(b) $H = \mathcal{A}$:

In diesem Falle ist $\bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i(x)] = \{x, \bar{x}\}$ und es gibt ein Untersystem U_i mit $\{x^\perp, \bar{x}^\perp\} \subseteq [h_i(\bar{x})]$. Damit gilt $H_U = H$.

3. $[h(\{x\})] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$:

Hier ist $H = [h(\{x\})] \cup [h(\{x^\perp\})] \cup [h(\{\bar{x}^\perp\})]$, und es gibt zwei Möglichkeiten:

(a) $H = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$:

Es gilt $[h(\{x^\perp\})] \cup [h(\{\bar{x}^\perp\})] \subseteq \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ und damit $H_U = H$.

(b) $H = \mathcal{A}$:

In diesem Falle ist $\bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i(x)] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ und es gibt ein Untersystem U_i mit $\{x, \bar{x}\} \subseteq [h_i(x^\perp)] \cup [h_i(\bar{x}^\perp)]$. Damit gilt $H_U = H$.

4. $[h(\{x\})] = \mathcal{A}$:

Damit sind $H = \mathcal{A}$ und $\bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i(x)] = \mathcal{A}$ und somit auch $H_U = H$.

In jedem Falle gilt $H = H_U$, d. h. für alle Buchstaben $x \in \mathcal{A}$ gilt

$$[h^2(\{x\})] = \bigcup_{i=1}^{\#UG} [h_i^2(x)],$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ✱

Dieses Lemma führt unmittelbar zu folgendem Schluß.

3.6. Folgerung: Für jedes deterministische Untersystem $U_i \sqsubseteq G$ mit $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$ ($i = 1, \dots, \#UG$) gilt

$$\forall x \in [h^2(\{\omega\})] : \|_x x = \|_x h_i(x) = \|_x h_i^2(x) = \|_x h_i^3(x).$$

Im folgenden soll $\|\omega^{(n)}$ die Menge aller Kanten bezeichnen, die zum gerichteten Gittergraphen einer n -ten Ableitung von ω bezüglich G gehört:

$$\|\omega^{(n)} = \bigcup_{\mathbf{w} \in \omega^{(n)}} \|\mathbf{w}.$$

3.7. Lemma: *Jede Kante in einem gerichteten Gittergraphen zu einer n -ten Ableitung des Axioms bezüglich G tritt auch in einem gerichteten Gittergraphen einer zweiten Ableitung auf:*

$$\|\omega^{(n)} \subseteq \|\omega'' \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beweis: Jede Kante $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(m)}$ tritt auch bei einer späteren Ableitung auf:

$$(\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(m)} \implies (\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(m+1)} \quad (\text{folgt aus Folg. 3.6}).$$

Es sei $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(n)} \setminus \|\omega^{(n-1)}$ eine Kante, die in einem gerichteten Gittergraphen einer n -ten Ableitung mit $n \geq 4$ auftritt, aber bei keiner Ableitung zuvor. Dann gibt es folgende Wörter:

$$\begin{array}{ll} \widehat{\mathbf{w}} w \widetilde{\mathbf{w}} \in \omega^{(n-4)} & \text{mit } w \in \mathcal{A}, \\ \widehat{\mathbf{w}}' \widehat{\mathbf{v}} v \widetilde{\mathbf{w}}' \in \omega^{(n-3)} & \text{mit } v \in \mathcal{A} \text{ und } \widehat{\mathbf{v}} v \widetilde{\mathbf{v}} \in h(\{w\}), \\ \widehat{\mathbf{w}}'' \widehat{\mathbf{v}}' \widehat{\mathbf{y}} y \widetilde{\mathbf{y}} \widetilde{\mathbf{w}}'' \in \omega^{(n-2)} & \text{mit } y \in \mathcal{A} \text{ und } \widehat{\mathbf{y}} y \widetilde{\mathbf{y}} \in h(\{v\}), \\ \widehat{\mathbf{w}}''' \widehat{\mathbf{v}}'' \widehat{\mathbf{y}}' \widehat{\mathbf{z}} z \widetilde{\mathbf{z}} \widetilde{\mathbf{y}}' \widetilde{\mathbf{w}}''' \in \omega^{(n-1)} & \text{mit } z \in \mathcal{A} \text{ und } \widehat{\mathbf{z}} z \widetilde{\mathbf{z}} \in h(\{y\}), \\ \widehat{\mathbf{w}}^{(4)} \widehat{\mathbf{v}}''' \widehat{\mathbf{y}}'' \widehat{\mathbf{z}}' \widehat{\mathbf{x}} x \widetilde{\mathbf{x}} \widetilde{\mathbf{z}}' \widetilde{\mathbf{y}}'' \widetilde{\mathbf{w}}^{(4)} \in \omega^{(n)} & \text{mit } \widehat{\mathbf{x}} x \widetilde{\mathbf{x}} \in h(\{z\}) \text{ und } \widehat{\mathbf{w}}^{(4)} \widehat{\mathbf{v}}''' \widehat{\mathbf{y}}'' \widehat{\mathbf{z}}' \widehat{\mathbf{x}}(\mathbf{o}) = \mathbf{a}; \end{array}$$

