

# Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, deterministisch-tabellierter, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme

Bianca Truthe\*

5. November 2003

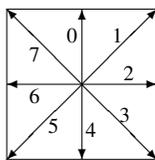
## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, deterministisch-tabellierte, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme in Hinsicht auf die Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht. Es wird gezeigt, daß jedes deterministisch-tabellierte Ketten-Code-Bild-System eine endliche oder abzählbare Bildsprache erzeugt und eine Methode angegeben, mit der zu jedem solchen Ketten-Code-Bild-System entschieden werden kann, ob es eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

## 1 Einleitung

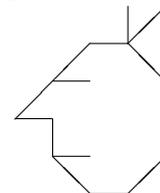
Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefaßt werden.

Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden von H. FREEMAN eingeführt ([Fr61]). Bei Ketten-Codes entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. FREEMAN benutzt ein achtelementiges Alphabet  $\{0, \dots, 7\}$ , dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Zum Beispiel entsteht das nebenstehende Bild aus dem Wort 1261204153445672606:

(Beim Nachvollziehen beginne man an der Nasenspitze.)



\*Fakultät für Informatik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg,  
e-mail: truthe@isg.cs.uni-magdeburg.de

Für sprachentheoretische Betrachtungen genügen die vier Richtungen  $\{0, 2, 4, 6\}$ , da die restlichen vier keine andersartigen Resultate liefern und keine anderen Beweismethoden erfordern [DH89]. In Anlehnung an Plotter-Befehle schreibt man  $r, u, l, d$  für die Richtungen *right, up, left, down*.

Der Zusammenhang von Wörtern und Bildern legt es nahe, Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildsprachen zu suchen. Die erste Arbeit auf diesem Gebiet ist von J. FEDER ([Fe68]). In den 80er Jahren wurden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur CHOMSKY-Hierarchie gehören ([MRW82], [SW85]).

Bei den biologisch motivierten LINDENMAYER-Systemen wird eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert.

Kontextfreie LINDENMAYER-Systeme werden nach [RS80] in folgende Klassen eingeteilt:  $DOL$  (deterministisches Ersetzen von Buchstaben),  $OL$  (nichtdeterministisches Ersetzen),  $DTOL$  (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und  $TOL$  (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird). Zu Ketten-Code-Bild-Sprachen, die auf LINDENMAYER-Systemen basieren, liegen nur wenige Erkenntnisse vor ([DHR92]).

In [T02] wurde eine Abstrahierungshierarchie entwickelt und die Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Ketten-Code-Bild-Sprachen zu synchronen, deterministischen, kontextfreien LINDENMAYER-Systemen ( $sDOL$ -Systemen) auf Grundlage dieser Hierarchie bewiesen. Mittels dieser Abstrahierungshierarchie wurde in [T03] die Entscheidbarkeit der Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, einfach nichtdeterministischer, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme ( $sOL$ -Systeme) nachgewiesen. Die vorliegende Arbeit schließt an [T03] an, indem die Entscheidbarkeit bei Ketten-Code-Bild-Sprachen synchroner, deterministisch-tabellierter, kontextfreier Ketten-Code-Bild-Systeme untersucht wird.

## 2 Grundlagen

Die Endlichkeitsuntersuchungen zu Bildsprachen von synchronen, deterministisch-tabellierten, kontextfreien Ketten-Code-Bild-Systemen in der vorliegenden Arbeit beruhen auf der Abstrahierungshierarchie, die in [T02] entwickelt wurde. In diesem Abschnitt werden die benötigten Begriffe zusammengestellt.

### 2.1 Strukturen über einem Alphabet

Es seien  $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$  ein Alphabet und  $(\mathcal{A}^*, \cdot)$  die freie Struktur über  $\mathcal{A}$  mit der Operation der Aneinanderreihung (Konkatenation). Die Elemente aus  $\mathcal{A}^*$  heißen Wörter;  $\lambda$  ist das Leerwort:  $\forall w \in \mathcal{A}^* : w\lambda = \lambda w = w$ . Die Menge  $\mathcal{A}^+$  enthalte alle Wörter aus  $\mathcal{A}^*$  außer dem Leerwort  $\lambda$ . Ein Operationssymbol für die Aneinanderreihung wird im allgemeinen nicht geschrieben. Das Mengensystem der endlichen, nichtleeren Teilmengen von  $\mathcal{A}^*$  sei  $\mathbb{A}$ . Die Konkatenation zweier Wortmengen  $U, V \in \mathbb{A}$  liefert die Menge aller Wörter  $uv$ ,

bei denen  $u$  aus der Menge  $U$  und  $v$  aus  $V$  sind:

$$UV = \{uv \mid u \in U \text{ und } v \in V\}.$$

Das Mengensystem  $\mathbb{A}$  bildet mit den Operationen Vereinigung  $\cup$  und Konkatenation  $\cdot$  einen Halbring  $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ , da  $(\mathbb{A}, \cup)$  und  $(\mathbb{A}, \cdot)$  Halbgruppen sind und die bekannten Distributivgesetze gelten.

Auf  $\mathcal{A}^*$  wird eine Längenfunktion  $|\cdot|$  induktiv erklärt:

1.  $|\lambda| = 0, |r| = |l| = |u| = |d| = 1$ .
2. Sind  $u, v$  Wörter, so ist die Länge des zusammengesetzten Wortes  $uv$

$$|uv| = |u| + |v|.$$

Alle Wörter  $w$  der Länge  $n$  werden in der Menge  $\mathcal{A}^n$  zusammengefaßt. Ein Wort  $w \in \mathcal{A}^n$  sei aus Buchstaben  $w_1, \dots, w_n$  zusammengesetzt:  $w = w_1 \cdots w_n$ . Mit  $\vec{w}_i$  für  $i = 0, \dots, n$  ist in diesem Zusammenhang das Teilwort bis zum  $i$ -ten Buchstaben gemeint:

$$\vec{w}_0 = \lambda, \quad \vec{w}_i = w_1 \cdots w_i.$$

Zu einem Wort  $w \in \mathcal{A}^*$  und einem Buchstaben  $x \in \mathcal{A}$  sei  $|w|_x$  die Anzahl der Vorkommen von  $x$  in  $w$ . Die Menge  $[w]$  sei die Menge der in dem Wort  $w$  auftretenden Buchstaben:

$$[w] = \{x \mid |w|_x \geq 1\}.$$

Analog steht  $[W]$  mit einer Wortmenge  $W$  für die Menge aller Buchstaben, die in einem Wort aus  $W$  auftreten:

$$[W] = \bigcup_{w \in W} [w].$$

Mit den Elementen aus  $\mathcal{A}^*$  seien Abbildungen auf dem  $\mathbb{Z}^2$  assoziiert:

$$w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad (w \in \mathcal{A}^*).$$

Dem Leerwort entspricht die identische Abbildung. Die atomaren Abbildungen  $r, l, u, d$  ordnen einem Punkt  $q \in \mathbb{Z}^2$  seine Nachbarn zu:

$$\begin{aligned} r(q) &= q + (1, 0), & l(q) &= q - (1, 0), \\ u(q) &= q + (0, 1), & d(q) &= q - (0, 1). \end{aligned}$$

(Die Funktionsnamen  $r, l, u, d$  stammen von den Richtungen right, left, up, down.)

Ein zusammengesetztes Wort  $vw \in \mathcal{A}^*$  symbolisiert die verkettete Abbildung  $v \circ w$ :

$$v \circ w : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } q \mapsto w(v(q)).$$

Der Nullpunkt des  $\mathbb{Z}^2$  sei  $\mathfrak{o} = (0, 0)$ . Die Verschiebungen  $x(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}$  eines beliebigen Punktes  $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$  zu  $x(\mathfrak{q})$  seien für  $x \in \mathcal{A}$  mit  $\mathfrak{v}_x \in \mathbb{Z}^2$  bezeichnet. Folglich gilt  $\mathfrak{v}_r = (1, 0)$ ,  $\mathfrak{v}_l = -(1, 0)$ ,  $\mathfrak{v}_u = (0, 1)$ ,  $\mathfrak{v}_d = -(0, 1)$ . Ein Punkt  $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}^2$  sei durch  $(p_x, p_y)$  dargestellt. Die Interpretation von Wörtern als Abbildungen auf dem  $\mathbb{Z}^2$  ist ein Homomorphismus von der freien Struktur  $(\mathcal{A}, \cdot)$  in die freie Struktur  $(\mathcal{A}, \circ)$ . Die Operatoren  $\cdot$  und  $\circ$  werden nicht geschrieben, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Operation es sich handelt.

Die Abbildungen  $r$  und  $l$  sowie  $u$  und  $d$  sind zu einander invers. Die Abbildungen  $ru$  und  $ur$  sowie  $ld$  und  $dl$  ordnen einem Punkt  $\mathfrak{q}$  seine Diagonalnachbarn zu:

$$ru(\mathfrak{q}) = ur(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} + (1, 1), \quad ld(\mathfrak{q}) = dl(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} - (1, 1).$$

Eine Abbildung, die zusammen mit einer Abbildung  $x$  einen Diagonalnachbarn liefert, wird durch  $^\perp$  gekennzeichnet. Die Inversen zweier Abbildungen  $x$  und  $x^\perp$  werden durch  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{x}^\perp$  symbolisiert. Die nebenstehende Tabelle zeigt die entsprechenden Funktionen.

$x$	$\bar{x}$	$x^\perp$	$\bar{x}^\perp$
$r$	$l$	$u$	$d$
$l$	$r$	$d$	$u$
$u$	$d$	$r$	$l$
$d$	$u$	$l$	$r$

## 2.2 Graphische Einbettung

Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von  $\mathbb{Z}^2$  ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten  $\mathfrak{q}, x(\mathfrak{q})$  mit  $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$  und  $x \in \{r, l, u, d\}$  verbindet. Die „Lage“ der Knoten ist wesentlich; ein Umbenennen der Knoten führt in der Regel nicht zu einem isomorphen Gittergraphen. Eigenschaften wie gerichtet, ungerichtet, schlicht bleiben davon unberührt.

In [T02] werden Funktionen eingeführt, die einem Wort  $w \in \mathcal{A}^n$  folgendes zuordnen:

- Die Knotenmenge  $\odot^{\mathfrak{a}}(w) = \{\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) \mid i = 0, \dots, n\}$ ,
- den gerichteten Gittergraphen (möglicherweise mit Mehrfachkanten)

$$g^{\mathfrak{a}}(w) = \left( \odot^{\mathfrak{a}}(w), \{(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}))\}_{i=1, \dots, n} \right),$$

- den schlichten gerichteten Gittergraphen  $s^{\mathfrak{a}}(w)$  zu  $g^{\mathfrak{a}}(w)$  (ohne Mehrfachkanten)

$$s^{\mathfrak{a}}(w) = (\odot^{\mathfrak{a}}(w), \{(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \mid i = 1, \dots, n\}),$$

- die Kantenmenge  $\|\!|^{\mathfrak{a}}w$  von  $s^{\mathfrak{a}}(w)$

$$\|\!|^{\mathfrak{a}}w = \{(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), w_i) \mid i = 1, \dots, n\},$$

wobei eine Kante durch ein Punkt-Richtungs-Paar anstatt eines Paares zweier Punkte dargestellt wird,

- das Bild (den Schatten von  $s^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$ )

$$p^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) = (\odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathbf{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathbf{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathbf{a})) \mid i = 1, \dots, n \})$$

- und die Bildfläche

$$\square^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} \underline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \leq x \leq \overline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \text{ und} \\ \underline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \leq y \leq \overline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \end{array} \right\},$$

wobei  $\underline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$ ,  $\underline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$ ,  $\overline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$  und  $\overline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$  die Randkoordinaten der Knoten aus  $\odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w})$  darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) &= \min \{ x \mid (x, y) \in \odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \}, & \underline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) &= \min \{ y \mid (x, y) \in \odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \}, \\ \overline{x}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) &= \max \{ x \mid (x, y) \in \odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \}, & \overline{y}^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) &= \max \{ y \mid (x, y) \in \odot^{\mathbf{a}}(\mathbf{w}) \}. \end{aligned}$$

Der obere Index wird weggelassen, falls sich die Funktionen auf den Nullpunkt beziehen ( $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ).

Bildflächen sind Rechteckmengen (siehe [T02]). Eine Rechteckmenge  $\mathfrak{P}$  ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt, die „untere, linke Ecke“  $(\underline{x}, \underline{y})$  mit

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \min \{ x \mid (x, y) \in \mathfrak{P} \}, \\ \underline{y} &= \min \{ y \mid (x, y) \in \mathfrak{P} \} \end{aligned}$$

und die „obere, rechte Ecke“  $(\overline{x}, \overline{y})$  mit

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \max \{ x \mid (x, y) \in \mathfrak{P} \}, \\ \overline{y} &= \max \{ y \mid (x, y) \in \mathfrak{P} \} \end{aligned}$$

oder die „obere, linke Ecke“  $(\underline{x}, \overline{y})$  und die „untere, rechte Ecke“  $(\overline{x}, \underline{y})$ . Geschrieben wird eine Rechteckmenge als  $[(\underline{x}, \underline{y}), (\overline{x}, \overline{y})]$ . Die folgenden Schreibweisen sind äquivalent:

$$[(\underline{x}, \underline{y}), (\overline{x}, \overline{y})], [(\overline{x}, \overline{y}), (\underline{x}, \underline{y})], [(\underline{x}, \overline{y}), (\overline{x}, \underline{y})], [(\overline{x}, \underline{y}), (\underline{x}, \overline{y})].$$

Das Skalieren einer Bildfläche  $\mathfrak{P} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$  um einen Faktor  $s \in \mathbb{N}_0$  liefert die Bildfläche

$$s\mathfrak{P} = \{ s\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r} \in \mathfrak{P} \} = [s\mathfrak{p}, s\mathfrak{q}].$$

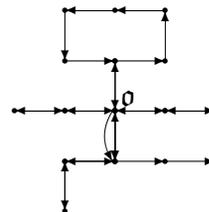
Die Vereinigung zweier Bildflächen ist im allgemeinen keine Rechteckmenge. Eine erweiterte Vereinigung zweier Bildflächen soll die Bildfläche der Vereinigung sein:

$$\mathfrak{P}_X \cup \mathfrak{P}_Y = \mathfrak{P}_{X \cup Y}.$$

Das folgende Beispiel zeigt die genannten Graphen zu einem gewissen Wort.

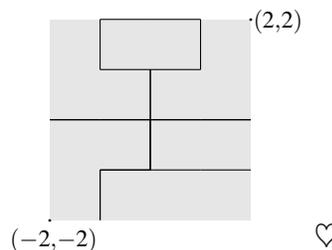
**2.1. Beispiel:** Es sei  $w = \text{durrllurulldrdllrrdldurrr}$ .

Der gerichtete Gittergraph  $g(w)$  ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen (zum Nachzeichnen beginne man im Nullpunkt  $\circ$ ). Die Knoten sind durch Punkte  $\cdot$  markiert. Der schlichte, gerichtete Gittergraph  $s(w)$  entsteht durch Entfernen der Mehrfachkanten, in diesem Beispiel durch Streichen der Kante von  $\circ$  nach unten zu  $(0, -1)$ .



Jedes Element der Kantenmenge  $\|w$  ist ein Paar  $(p, x)$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}^2$  und  $x \in \mathcal{A}$  gilt. Ein solches Paar  $(p, x)$  ist genau dann in  $\|w$  enthalten, wenn der gerichtete Gittergraph eine Kante vom Knoten  $p$  zum Knoten  $x(p)$  enthält. Beispielsweise gilt  $((0, -1), r) \in \|w$ , weil es eine Kante vom Knoten  $(0, -1)$  zu seinem rechten Nachbarn  $r((0, -1)) = (1, -1)$  gibt. Andererseits gilt  $((1, -1), l) \notin \|w$ , weil vom Knoten  $(1, -1)$  keine Kante zu seinem linken Nachbarn  $l((1, -1)) = (0, -1)$  führt.

Das Bild  $p(w)$  entsteht aus dem schlichten, gerichteten Gittergraphen  $s(w)$  durch Weglassen der Kantenrichtungen. Es ist nebenstehend abgebildet. (Wenn ein Bild vorliegt, ist es nicht mehr von Bedeutung, wie es entstanden ist.) Die Knoten sind nicht gekennzeichnet. Die graue Fläche stellt die zugehörige Bildfläche  $[(-2, -2), (2, 2)]$  dar.



Die Mengen  $\mathcal{A}^*$  von Wörtern,  $\{g^a(w)\}$  von gerichteten Gittergraphen,  $\{s^a(w)\}$  von schlichten, gerichteten Gittergraphen und  $\{p^a(w)\}$  von Bildern ( $w \in \mathcal{A}^*$ ,  $a \in \mathbb{Z}^2$ ) bilden unterschiedliche Ebenen einer Abstrahierungshierarchie. Auf unterster Ebene werden Wörter einer Sprache betrachtet. Ein Interpretieren der Wörter als gerichtete Graphen mit Mehrfachkanten führt auf die nächsthöhere Stufe. Auf die dritte Ebene gelangt man durch Abstrahieren von den Mehrfachkanten. Durch Abstrahieren von den Kantenrichtungen gelangt man schließlich auf die Ebene der Bilder.

### 2.3 Spezielle Endomorphismen

Es seien  $\kappa, \mu$  zwei natürliche Zahlen,  $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$ . Ein Endomorphismus  $h$  auf dem Halbring  $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$  heißt  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus, falls für alle  $x \in \mathcal{A}$  folgendes erfüllt ist: Wenn  $x' \in h(\{x\})$  ist, so gilt

1.  $x'(\circ) = \kappa \mathbf{v}_x$  und
2.  $\square(x') \subseteq \kappa[\circ, \mathbf{v}_x] \uplus \mu[\mathbf{v}_{x^\perp}, \mathbf{v}_{\bar{x}^\perp}]$ .