wobei jedes auftretende Wort \mathbf{b}' aus \mathbf{b} abgeleitet sei. Wenn zwei beliebige Buchstaben aus $\{w, v, y, z, x\}$ übereinstimmen, träte die Kante (\mathbf{a}, x) bereits bei einer vorherigen Ableitung und damit auch bei der $(n-1)$ -ten Ableitung auf: $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(n-1)}$. Dies soll nicht sein, also müssen alle fünf Buchstaben verschieden sein. Keiner der Buchstaben kann λ sein, da sonst auch $x = \lambda$ wäre und damit wäre (\mathbf{a}, x) keine Kante. In der Menge \mathcal{A} gibt es nur vier von λ verschiedene Buchstaben, also können w, v, y, z, x nicht paarweise verschieden sein. Folglich gibt es keine Kante $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega^{(n)} \setminus \|\omega^{(n-1)}$ für $n \geq 4$, also ist

$$\|\omega^{(n)} \subseteq \|\omega''' \quad \text{für } n \geq 4.$$

Es sei nun $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''' \setminus \|\omega''$. Dann gibt es analog zu oben folgende Wörter:

$$\begin{array}{ll} \widehat{\mathbf{v}} v \widetilde{\mathbf{v}} = \omega & \text{mit } v \in \mathcal{A}, \\ \widehat{\mathbf{v}}' \widehat{\mathbf{y}} y \widetilde{\mathbf{v}}' \in \omega' & \text{mit } y \in \mathcal{A} \text{ und } \widehat{\mathbf{y}} y \widetilde{\mathbf{y}} \in h(\{v\}), \\ \widehat{\mathbf{v}}'' \widehat{\mathbf{y}}' \widehat{\mathbf{z}} z \widetilde{\mathbf{z}} \widetilde{\mathbf{y}}' \widetilde{\mathbf{v}}'' \in \omega'' & \text{mit } z \in \mathcal{A} \text{ und } \widehat{\mathbf{z}} z \widetilde{\mathbf{z}} \in h(\{y\}), \\ \widehat{\mathbf{v}}''' \widehat{\mathbf{y}}'' \widehat{\mathbf{z}}' \widehat{\mathbf{x}} x \widetilde{\mathbf{x}} \widetilde{\mathbf{z}}' \widetilde{\mathbf{y}}'' \widetilde{\mathbf{v}}''' \in \omega''' & \text{mit } \widehat{\mathbf{x}} x \widetilde{\mathbf{x}} \in h(\{z\}) \text{ und } \widehat{\mathbf{v}}''' \widehat{\mathbf{y}}'' \widehat{\mathbf{z}}' \widehat{\mathbf{x}}(\mathbf{o}) = \mathbf{a}, \end{array}$$

wobei $\{v, y, z, x\}$ paarweise verschieden sein müssen, da sonst die Voraussetzung $(\mathbf{a}, x) \notin \|\omega''$ verletzt wäre. Das Leerwort λ kann in der Menge $\{v, y, z, x\}$ nicht auftreten, da sonst $x = \lambda$ wäre. Unter diesen Bedingungen gibt es folgende Fälle:

1. $v \in \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}$, $y = \bar{v}$, $z = \bar{x}$:


Ein Beispiel mit $v = u$, $y = d$, $z = l$, $x = r$ soll die folgenden Ausführungen begleiten.