Aus der zweiten Bedingung folgt für das Leerwort: Wenn  $\lambda' \in h(\{\lambda\})$  ist, gilt für die Bildfläche  $\square(\lambda') \subseteq [\circ, \circ]$ . Aus der ersten Bedingung folgt  $\lambda'(\circ) = \kappa \circ = \circ$ , also liegt der Nullpunkt in der Bildfläche  $\square(\lambda')$ . Somit gilt  $\square(\lambda') = [\circ, \circ]$ ; das Leerwort wird auf sich abgebildet:  $h(\{\lambda\}) = \{\lambda\}$ .

Das Anwenden von  $h$  auf eine Wortmenge  $W$  wird Ableiten genannt; die Menge  $h(W)$

entsteht in einem Ableitungsschritt. Die  $n$ -stellige Verkettung eines  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus  $h$  wird kurz  $h^n$  geschrieben. Jedes Element von  $h^n(\{w\})$  mit  $w \in \mathcal{A}^*$  heißt  $n$ -te Ableitung von  $w$ ; ein solches Wort wird auch mit  $w^{(n)}$  bezeichnet ( $w', w'', w'''$  für die ersten drei Ableitungen;  $w^{(0)} = w$ ).

Folgendes Beispiel soll die Synchronisationsbedingungen veranschaulichen:

**2.2. Beispiel:** Es sei  $h$  ein Endomorphismus auf  $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$  mit

$$h(\{r\}) = \{rdruurdr, rurrddlurr\} \text{ und } h(\{x\}) = \{xxxx\} \text{ für } x \neq r.$$

Damit gilt

$$(rdruurdr)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r,$$

$$(rurrddlurr)(\mathfrak{o}) = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_l + \mathfrak{v}_u + \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_r = 4\mathfrak{v}_r,$$

$$(xxxx)(\mathfrak{o}) = 4\mathfrak{v}_x.$$

Die ersten Ableitungen sind  $rdruurdr$ ,  $rurrddlurr$ ,  $llll$ ,  $uuuu$  und  $dddd$ . Die zugehörigen schlichten, gerichteten Gittergraphen zeigt die folgende Tabelle.

Ableitung	Zugehöriger Gittergraph
$rdruurdr$	
$rurrddlurr$	
$llll$	
$uuuu$	
$dddd$	

Alle Punkte zu einer Ableitung  $x' \in h(\{x\})$  liegen in der Bildfläche

$$\square(x') \subseteq 4[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \cup [\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}].$$

Somit ist der Endomorphismus  $h$  ein  $(4, 1)$ -Endomorphismus.

Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabet liegen; die zweite Bedingung bewirkt, daß das Bild zu jeder Ableitung von  $x \in \mathcal{A}$  in einem gewissen Rechteck liegt.  $\heartsuit$

Es sei  $w$  ein Wort aus  $\mathcal{A}^n$ ; dann gilt wegen der Konkatenation von Wortmengen

$$\{w\} = \{w_1 \cdots w_n\} = \{w_1\} \cdots \{w_n\}.$$

Desweiteren sei  $h$  ein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus, dann gilt wegen der Operationstreue von  $h$  bezüglich der Konkatenation

$$h(\{w\}) = h(\{w_1 \cdots w_n\}) = h(\{w_1\} \cdots \{w_n\}) = h(\{w_1\}) \cdots h(\{w_n\}).$$

Aus der Operationstreue von  $h$  bezüglich der Vereinigung folgt für eine endliche Wortmenge  $W \in \mathbb{A}$

$$h(W) = \bigcup_{w \in W} h(\{w\}).$$

Die Mächtigkeit einer Menge  $M$  wird durch  $|M|$  symbolisiert; folglich ist  $|h(\{w\})|$  die Anzahl der ersten Ableitungen von  $w$ .

Es sei bemerkt, daß es zu je zwei natürlichen Zahlen  $\kappa$  und  $\mu$  einen  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus gibt; beispielsweise ist  $h$  mit  $\{x\} \mapsto \{x^\kappa\}$  ( $x \in \mathcal{A}$ ) für jede natürliche Zahl  $\mu \in \mathbb{N}_0$  ein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus.

Es sei  $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$  eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen  $\mu \geq \mu_0$ :

$$\mu_0[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}] \subseteq \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}].$$

**2.3. Folgerung:** Jeder  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus ist auch ein  $(\kappa, \mu + 1)$ -Endomorphismus.

Der Parameter  $\kappa$  gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle  $\kappa = 0$  heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle  $\kappa = 1$  längenkonstant und im Falle  $\kappa > 1$  längenexpandierend. Der Parameter  $\mu$  ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.

Sind bei einem  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus  $h$  die atomaren Bilder einelementig, so hat jedes Wort genau eine Ableitung; die Mengenzeichen werden in diesem Falle weggelassen:  $h(w) = w'$ .

## 2.4 Ketten-Code-Bild-Systeme

In diesem Abschnitt werden synchrone, deterministisch-tabellierte Ketten-Code-Bild-Systeme (*sDTOL*-Systeme) definiert, die dann in Zusammenhang mit synchrone, deterministische sowie synchrone, einfach-nichtdeterministische Ketten-Code-Bild-Systeme gebracht werden.

### 2.4.1 sDTOL-Systeme

Ein synchrones, deterministisch-tabelliertes, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt sDTOL-System) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet  $\mathcal{A} = \{r, l, u, d\}$ , einer endlichen, nichtleeren Menge  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ , wobei jedes Element  $h_i$  für  $i = 1, \dots, m$  einen  $(\kappa_i, \mu_i)$ -Endomorphismus darstellt und das Bild  $h_i(\{x\})$  jedes Buchstaben  $x \in \mathcal{A}$  einelementig ist (die Mengenzeichen werden weggelassen:  $h_i(x) = x'$ ) sowie einem nichtleeren Startwort (Axiom)  $\omega \in \mathcal{A}^+$ .

Mit  $h^n$  sei die Menge aller  $n$ -stelligen Verknüpfungen von Elementen aus  $h$  bezeichnet:

$$h^n = \{h_{i_1} \circ \dots \circ h_{i_n} \mid i_j \in \{1, \dots, m\}; j = 1, \dots, n\};$$

desweiteren sei  $h^n(\{w\})$  die Menge aller Wörter, die durch die Elemente von  $h^n$  entstehen:

$$h^n(\{w\}) = \{h_*(w) \mid h_* \in h^n\}.$$

Die von einem sDTOL-System  $G$  erzeugte Bildsprache  $B_G$  ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms  $\omega$ :

$$B_G = \{p(w) \mid w \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ein sDTOL-System heißt längenexpandierend, wenn mindestens ein  $(\kappa_i, \mu_i)$ -Endomorphismus  $h_i \in h$  längenexpandierend ist. Es heißt längenkontrahierend, wenn alle Endomorphismen aus  $h$  längenkontrahierend sind. Andernfalls ist mindestens ein Endomorphismus aus  $h$  längenkonstant; alle anderen sind längenkontrahierend. Diese sDTOL-Systeme sollen längenkonstant heißen.

Gibt es zu einem sDTOL-System  $G$  zwei natürliche Zahlen  $\kappa, \mu$ , so daß alle auftretenden Endomorphismen  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismen sind, so heißt  $G$  rein, andernfalls gemischt. Es sei angemerkt, daß längenkontrahierende sDTOL-Systeme stets reine Systeme sind. Bei einem reinen, längenkonstanten sDTOL-System sind alle auftretenden Endomorphismen  $(1, \mu)$ -Endomorphismen; bei einem gemischten, längenkonstanten sDTOL-System tritt mindestens ein  $(1, \mu)$ - und mindestens ein  $(0, \mu)$ -Endomorphismus auf.

### 2.4.2 Deterministische Untersysteme

Analog zu sOL-Systemen werden auch zu sDTOL-Systemen deterministische Untersysteme eingeführt: Ein sDOL-System  $U = (\mathcal{A}, h_\circ, \omega)$  heißt deterministisches Untersystem eines sDTOL-System  $G$  (geschrieben  $U \sqsubseteq G$ ), wenn jede Ableitung eines Wortes  $w \in \mathcal{A}^*$  mittels  $U$  auch Ableitung mittels  $G$  ist.

**2.4. Folgerung:** Ein sDTOL-System  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  mit  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$  hat genau die deterministischen Untersysteme  $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$  für  $i = 1, \dots, m$ .

**Beweis:** Zunächst ist klar, daß jede Ableitung mittels eines deterministischen Untersystems  $U_i$  auch Ableitung mittels  $G$  ist (da  $h_i^n \in h^n$  gilt). Angenommen, es gibt ein anderes deterministisches Untersystem  $U_* = (\mathcal{A}, h_*, \omega)$ . Dann gilt einerseits  $h_* \notin h$ . Da aber jede Ableitung mittels  $U_*$  auch Ableitung mittels  $G$  ist, gilt andererseits  $h_* \in h$ , was einen Widerspruch darstellt.

Daher gibt es kein anderes deterministisches Untersystem. ✱

Ein deterministisches Untersystem  $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$  erzeugt die Bildsprache

$$B_{U_i} = \{ p(w) \mid w = h_i^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

**2.5. Folgerung:** Die von einem deterministischen Untersystem eines sDTOL-Systems  $G$  erzeugte Bildsprache ist eine Teilmenge der von  $G$  erzeugten Bildsprache.