In der Ableitung $\hat{y} y \tilde{y}$ von v kommt als v -Kante nur (\mathbf{o}, v) vor. Folglich haben alle \bar{v} -Kanten die Form $(v(\mathbf{o}) + \alpha v^\perp(\mathbf{o}), \bar{v})$. Also gibt es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}$, so daß

$$\hat{y}(\mathbf{o}) = v(\mathbf{o}) + \alpha v^\perp(\mathbf{o})$$

gilt; dieses α sei α^* .

In $\|\hat{y} d \tilde{y}$ beginnt die einzige u -Kante bei \mathbf{o} , folglich beginnt die betrachtete d -Kante

bei $(\alpha^*, 1)$: 

Im Falle $\alpha^* > 0$ gehören alle Kanten $(v(\mathbf{o}) + \zeta v^\perp(\mathbf{o}), v^\perp)$ und $((\zeta + 1)v^\perp(\mathbf{o}), \bar{v}^\perp)$ mit $\zeta = 0, \dots, \alpha^* - 1$ zur Kantenmenge $\|\hat{y} y \tilde{y}$. Im Falle $\alpha^* < 0$ gehören alle Kanten $(v(\mathbf{o}) + \zeta \bar{v}^\perp(\mathbf{o}), \bar{v}^\perp)$ und $((\zeta + 1)\bar{v}^\perp(\mathbf{o}), v^\perp)$ mit $\zeta = 0, \dots, -\alpha^* - 1$ zur Kantenmenge $\|\hat{y} y \tilde{y}$:

falls $\alpha^* > 0$:

$$\{(v(\mathbf{o}) + \zeta v^\perp(\mathbf{o}), v^\perp), ((\zeta + 1)v^\perp(\mathbf{o}), \bar{v}^\perp) \mid \zeta = 0, \dots, \alpha^* - 1\} \subseteq \|\hat{y} y \tilde{y},$$

falls $\alpha^* < 0$:

$$\{(v(\mathbf{o}) + \zeta \bar{v}^\perp(\mathbf{o}), \bar{v}^\perp), ((\zeta + 1)\bar{v}^\perp(\mathbf{o}), v^\perp) \mid \zeta = 0, \dots, -\alpha^* - 1\} \subseteq \|\hat{y} y \tilde{y}.$$

In $\|\hat{y} d \tilde{y}$ treten mindestens folgende r - und l -Kanten auf: 

In der Kantenmenge $\|\hat{y}'^{(\mathbf{o})} \hat{z} z \tilde{z}$ kommt als v -Kante höchstens (\mathbf{o}, v) vor; als \bar{v} -Kanten kommen nur die aus $\|\hat{y} y \tilde{y}$ vor. Damit gibt es für die von z erzeugte \bar{x} -Kante $(\hat{y}' \hat{z}(\mathbf{o}), \bar{x})$ zwei Möglichkeiten:

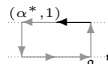
Die Kante gibt es bereits in $\|\hat{y} y \tilde{y}$:

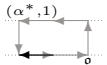
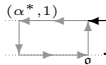
$$(a) (\hat{y}' \hat{z}(\mathbf{o}), \bar{x}) \in \|\hat{y} y \tilde{y}$$

oder in $\|\hat{y}'^{(\mathbf{o})} \hat{z} z \tilde{z}$ liegt auch die Kante $(\hat{y}' \hat{z}(\mathbf{o}) + \bar{x}(\mathbf{o}), x)$:

$$(b) (\hat{y}' \hat{z}(\mathbf{o}) + \bar{x}(\mathbf{o}), x) \in \|\hat{y}'^{(\mathbf{o})} \hat{z} z \tilde{z}.$$

Die in $\widehat{y}' \widehat{z} l \widetilde{z} \widetilde{y}$ (aus einer zweiten Ableitung von ω) betrachtete l -Kante kam schon

bei der vorigen Ableitung vor: , oder am gleichen Ort gibt es auch eine

r -Kante:  bzw. .