**Beweis:** Es seien  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein sDTOL-System, wobei  $h = \{ h_1, \dots, h_m \}$  ist, und  $U_i = (\mathcal{A}, h_i, \omega)$  ein deterministisches Untersystem von  $G$ . Da für jede Ableitungsstufe  $n \in \mathbb{N}_0$  die  $n$ -stellige Verknüpfung  $h_i^n$  Element von  $h^n$  ist, gilt für die Bildsprache  $B_{U_i}$ :

$$B_{U_i} = \{ p(w) \mid w = h_i^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0 \} \subseteq \{ p(w) \mid w \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0 \} = B_G.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ✱

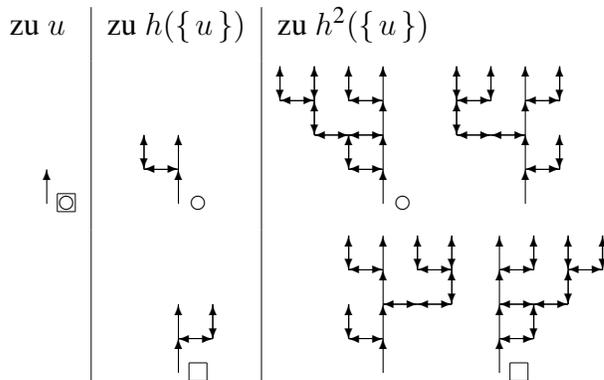
Folgendes Beispiel, angelehnt an jenes zu deterministischen Untersystemen in [T03], soll den Zusammenhang illustrieren:

**2.6. Beispiel:** Es seien  $h_1, h_2$  zwei  $(2, 1)$ -Endomorphismen mit

$$h_1(u) = uludru, h_2(u) = urudlu, h_1(x) = h_2(x) = xx \text{ für } x \neq u.$$

Desweiteren seien  $h = \{ h_1, h_2 \}$  und  $G$  das sDTOL-System  $(\mathcal{A}, h, u)$ . Die beiden sDTOL-Systeme  $U_1 = (\mathcal{A}, h_1, u)$ ,  $U_2 = (\mathcal{A}, h_2, u)$  sind die einzigen deterministischen Untersysteme von  $G$ .

Nach zweimaligem Ableiten des Startwortes  $u$  mittels  $G$  liegen folgende schlichte, gerichtete Gittergraphen vor:



Die Gittergraphen, die durch zweimaliges Ableiten mittels  $U_1$  bzw.  $U_2$  entstehen, sind durch  $\circ$  bzw.  $\square$  markiert. Andere Graphen entstehen bei zweimaligem Ableiten nicht. ♡

### 2.4.3 Einfach-nichtdeterministische Obersysteme

Um Untersuchungsergebnisse von einfach-nichtdeterministischen Systemen nutzen zu können, werden einfach-nichtdeterministische Obersysteme definiert.

Ein  $sOL$ -System  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  heißt einfach-nichtdeterministisches Obersystem (auch  $sOL$ -Obersystem genannt) eines deterministisch-tabellierten Ketten-Code-Bild-Systems  $G$  (geschrieben  $S \ni G$ ), wenn jede Ableitung eines Wortes  $w \in \mathcal{A}^*$  mittels  $G$  auch Ableitung mittels  $S$  ist. Ein  $sOL$ -Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  zu einem  $sDTOL$ -System

$$G = (\mathcal{A}, \{h_1, \dots, h_m\}, \omega)$$

heißt minimal, wenn für jede atomare Ableitung  $x' \in h_o(\{x\})$  ( $x \in \mathcal{A}$ ) mittels  $S$  ein Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert, so daß  $x'$  auch Ableitung durch  $h_i$  ist:  $h_i(x) = x'$ . Das folgende Lemma trifft Aussagen über die Existenz von  $sOL$ -Obersystemen.

**2.7. Lemma:** *Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, \dots, h_m\}, \omega)$  ein  $sDTOL$ -System. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Das System  $G$  hat genau dann ein  $sOL$ -Obersystem, wenn es zwei natürliche Zahlen  $\kappa, \mu$  gibt, so daß jeder  $(\kappa_i, \mu_i)$ -Endomorphismus  $h_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) auch ein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus ist.*
2. *Wenn  $G$  ein  $sOL$ -Obersystem hat, so hat es genau ein minimales  $sOL$ -Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$ ; dabei gilt*
  - (a)  $\forall x \in \mathcal{A} : h_o(\{x\}) = \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$ ,
  - (b)  $\forall w \in \mathcal{A}^* \forall i \in \{1, \dots, m\} : h_i(w) \in h_o(\{w\})$ .

**Beweis:** Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, \dots, h_m\}, \omega)$  ein  $sDTOL$ -System.

1. Zunächst seien mindestens zwei  $\kappa$ -Parameter verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien dies  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ . Angenommen, es gäbe ein  $sOL$ -Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  zu  $G$ . Dann müssen die Ableitungen  $h_1(x)$  und  $h_2(x)$  zu  $h_o(\{x\})$  ( $x \in \mathcal{A}$ ) gehören, da jede Ableitung mittels  $G$  auch Ableitung mittels  $S$  sein soll. Aber es gibt keine natürliche Zahl  $\kappa$ , so daß  $h_o$  die Bedingungen für einen  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus erfüllt (bei beliebigem  $\mu$ -Parameter), folglich gibt es auch kein  $sOL$ -Obersystem für  $G$ .

Es sei nun  $G$  derart, daß jedes  $h_i$  ein  $(\kappa, \mu_i)$ -Endomorphismus ist. Nach Folgerung 2.3 ist jedes  $h_i$  auch ein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus mit  $\mu \geq \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ . Damit ist auch  $h_o$  mit  $h_o(\{x\}) = \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$  ein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus und das System  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  ist ein  $sOL$ -Obersystem zu  $G$ .

2. Es sei  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  ein  $sOL$ -Obersystem zu  $G$ .
  - (a) Wegen  $S \ni G$  gilt  $\{h_1(x), \dots, h_m(x)\} \subseteq h_o(\{x\})$  für alle  $x \in \mathcal{A}$ . Das  $sOL$ -System  $S$  ist genau dann minimales  $sOL$ -Obersystem zu  $G$ , wenn

$$h_o(\{x\}) \subseteq \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$$

gilt. Daraus folgt, daß  $S$  genau dann minimal ist, wenn die Gleichheit gilt. Da  $h_o$  eindeutig bestimmt ist, hat  $G$  genau ein minimales  $sOL$ -Obersystem.

- (b) Es seien  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $w \in \mathcal{A}^l$ . Aus der Operationstreu der beteiligten Endomorphismen ergibt sich für  $i = 1, \dots, m$

$$h_i(w) = h_i(w_1) \cdots h_i(w_l) \in h_o(\{w_1\}) \cdots h_o(\{w_l\}) = h_o(\{w\}).$$

✱

Die erste Aussage des Lemmas besagt, daß ein *sDTOL*-System genau dann ein *sOL*-Obersystem hat, wenn es ein reines *sDTOL*-System ist. Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, daß ein gemischtes *sDTOL*-System kein *sOL*-Obersystem hat.

**2.8. Beispiel:** Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, h_2\}, r)$  ein *sDTOL*-System mit zwei Endomorphismen  $h_1, h_2$ , wobei folgendes gelten soll:  $h_1 : r \mapsto rud, x \mapsto x(x \neq r)$  und  $h_2 : x \mapsto x^\perp \bar{x}^\perp$ . Der Endomorphismus  $h_1$  erfüllt die Bedingungen für einen  $(1, 1)$ -Endomorphismus,  $h_2$  für einen  $(0, 1)$ -Endomorphismus. Gäbe es ein *sOL*-Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_o, r)$  zu  $G$ , müßte  $\{rud, ud\}$  eine Teilmenge von  $h_o(\{r\})$  sein. Auf Grund der ersten Synchronisationsbedingung (s. S. 6) gäbe es dann eine natürliche Zahl  $\kappa$ , die sowohl die Gleichung  $(rud)(\sigma) = \kappa(1, 0)$  als auch die Gleichung  $(ud)(\sigma) = \kappa(1, 0)$  erfüllt. Die erste Gleichung ist wegen  $(rud)(\sigma) = (1, 0)$  nur für  $\kappa = 1$ , die zweite wegen  $(ud)(\sigma) = \sigma$  nur für  $\kappa = 0$  erfüllt. Da es keine Zahl  $\kappa$  gibt, die beide Gleichungen erfüllt, ist  $h_o$  kein  $(\kappa, \mu)$ -Endomorphismus; folglich gibt es kein *sOL*-Obersystem zu  $G$ . ♡

Aus dem vorangegangenen Lemma kann man folgende Schlußfolgerung über die Beziehung zwischen Bildsprachen ziehen.