Aus z geht die durch x in $\widehat{v}''' \widehat{y}'' \widehat{z}' \widehat{x} x \widetilde{x} \widetilde{z}' \widetilde{y}'' \widetilde{y}'''$ erzeugte Kante (\mathbf{a}, x) hervor. Angenommen, es trifft Fall (a) zu, dann liegt die Kante $(\widehat{y}'' \widehat{z}' \widehat{x}(\mathbf{o}), x)$ in der Menge $\|\widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}'$, was gleichbedeutend ist mit $(\mathbf{a} - \widehat{v}'''(\mathbf{o}), x) \in \|\widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}'$ oder $(\mathbf{a}, x) \in \|\widehat{v}'''(\mathbf{o}) \widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}'$. Auf Grund der Synchronisiertheit von G gilt $\widehat{v}'''(\mathbf{o}) = \widehat{v}''(\mathbf{o})$ (Folg. 3.1). Folglich liegt (\mathbf{a}, x) in der Menge $\|\widehat{v}'' \widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}'$ und damit auch in der Menge $\|\widehat{v}'' \widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}' \widehat{v}''$, woraus $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''$ folgt.

Die in ω'' betrachtete l -Kante kam schon bei ω' vor, folglich tritt die daraus entstehende r -Kante (\mathbf{a}, r) nicht erst bei ω''' sondern bereits bei ω'' auf. ⚡

Dies ist ein Widerspruch; folglich kann höchstens Fall (b) zutreffen. Da beim Ableiten von z keine neuen v -, \bar{v} - oder \bar{x} -Kanten entstehen, gilt

- die entstehende x -Kante liegt bereits vor:

$$(\widehat{y}'' \widehat{z}' \widehat{x}(\mathbf{o}), x) \in \|\widehat{y}'(\mathbf{o}) \widehat{z} z \widetilde{z}$$

(dann gilt $(\mathbf{a} - \widehat{v}'''(\mathbf{o}), x) \in \|\widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z}$ bzw. $(\mathbf{a}, x) \in \|\widehat{v}'''(\mathbf{o}) \widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z}$ oder $(\mathbf{a}, x) \in \|\widehat{v}'' \widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}' \widehat{v}''$, was zu dem Widerspruch $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''$ führt), oder

- es gilt $\widehat{x}x(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ (dann ist $\widehat{x}(\mathbf{o}) = \bar{x}(\mathbf{o})$; da $\widehat{y}' \widehat{z}(\mathbf{o}) = \widehat{y}'' \widehat{z}'(\mathbf{o})$ gilt, liegt die Kante $(\widehat{y}'' \widehat{z}' \widehat{x}(\mathbf{o}), x) = (\mathbf{a} - \widehat{v}'''(\mathbf{o}), x)$ in der Menge $\|\widehat{y}' \widehat{z} z \widetilde{z} \widetilde{y}'$, was ebenfalls zu dem Widerspruch $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''$ führt).

In jedem Falle liegt die betrachtete r -Kante bereits bei ω'' vor.

Somit tritt auch Fall (b) nicht ein; also auch nicht der gesamte Fall.

2. $v \in \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}$, $y = \bar{x}$, $z = \bar{v}$ und

3. $v = \bar{x}$, $y \in \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}$, $z = \bar{y}$:

Durch analoge Überlegungen zu oben gelangt man auch in diesen beiden Fällen zu einem Widerspruch zur Voraussetzung $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''' \setminus \|\omega''$.

Damit ist gezeigt, daß es keine Kante $(\mathbf{a}, x) \in \|\omega''' \setminus \|\omega''$ gibt. Das führt zu

$$\|\omega''' \subseteq \|\omega''$$

und mit dem ersten Teil zu $\|\omega^{(n)} \subseteq \|\omega''$ für $n \geq 2$, womit die Behauptung bewiesen ist. ✱

Aus Folgerung 3.6 schließt man die Inklusionen

$$\|\omega \subseteq \|h(\{\omega\}) \subseteq \|h^2(\{\omega\})$$

und für jedes Untersystem $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega) \sqsubseteq G$ mit $i = 1, \dots, \#_U G$

$$\|\omega \subseteq \|h_i(\{\omega\}) \subseteq \|h_i^2(\{\omega\}).$$

Einen Zusammenhang zwischen Kantenmengen von Ableitungen bezüglich G und der Untersysteme von G liefert das folgende Lemma

3.8. Lemma: *Jede Kante eines gerichteten Gittergraphen einer zweiten Ableitung des Axioms mittels G liegt in der Kantenmenge zur zweiten Ableitung des Axioms bezüglich eines Untersystems:*

$$\|h^2(\{\omega\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\#_U G} \|h_i^2(\omega).$$

Beweis: Es sei (\mathbf{a}, x) eine Kante aus $\|h^2(\{\omega\})$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $(\mathbf{a}, x) \in \|h(\{\omega\})$:

In diesem Falle sei $\omega = \widehat{z} z \widetilde{z}$, und es gibt ein Wort $\widehat{z}' \widehat{x} x \widetilde{x} \widetilde{z}' \in h(\{\omega\})$ mit $\widehat{x} x \widetilde{x} \in h(\{z\})$ und $\widehat{z}' \widehat{x}(\mathbf{o}) = \mathbf{a}$. Für jedes $i = 1, \dots, \#_U G$ gilt

$$(h_i(\widehat{z}))(\mathbf{o}) = \widehat{z}(\mathbf{o}) = \widehat{z}'(\mathbf{o}).$$

Außerdem gibt es ein Untersystem $U_i \sqsubseteq G$ mit $h_i(z) = \widehat{x} x \widetilde{x}$; somit liegt (\mathbf{a}, x) in $\|h_i(\omega)$ und damit auch in $\bigcup_{i=1}^{\#_U G} \|h_i^2(\omega)$.

2. $(\mathbf{a}, x) \in \|h^2(\{\omega\}) \setminus \|h(\{\omega\})$:

Es seien

$$\begin{aligned} \omega &= \widehat{z} z \widetilde{z}, \\ \widehat{z}' \widehat{y} y \widetilde{y} \widetilde{z}' &\in h(\{\omega\}) \text{ mit } \widehat{y} y \widetilde{y} \in h(\{z\}) \text{ und} \\ \widehat{z}'' \widehat{y}' \widehat{x} x \widetilde{x} \widetilde{y}' \widetilde{z}'' &\in h^2(\{\omega\}) \text{ mit } \widehat{x} x \widetilde{x} \in h(\{y\}) \text{ und } \widehat{z}'' \widehat{y}' \widehat{x}(\mathbf{o}) = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Da die Kante (\mathbf{a}, x) nicht in der Menge $\|h(\{\omega\})$ liegt, sind z, y, x paarweise verschieden. Damit gibt es ein Untersystem $U_i \sqsubseteq G$, so daß $h_i(z) = \widehat{y} y \widetilde{y}$ und $h_i(y) = \widehat{x} x \widetilde{x}$ gilt. Wegen $(h_i^2(\widehat{z})h_i(\widehat{y}))(\mathbf{o}) = \widehat{z}'' \widehat{y}'(\mathbf{o})$ liegt die Kante (\mathbf{a}, x) auch in der Menge $\|h_i^2(\omega)$ und damit in $\bigcup_{i=1}^{\#_U G} \|h_i^2(\omega)$.

Andere Fälle gibt es nicht; folglich liegt jede Kante $(\mathbf{a}, x) \in \|h^2(\{\omega\})$ auch in der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\#_U G} \|h_i^2(\omega)$, womit die Behauptung bewiesen ist. ✱

Zusammen liefern die Lemmata 3.7 und 3.8 folgendes.

3.9. Folgerung: Jede Kante in einem gerichteten Gittergraphen zu einer n -ten Ableitung des Axioms bezüglich G liegt auch in der Kantenmenge zur zweiten Ableitung des Axioms bezüglich eines Untersystems von G :

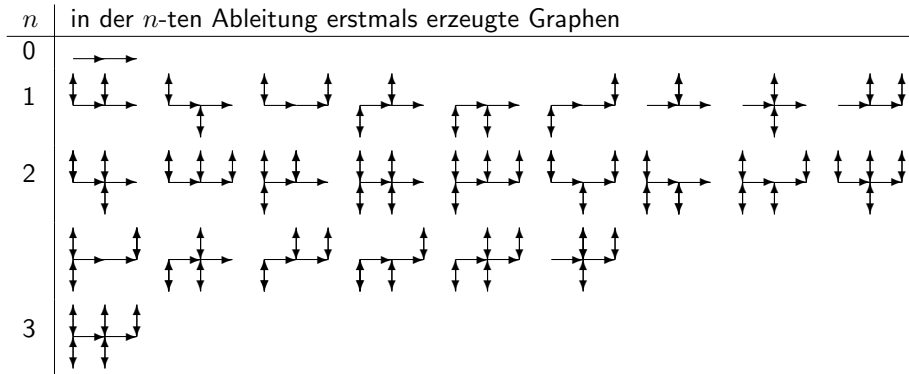
$$\forall n \in \mathbb{N} : \|h^n(\{\omega\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\#_U G} \|h_i^2(\omega).$$