**2.9. Folgerung:** *Hat ein sDTOL-System G ein sOL-Obersystem, dann ist die von G erzeugte Bildsprache B\_G eine Teilmenge jener Bildsprache B\_S, die von dem minimalen sOL-Obersystem S zu G erzeugt wird.*

**Beweis:** Es seien  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein *sDTOL*-System mit einer Endomorphismen-Menge  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$  und  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  das minimale *sOL*-Obersystem von  $G$ . Desweiteren sei  $w$  eine  $n$ -te Ableitung des Axioms  $\omega$  mittels  $G$ :  $w \in h^n(\{\omega\})$ . Dann existieren Indices  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ , so daß

$$w = (h_{i_1} \circ h_{i_2} \circ \cdots \circ h_{i_n})(\omega)$$

gilt. Mit Lemma 2.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} w &= h_{i_n}(h_{i_{n-1}}(h_{i_{n-2}}(\cdots h_{i_1}(\omega) \cdots))) \\ &\in h_o(\{h_{i_{n-1}}(h_{i_{n-2}}(\cdots h_{i_1}(\omega) \cdots))\}) \\ &\in h_o(h_o(\{h_{i_{n-2}}(\cdots h_{i_1}(\omega) \cdots)\})) \\ &\vdots \\ &\in h_o^n(\{\omega\}), \end{aligned}$$

also kurz  $w \in h^n(\{\omega\})$ . Damit ist jede  $n$ -te Ableitung von  $\omega$  mittels  $G$  auch eine mittels  $S$  und es gilt für die erzeugten Bildsprachen

$$B_G = \{p(w) \mid w \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \{p(w) \mid w \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0\} = B_S,$$

was die Behauptung besagt. \*

Das folgende Beispiel erweitert jenes zu deterministischen Untersystemen (Beispiel 2.6):

**2.10. Beispiel:** Es seien  $h_1, h_2$  die beiden  $(2, 1)$ -Endomorphismen aus dem Beispiel zu deterministischen Untersystemen:

$$h_1(u) = uludru, h_2(u) = urudlu, h_1(x) = h_2(x) = xx \text{ für } x \neq u.$$

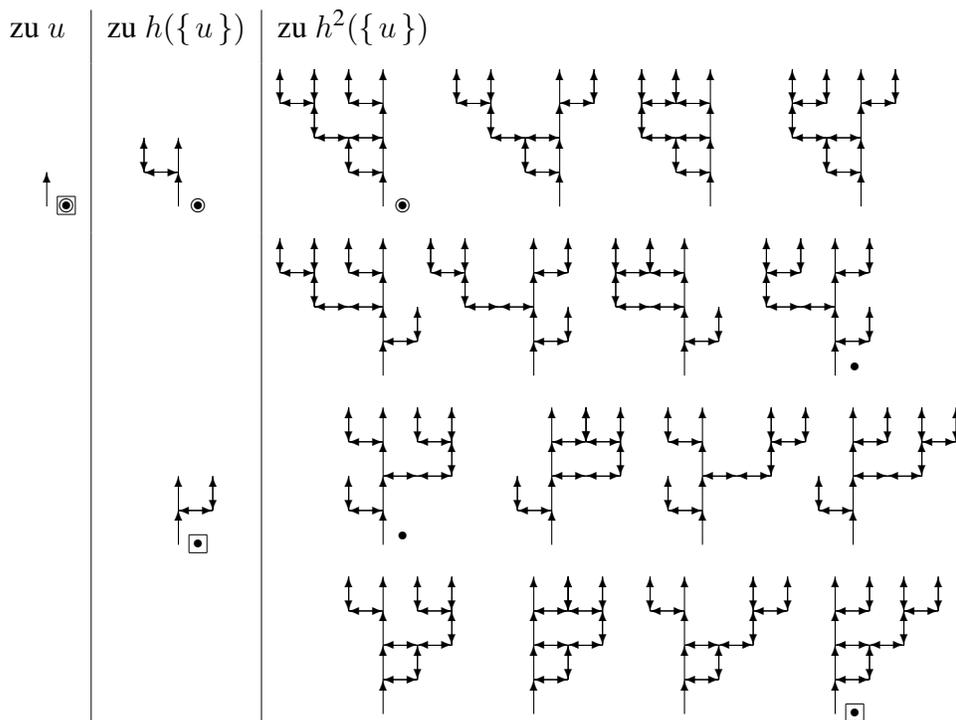
Das System  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, h_2\}, u)$  ist ein *sDTOL*-System und hat als minimales *sOL*-Ober-system  $S = (\mathcal{A}, h, \omega)$ , wobei  $h$  jener  $(2, 1)$ -Endomorphismus mit

$$h(\{x\}) = \{h_1(x), h_2(x)\}$$

ist. Folglich gilt

$$h(\{u\}) = \{uludru, urudlu\} \text{ und } h(\{x\}) = \{xx\} \text{ für } x \neq u.$$

Nach zweimaligem Ableiten des Startwortes  $u$  mittels  $S$  liegen folgende schlichte, ge-richtete Gittergraphen vor:



Jene Gittergraphen, die durch zweimaliges Ableiten mittels  $G$  entstehen, sind durch das Zeichen  $\bullet$  markiert. Die beiden *sDOL*-Systeme  $U_1 = (\mathcal{A}, h_1, u)$  und  $U_2 = (\mathcal{A}, h_2, u)$  sind auch von  $S$  die einzigen deterministischen Untersysteme (s. [T03]). Durch zweimaliges Ableiten mittels  $U_1$  bzw.  $U_2$  entstehen die durch  $\circ$  bzw.  $\square$  markierten Gittergraphen. Andere Graphen entstehen bei zweimaligem Ableiten nicht. ♡

### 3 Endlichkeitsuntersuchungen

Bei Aufgaben, in denen Ketten-Code-Bild-Systeme eine Rolle spielen, muß geklärt werden, ob ein gegebenes System eine endliche oder unendliche Bildsprache erzeugt oder welche Systeme Bildsprachen mit gewissen Eigenschaften erzeugen.

In diesem Abschnitt werden Bedingungen hergeleitet, anhand derer entschieden werden kann, ob ein *sDTOL*-System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

#### 3.1 Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein längenkontrahierendes *sDTOL*-System mit einer endlichen, nicht-leeren Menge  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$  von  $(0, \mu)$ -Endomorphismen. Zunächst stellt jedes  $h_i$  einen  $(0, \mu_i)$ -Endomorphismus dar. Es sei  $\mu$  sei das Maximum aller  $\mu_i$ :

$$\mu = \max \{ \mu_i \mid i = 1, \dots, m \}.$$

Nach Folgerung 2.3 ist jedes  $h_i$  auch ein  $(0, \mu)$ -Endomorphismus.

Das minimale *sOL*-Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_o, \omega)$  zu  $G$  ist ein längenkontrahierendes *sOL*-System, dessen Endomorphismus  $h_o$  ebenfalls ein  $(0, \mu)$ -Endomorphismus ist. Die Bildsprache  $B_S$  enthält nach Satz 3.1 aus [T03] höchstens  $(\mu + 1)^4 + 1$  Elemente. Mit Lemma 2.7 folgt, daß  $B_G$  ebenfalls höchstens  $(\mu + 1)^4 + 1$  Elemente enthält.

**3.1. Satz:** *Jedes längenkontrahierende sDTOL-System  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, \dots, h_m\}, \omega)$ , wobei jeder Endomorphismus  $h_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ein  $(0, \mu)$ -Endomorphismus ist, erzeugt eine endliche Bildsprache  $B_G$ . Sie enthält höchstens  $(\mu + 1)^4 + 1$  Elemente:*

$$|B_G| \leq (\mu + 1)^4 + 1 < \infty.$$

#### 3.2 Längenexpandierende Ketten-Code-Bild-Systeme

Es sei  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein längenexpandierendes *sDTOL*-System mit  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ , dann ist mindestens einer der Endomorphismen  $h_i$  längenexpandierend; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies etwa  $h_1$ . Daher ist das deterministische Untersystem  $U = (\mathcal{A}, h_1, \omega)$  längenexpandierend. In [T02] wurde gezeigt, daß die Bildsprache jedes längenexpandierenden *sDOL*-Systems unendlich ist. Da die von  $U$  erzeugte Bildsprache eine Teilmenge der von  $G$  erzeugten ist (Folg. 2.5), ist auch die Bildsprache des *sDTOL*-Systems  $G$  unendlich.

**3.2. Satz:** *Jedes längenexpandierende sDTOL-System erzeugt eine unendliche Bildsprache.*

#### 3.3 Längenkonstante Ketten-Code-Bild-Systeme

Längenkonstante *sDTOL*-Systeme können wie längenkonstante *sDOL*-Systeme und längenkonstante *sOL*-Systeme sowohl endliche als auch unendliche Bildsprachen erzeugen.

Bei deterministischen Systemen ist die erzeugte Bildsprache genau dann endlich, wenn die schlichten, gerichteten Gittergraphen der zweiten und dritten Ableitungen übereinstimmen. Stimmen bei deterministisch-tabellierten Systemen die schlichten, gerichteten Gittergraphen zu den zweiten und dritten Ableitungen nicht überein, so kann die Bildsprache trotzdem endlich sein.