Das folgende Beispiel soll diesen Zusammenhang veranschaulichen:

Es sei $G = (\mathcal{A}, h, rr)$ ein längenkonstantes $s0L$ -System mit dem $(1, 1)$ -Endomorphismus h mit $\{r\} \mapsto \{udr, dur, rud\}$ und $\{x\} \mapsto \{x\}$ für $x \neq r$. Zu G existieren genau $\#_U G = 3$ deterministische Untersysteme

$$\begin{aligned} U_1 &= (\mathcal{A}, h_1, rr) \text{ mit } h_1(r) = udr, h_1(x) = x \text{ für } x \neq r, \\ U_2 &= (\mathcal{A}, h_2, rr) \text{ mit } h_2(r) = dur, h_2(x) = x \text{ für } x \neq r, \\ U_3 &= (\mathcal{A}, h_3, rr) \text{ mit } h_3(r) = rud, h_3(x) = x \text{ für } x \neq r. \end{aligned}$$

Beim Ableiten mittels G entstehen genau folgende schlichte, gerichtete Gittergraphen:



Ab der vierten Ableitung entstehen keine neuen Gittergraphen.

Die schlichten, gerichteten Gittergraphen der zweiten Ableitungen von rr mittels der Untersysteme sind durch

$$U_1 : \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \rightarrow \end{array}, \quad U_2 : \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array}, \quad U_3 : \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array};$$

die Vereinigung der Kantenmengen entspricht folglich dem Gittergraphen . Es ist zu erkennen, daß jede Kante, die in einem von G erzeugten Gittergraphen auftritt, auch in dem Gittergraphen zur zweiten Ableitung mittels eines deterministischen Untersystems liegt.

Die Kantenmenge $\|h_i^2(\omega)$ ist für jedes Untersystem $U_i \sqsubseteq G$ mit $i = 1, \dots, \#_U G$ endlich (da es höchstens so viele Kanten wie Buchstaben in $h_i^2(\omega)$ gibt). Folglich gibt es unter den Kantenmengen $\|h^n(\{\omega\})$ ($n \in \mathbb{N}$) nur endlich viele verschiedene (Folg. 3.9). Daher erhält die von G erzeugte Bildmenge auch nur endlich viele Bilder.

3.10. Satz: Ein längenkonstantes $s0L$ -System erzeugt genau dann eine endliche Bildmenge, wenn jedes seiner deterministischen Untersysteme eine endliche Bildmenge erzeugt.

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, einfach nichtdeterministische Ketten-Code-Bild-Systeme über dem Alphabet $\{r, u, l, d\}$ hinsichtlich der Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildmengen untersucht.

Die Untersuchungen beruhen auf einer Abstrahierungshierarchie aus [T02]. Es wird nachgewiesen, daß es entscheidbar ist, ob ein synchrones, einfach nichtdeterministisches Ketten-Code-Bild-System eine endliche oder unendliche Bildmenge erzeugt.

Ketten-Code-Bild-Systeme werden in längenkontrahierende, -konstante und -expandierende Systeme eingeteilt. Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme erzeugen eine endliche, längenexpandierende eine unendliche Bildmenge. Unter den längenkonstanten Ketten-Code-Bild-Systemen gibt es sowohl Systeme, die eine endliche Bildmenge liefern, als auch solche, die eine unendliche Bildmenge erzeugen. Ein längenkonstantes Ketten-Code-Bild-System hat genau dann eine unendliche Bildmenge, wenn es ein deterministisches Untersystem mit unendlicher Bildmenge hat.

Literatur

- [DHr92] DASSOW, J.; HROMKOVIČ, J.: *On Synchronized Lindenmayer Picture Languages*. In: *Lindenmayer Systems*, Seiten 253–261. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [RS80] ROZENBERG, G.; SALOMAA, A.: *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, 1980.
- [T02] TRUTHE, B.: *Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Preprint Nr. 8/2002.