**3.3. Beispiel:** Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, h_2, h_3\}, r)$  ein längenkonstantes *sDTOL*-System, wobei für die Endomorphismen folgendes gilt:  $h_1(r) = udr$ ,  $h_2(r) = dur$ ,  $h_3(r) = rdu$  und  $h_1(x) = h_2(x) = h_3(x) = x$  für  $x \neq r$ . Die Endomorphismen  $h_1, h_2, h_3$  erfüllen die Bedingungen für einen  $(1, 1)$ -Endomorphismus. Damit ist  $G$  längenkonstant. Die schlichten, gerichteten Gittergraphen sind  $\rightarrow$  zu  $r$  und  $\begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array}$  zu den ersten Ableitungen von

$r$ . Die neuen Graphen der zweiten Ableitungen sind  $\begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}$  und  $\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}$ . Die dritten Ableitungen liefern als neuen Graphen  $\begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array}$ . Unter den schlichten, gerichteten Gittergraphen der

3. Ableitungen tritt  $\begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}$  auf, unter denen der 2. Ableitungen jedoch nicht. Trotzdem ist die Bildsprache  $B_G$  endlich:

$$B_G = \left\{ \rightarrow, \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\}.$$

♡

Bei einfach nichtdeterministischen Systemen kann man die Endlichkeit mittels der deterministischen Untersysteme bestimmen. Erzeugt jedes deterministische Untersystem eine endliche Bildsprache, ist auch die Bildsprache des *sOL*-Systems endlich. Bei *sDTOL*-Systemen ist dies hingegen nicht der Fall. Erzeugen alle deterministischen Untersysteme eines *sDTOL*-Systems eine endliche Bildsprache, so kann die Bildsprache des *sDTOL*-Systems trotzdem unendlich sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

**3.4. Beispiel:** Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{h_1, h_2\}, ru)$  ein *sDTOL*-System mit den  $(1, 1)$ -Endomorphismen  $h_1, h_2$ , für die

$$\begin{aligned} h_1: & r \mapsto rud, \quad x \mapsto x \quad (x \neq r) \quad \text{und} \\ h_2: & u \mapsto url, \quad x \mapsto x \quad (x \neq u) \end{aligned}$$

gilt. Das deterministische Untersystem  $U_1 = (\mathcal{A}, h_1, ru)$  erzeugt die Bildsprache

$$B_1 = \{ \_ \_ \},$$

das deterministische Untersystem  $U_2 = (\mathcal{A}, h_2, ru)$  erzeugt die Bildsprache

$$B_2 = \{ \_ \_, \_ \_ \}.$$

Beide Bildsprachen sind endlich. Die Bildsprache von  $G$  ist jedoch unendlich:

$$B_G = \left\{ \_ \_ \_ , \_ \_ \_ , \_ \_ \_ , \_ \_ \_ , \dots \right\}.$$

♡

Wie die letzten beiden Beispiele zeigen, sind die in [T02] bzw. [T03] hergeleiteten Entscheidungskriterien auf *sDTOL*-Systeme nicht anwendbar. Folglich müssen andere gefunden werden. Dazu werden reine und gemischte Systeme getrennt untersucht.

### 3.3.1 Reine, längenkonstante Systeme

Es sei  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein *sDTOL*-System; dabei stelle  $h = \{h_1, \dots, h_m\}$  eine Menge von  $(1, \mu_i)$ -Endomorphismen  $h_i$  dar. Desweiteren sei  $\mu = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ . Dann ist jeder Endomorphismus  $h_i$  auch ein  $(1, \mu)$ -Endomorphismus. Nach Lemma 2.7 hat  $G$  genau ein minimales *sOL*-Obersystem  $S = (\mathcal{A}, h_S, \omega)$ , wobei  $h_S(\{x\}) = \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$  für alle Buchstaben  $x \in \mathcal{A}$  gilt.

Nach Folgerung 2.9 ist die von  $G$  erzeugte Bildsprache  $B_G$  eine Teilmenge der von  $S$  erzeugten Bildsprache  $B_S$ .

**3.5. Folgerung:** *Die Bildsprache  $B_G$  eines reinen, längenkonstanten *sDTOL*-Systems  $G$  ist endlich, wenn die von seinem minimalen *sOL*-Obersystem  $S$  erzeugte Bildsprache  $B_S$  endlich ist.*

Möge nun  $S$  eine unendliche Bildsprache  $B_S$  erzeugen. Dann besitzt  $S$  ein deterministisches Untersystem  $U = (\mathcal{A}, h_U, \omega)$ , welches ebenfalls eine unendliche Bildsprache erzeugt (Satz 3.3 aus [T03]). Für alle  $x \in \mathcal{A}$  gilt  $h_U(x) \in h_S(\{x\})$  (folgt aus der Definition von deterministischen Untersystemen zu *sOL*-Systemen in [T03]). Demzufolge gibt es zu jedem  $x \in \mathcal{A}$  einen Index  $i_x \in \{1, \dots, m\}$ , so daß  $h_U(x) = h_{i_x}(x)$  gilt. Da die von  $U$  erzeugte Bildsprache  $B_U$  unendlich ist, gibt es nach [T02] (Satz 3.12 und Folgerung 3.9) einen Buchstaben  $x \in [h_U^2(\omega)]$ , so daß eine der Kantenmengen  $\|h_U(x), \|h_U^2(x), \|h_U^3(x)$  eine von  $(\circ, x)$  verschiedene  $x$ -Kante enthält:

$$\exists x \in [h_U^2(\omega)] \exists l \in \{1, 2, 3\} : \|_x x \neq \|_x h_U^l(x).$$

Es seien nun  $x \in \mathcal{A}$  und  $l \in \{1, 2, 3\}$  die kleinste Ableitungsstufe derart, daß für sie  $\|_x x \neq \|_x h_U^l(x)$  gilt. Nach  $l$  lassen sich drei Fälle unterscheiden:

1.  $l = 1$ : Dann gilt  $\|_x x \neq \|_x h_U(x)$  und  $\|_x x \neq \|_x h_{i_x}(x)$ . Damit ist  $D = (\mathcal{A}, h_{i_x}, \omega)$  ein *sDOL*-System und erzeugt nach Folgerung 3.10 aus [T02] eine unendliche Bildsprache  $B_D$ . Da  $D$  ein deterministisches Untersystem von  $G$  ist, ist nach Folgerung 2.5 auch die Bildsprache von  $G$  unendlich:  $|B_G| = \infty$ .
2.  $l = 2$ : Dann gilt  $\|_x x = \|_x h_U(x)$  und  $\|_x x \neq \|_x h_U^2(x)$ . Folglich entsteht die neue  $x$ -Kante durch Ableiten eines anderen Buchstaben  $y \neq x$ . Wegen  $h_{i_x}(x) = h_U(x)$  und

$h_{i_y}(y) = h_U(y)$ , ist besagte neue  $x$ -Kante Element von  $\|_x h_{i_y}(h_{i_x}(x))$ . Damit tritt bei wiederholtem Anwenden von  $h_{i_x} \circ h_{i_y}$  wieder eine neue  $x$ -Kante auf. Daraus folgt, daß das *sDTOL*-System  $G' = (\mathcal{A}, \{h_{i_x}, h_{i_y}\}, \omega)$  eine unendliche Bildsprache  $B_{G'}$  erzeugt. Da die Menge  $\{h_{i_x}, h_{i_y}\}$  eine Teilmenge von  $h$  ist, ist  $B_{G'}$  eine Teilmenge von  $B_G$ . Folglich ist auch diesem Falle  $|B_G| = \infty$ .

3.  $l = 3$ : Dann gilt  $\|_x x = \|_x h_U(x) = \|_x h_U^2(x)$  und  $\|_x x \neq \|_x h_U^3(x)$ . Folglich entsteht die neue  $x$ -Kante durch Ableiten eines Buchstaben  $z \neq x$ , welcher wiederum durch einen anderen Buchstaben  $y$  ( $y \neq x$  und  $y \neq z$ ) entsteht, der in der Ableitung von  $x$  auftritt. Wegen  $h_{i_x}(x) = h_U(x)$ ,  $h_{i_y}(y) = h_U(y)$  und  $h_{i_z}(z) = h_U(z)$ , ist die neue  $x$ -Kante Element von  $\|_x h_{i_z}(h_{i_y}(h_{i_x}(x)))$ . Damit tritt bei wiederholtem Anwenden von  $h_{i_x} \circ h_{i_y} \circ h_{i_z}$  wieder eine neue  $x$ -Kante auf. Daraus folgt, daß das *sDTOL*-System  $G'' = (\mathcal{A}, \{h_{i_x}, h_{i_y}, h_{i_z}\}, \omega)$  eine unendliche Bildsprache  $B_{G''}$  erzeugt. Da die Menge  $\{h_{i_x}, h_{i_y}, h_{i_z}\}$  eine Teilmenge von  $h$  ist, ist auch  $B_{G''}$  eine Teilmenge von  $B_G$ . Folglich ist auch diesem Falle  $|B_G| = \infty$ .

Andere Fälle gibt es nicht, so daß dieses Ergebnis wie folgt zusammengefaßt werden kann.

**3.6. Folgerung:** *Die Bildsprache  $B_G$  eines reinen, längenkonstanten sDTOL-Systems  $G$  ist unendlich, wenn die von seinem minimalen sOL-Obersystem  $S$  erzeugte Bildsprache  $B_S$  unendlich ist.*

Zusammen führen die Folgerungen 3.5 und 3.6 zu folgendem Satz.

**3.7. Satz:** *Es sei  $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$  ein reines, längenkonstantes sDTOL-System. Die erzeugte Bildsprache ist genau dann endlich, wenn das minimale sOL-Obersystem zu  $G$  eine endliche Bildsprache erzeugt.*

### 3.3.2 Gemischte, längenkonstante Systeme

Im folgenden werden gemischte, längenkonstante *sDTOL*-Systeme betrachtet, also solche, bei denen mindestens ein  $(0, \mu)$ -Endomorphismus und mindestens ein  $(1, \mu)$ -Endomorphismus auftritt. Dazu sei  $G = (\mathcal{A}, f, \omega)$  ein *sDTOL*-System mit einer Menge  $f = g \cup h$  von längenkontrahierenden und -konstanten Endomorphismen. Die längenkontrahierenden Endomorphismen seien in der Menge  $g = \{g_1, \dots, g_{m_0}\}$ , die längenkonstanten Endomorphismen in der Menge  $h = \{h_1, \dots, h_{m_1}\}$  zusammengefaßt. Ein *sDTOL*-System  $T = (\mathcal{A}, \underline{f}, \omega)$  mit  $\underline{f} \subseteq g$  oder  $\underline{f} \subseteq h$  ist ein reines *sDTOL*-System. Da jede Ableitung mittels  $T$  auch eine mittels  $G$  ist, erzeugt  $T$  eine Teilmenge der Bildsprache von  $G$

$$B_T = \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in \underline{f}^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \{p(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in f^n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\} = B_G.$$

Daher soll  $T$  reines Teilsystem von  $G$  heißen. Gilt  $\underline{f} = g$  oder  $\underline{f} = h$ , soll  $T$  maximal heißen. Damit sind  $(\mathcal{A}, g, \omega)$  ein maximales, reines, längenkontrahierendes Teilsystem und  $(\mathcal{A}, h, \omega)$  ein maximales, reines, längenkonstantes Teilsystem von  $G$ . Es sei angemerkt, daß sie eindeutig bestimmt sind. Im folgenden soll das maximale, reine, längenkonstante Teilsystem eines *sDTOL*-Systems  $G$  kurz das Eins-System von  $G$  genannt werden.

**3.8. Folgerung:** Es seien  $G$  ein  $sDTOL$ -System und  $T$  sein Eins-System. Die von  $T$  erzeugte Bildsprache ist eine Teilmenge der von  $G$  erzeugten Bildsprache.

Aus dieser Teilmengenbeziehung ergibt sich die nächste Folgerung.

**3.9. Folgerung:** Es seien  $G$  ein  $sDTOL$ -System und  $T$  sein Eins-System. Wenn  $T$  eine unendliche Bildsprache erzeugt, so ist auch die von  $G$  unendlich.

Ist jedoch die von  $T$  erzeugte Bildsprache endlich, so kann man nicht auf die Endlichkeit von  $G$  schließen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

**3.10. Beispiel:** Es sei  $G = (\mathcal{A}, \{g, h\}, r)$  ein  $sDTOL$ -System mit einem  $(0, 1)$ -Endomorphismus  $g$  und einem  $(1, 1)$ -Endomorphismus  $h$ , für die folgendes gilt:

$$\begin{aligned} g: & r \mapsto ud, \quad u \mapsto rl, \quad l \mapsto \lambda, \quad d \mapsto \lambda, \\ h: & r \mapsto dur, \quad u \mapsto u, \quad l \mapsto l, \quad d \mapsto d. \end{aligned}$$

Das Eins-System zu  $G$  ist  $T = (\mathcal{A}, h, r)$ . Es erzeugt die Wörter

$$r, dur, dudur, \dots, (du)^i r, \dots$$

Ihnen entsprechen die schlichten gerichteten Gittergraphen  $\rightarrow$  für  $r$  und  $\downarrow$  für alle Ableitungen von  $r$ . Die erzeugte Bildsprache ist somit endlich:

$$B_T = \left\{ \text{---}, \text{└─} \right\}.$$

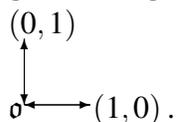
Mittels  $G$  werden neben  $\rightarrow$  und  $\downarrow$  auch die schlichten gerichteten Gittergraphen  $\uparrow$  (zu  $g(r)$ ),  $\leftrightarrow$  (zu  $g^2(r)$ ),  $\updownarrow$  (zu  $g(h(r))$ ) und  $\updownarrow\leftrightarrow$  (zu  $h(g(h(r)))$ ) erzeugt. Aus diesen Gittergraphen entstehen durch Ableiten keine neuen. Daher ist auch die Bildsprache von  $G$  endlich:

$$B_G = \left\{ \text{---}, \text{└─}, \text{┌─}, \text{└─┘}, \text{┌─┐}, \text{└─┘} \right\}.$$

Ändert man  $h$  derart ab, daß  $h(l) = uld$  gilt, so hat dies bezüglich  $T$  auf die Wortmenge und damit auch auf die Bildsprache keine Auswirkungen. Mittels  $G$  jedoch gehört zur erzeugten Wortmenge auch das Wort

$$g(h(r)) = g(dur) = rlud.$$

Zu diesem Wort gehört der gerichtete Gittergraph



Durch Ableiten entsteht das Wort  $h(rlud) = duruldud$ . Der zugehörige schlichte gerichtete Gittergraph ist



und allgemein für  $w \in \mathcal{A}^*$

$$[f^n(\{w\})] \subseteq [f^{n+1}(\{w\})].$$

Daraus kann man mittels vollständiger Induktion über die Ableitungsstufe zeigen, daß sich die Buchstabenmenge nicht mehr ändert, wenn sie in einem Ableitungsschritt unverändert bleibt: Wenn  $[f^n(\{w\})] = [f^{n+1}(\{w\})]$ , so gilt auch  $[f^n(\{w\})] = [f^{n+k}(\{w\})]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Es sei  $x \in [\omega]$  ein Buchstabe im Axiom  $\omega$ . Die folgenden Fallunterschiede sind durch die Synchronisationsbedingungen begründet.

1.  $\bigcup_{i=1}^{m_0} [g_i(x)] = \emptyset$ . Alle längenkontrahierenden Endomorphismen bilden  $x$  auf das Leerwort ab:

$$g_i(x) = \lambda \quad (i = 1, \dots, m_0).$$

Damit gilt

$$[f(\{x\})] = \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)].$$

Für die Buchstabenmengen beim Ableiten mittels der längenkonstanten Endomorphismen gibt es vier Möglichkeiten.

(a)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x\}$ .

Für alle längenkonstanten Endomorphismen  $h_i$  gilt  $h_i(x) = x$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ).

In diesem Falle gilt  $f^n(\{x\}) = \{\lambda, x\}$  für alle  $n \geq 1$ . Daher besteht die erzeugte Buchstabenmenge in jedem Ableitungsschritt aus dem Buchstaben  $x$ :  $[f^n(\{x\})] = \{x\}$ . Also gilt insbesondere

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})]$$

für  $n \geq 2$ .

(b)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x, \bar{x}\}$ .

In diesem Falle gilt

$$[f^2(\{x\})] = \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] \cup \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(\bar{x})] = \{x, \bar{x}\} \cup \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(\bar{x})].$$

Es werden zwei Fälle unterschieden:

- i. Durch den Buchstaben  $\bar{x}$  entstehen keine neuen Buchstaben, also gilt

$$\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(\bar{x})] \subseteq \{x, \bar{x}\}.$$

Damit gilt  $[f^2(\{x\})] = [f(\{x\})]$  und für alle Ableitungsstufen  $n \geq 2$  folgt

$$[f(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \{x, \bar{x}\}.$$

- ii. Der Buchstabe  $\bar{x}$  liefert einen neuen Buchstaben. Dann entstehen  $x^\perp$  und  $\bar{x}^\perp$  gleichzeitig, also gilt  $\{x^\perp, \bar{x}^\perp\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(\bar{x})]$ . Daraus folgt für alle Ableitungsstufen  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

Damit gilt auch in diesem Falle für  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

- (c)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ .  
In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} [f^2(\{x\})] &= \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] \cup \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x^\perp)] \cup \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(\bar{x}^\perp)] \\ &= \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\} \cup \bigcup_{i=1}^{m_1} ([h_i(x^\perp)] \cup [h_i(\bar{x}^\perp)]). \end{aligned}$$

Es werden wieder zwei Fälle unterschieden:

- i. Aus  $x^\perp$  und  $\bar{x}^\perp$  entsteht kein neuer Buchstabe. Dann gilt

$$[f^2(\{x\})] = [f(\{x\})]$$

und für alle Ableitungsstufen  $n \geq 2$  folgt

$$[f(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}.$$

- ii. Aus  $x^\perp$  und  $\bar{x}^\perp$  entsteht ein neuer Buchstabe. Dies kann nur  $\bar{x}$  sein. Folglich gilt für alle Ableitungsstufen  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

Auch hier gilt für  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

- (d)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \mathcal{A}$ .

Dann gilt auch für alle weiteren Ableitungen

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

2.  $\bigcup_{i=1}^{m_0} [g_i(x)] = \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ . Damit gilt

$$[f(\{x\})] = \bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] \cup \{x^\perp, \bar{x}^\perp\}.$$

Für die Buchstabenmengen beim Ableiten mittels der längenkonstanten Endomorphismen gibt es vier Möglichkeiten.

- (a)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x\}$ . Dann ist  $[f(\{x\})] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ .  
Folglich gilt

$$\begin{aligned} [f^2(\{x\})] &= [f(\{x\})] \cup [f(\{x^\perp\})] \cup [f(\{\bar{x}^\perp\})] \\ &= \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\} \cup [f(\{x^\perp\})] \cup [f(\{\bar{x}^\perp\})]. \end{aligned}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

- i. Es entsteht kein  $\bar{x}$ :  $\bar{x} \notin [f^2(\{x\})]$ . Dann gilt  $[f(\{x\})] = [f^2(\{x\})]$  und damit auch

$$[f(\{x\})] = [f^n(\{x\})]$$

für alle weiteren Ableitungsstufen.

- ii. Es entsteht ein  $\bar{x}$ . Dann ist  $[f^2(\{x\})] = \mathcal{A}$ , und es gilt für alle weiteren Ableitungen

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

Somit gilt in diesem Falle ebenfalls für alle  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

- (b)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x, \bar{x}\}$ . Damit ist  $[f(\{x\})] = \mathcal{A}$ , und es gilt für  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

- (c)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$ . Damit ist  $[f(\{x\})] = \{x, x^\perp, \bar{x}^\perp\}$  und es gibt zwei Fälle:

- i. Es entsteht kein  $\bar{x}$ :  $\bar{x} \notin [f^2(\{x\})]$ . Dann gilt  $[f^2(\{x\})] = [f(\{x\})]$  und für alle weiteren Ableitungen

$$[f^n(\{x\})] = [f(\{x\})].$$

- ii. Es entsteht ein  $\bar{x}$ :  $\bar{x} \in [f^2(\{x\})]$ . Dann gilt  $[f^2(\{x\})] = \mathcal{A}$  und für alle weiteren Ableitungen

$$[f^n(\{x\})] = \mathcal{A}.$$

In beiden Fällen erhält man für alle  $n \geq 2$

$$[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})].$$

(d)  $\bigcup_{i=1}^{m_1} [h_i(x)] = \mathcal{A}$ . In diesem Falle gilt  $[f(\{x\})] = \mathcal{A}$  und somit ist auch

$$[f^n(\{x\})] = \mathcal{A}$$

für alle  $n \geq 2$ .

In jedem Falle gilt  $[f^2(\{x\})] = [f^n(\{x\})]$  für alle Ableitungsstufen  $n \geq 2$ . Für ein beliebiges Wort  $w = w_1 \cdots w_l$  gilt dann

$$\begin{aligned} [f^n(\{w\})] &= [f^n(\{w_1\}) \cdots f^n(\{w_l\})] \\ &= [f^n(\{w_1\})] \cup \cdots \cup [f^n(\{w_l\})] \\ &= [f^2(\{w_1\})] \cup \cdots \cup [f^2(\{w_l\})] \\ &= [f^2(\{w_1\}) \cdots f^2(\{w_l\})] \\ &= [f^2(\{w\})]. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß jeder überhaupt auftretende Buchstabe bereits in einer zweiten Ableitung vorkommt. Dies besagt gerade die Behauptung. ✱

Wenn  $T = (\mathcal{A}, h, \omega)$  das Eins-System zu  $G$  ist, so soll das reine *sDTOL*-System  $T_x$  mit  $T_x = (\mathcal{A}, h, x)$  für einen beliebigen Buchstaben  $x \in \mathcal{A}$  das  $x$ -Eins-System von  $G$  heißen. Im folgenden wird gezeigt, daß das *sDTOL*-System  $G$  genau dann eine unendliche Bildmenge erzeugt, wenn in einer zweiten Ableitung des Axioms ein Buchstabe  $x$  auftritt, so daß das  $x$ -Eins-System zu  $G$  eine unendliche Bildmenge erzeugt.

Es sei  $\omega'' = \widehat{x}x\widetilde{x} \in f^2(\{\omega\})$  eine zweite Ableitung des Axioms. Das  $x$ -Eins-System von  $G$  erzeugt die Bildmenge

$$B_x = \{p(w) \mid w \in h^n(\{x\}), n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{ p(h^{(n)}(x)) \mid n \in \mathbb{N}_0, h^{(n)} \in h^n \right\}.$$

Die Menge  $B_{\omega''}$  bestehe aus den Bildern zu jenen Wörtern, die aus  $\omega''$  mittels der längenkonstanten Endomorphismen ableitbar sind:

$$B_{\omega''} = \{p(w) \mid w \in h^n(\{\omega''\}), n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{ p(h^{(n)}(\omega'')) \mid n \in \mathbb{N}_0, h^{(n)} \in h^n \right\}.$$

Da  $\omega'' \in f^2(\{\omega\})$  eine zweite Ableitung des Axioms ist und für alle Ableitungsstufen  $n$  die Endomorphismen aus  $h^n$  auch in  $f^n$  sind ( $h^n \subseteq f^n$ ), ist jede  $n$ -te Ableitung  $w \in h^n(\{\omega''\})$  von  $\omega''$  mittels längenkonstanter Endomorphismen auch eine  $(n+2)$ -te Ableitung von  $\omega$  mittels  $G$ :

$$w \in f^{n+2}(\{\omega\}).$$

Somit ist  $B_{\omega''}$  eine Teilmenge von  $B_G$ :

$$B_{\omega''} \subseteq B_G.$$

Für das Bild zu einer beliebigen Ableitung von  $\omega''$  mittels der Endomorphismen aus  $h$  erhält man durch Folgerung 2.4 in [T02]

$$p(h^{(n)}(\omega'')) = p(h^{(n)}(\widehat{x})) \cup p^{(h^{(n)}(\widehat{x}))(\circ)}(h^{(n)}(x)) \cup p^{(h^{(n)}(\widehat{x}x))(\circ)}(h^{(n)}(\widehat{x})).$$

Jedes Bild  $p(h^{(n)}(x))$  ist demnach ein Teilbild von  $p(h^{(n)}(\omega''))$  (ein Teilbild ist ein möglicherweise um einen Punkt verschobener Untergraph). Wenn die Bildmenge  $B_x$  unendlich ist, ist auch  $B_{\omega''}$  unendlich, da jedes Bild nur endlich viele Teilbilder besitzt. Folglich ist auch die Bildmenge  $B_G$  unendlich. Dieses Ergebnis ist in folgendem Lemma festgehalten.

**3.12. Lemma:** *Es seien  $G = (\mathcal{A}, f, \omega)$  ein sDTOL-System und  $T_x$  sein  $x$ -Eins-System für einen Buchstaben  $x \in [f^2(\{\omega\})]$ , der in einer zweiten Ableitung mittels  $G$  auftritt. Wenn  $T_x$  eine unendliche Bildsprache erzeugt, so ist auch die Bildsprache  $B_G$  von  $G$  unendlich.*

Nachfolgend wird die Umkehrung betrachtet. Dazu erzeuge für jeden in einer zweiten Ableitung auftretenden Buchstaben  $x \in [f^2(\{\omega\})]$  das  $x$ -Eins-System  $T_x$  von  $G$  eine endliche Bildmenge.

Zu einem Mengensystem  $K$  von Kantenmengen sei  $K^a$  jenes Mengensystem von Kantenmengen, das durch Verschieben der Kantenmengen aus dem Mengensystem  $K$  um den Punkt  $a$  entsteht:  $K^a = \{ \|^a w \mid w \in K \}$ . Ein Mengensystem von Kantenmengen wird im folgenden Kantensystem genannt. Auf nichtleeren Kantensystemen sei die direkte Vereinigung (in Zeichen  $\cup$ ) erklärt:

$$\mathcal{K} \cup \mathcal{L} = \{ V \cup W \mid V \in \mathcal{K} \text{ und } W \in \mathcal{L} \}.$$

Aus dieser Konstruktion folgt, daß die direkte Vereinigung zweier endlicher Kantensysteme ebenfalls endlich ist.

Für alle Wörter  $w \in \mathcal{A}^l$ , die keinen anderen Buchstaben enthalten als die zweiten Ableitungen von  $\omega$ , seien  $T_w$  das reine sDTOL-System  $T_w = (\mathcal{A}, h, w)$  und  $K_w$  sein Kantensystem. Insbesondere ist  $K_x$  das Kantensystem des  $x$ -Eins-Systems  $T_x$ . Es sei  $w \in \mathcal{A}^l$  ein Wort, das keinen anderen Buchstaben enthält als die zweiten Ableitungen von  $\omega$ . Dann tritt jeder Buchstabe  $w_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) in einer zweiten Ableitung von  $\omega$  auf:

$$w_i \in [f^2(\{\omega\})].$$

Für das Kantensystem  $K_w$  gilt

$$\begin{aligned} K_w &= \left\{ \| (h^{(n)}(w)) \mid n \in \mathbb{N}_0, h^{(n)} \in h^n \right\} \\ &= \left\{ \| (h^{(n)}(w_1) \cdots h^{(n)}(w_l)) \right\} \\ &= \left\{ \| (h^{(n)}(w_1)) \cup \|^{(h^{(n)}(w_1))(\circ)}(h^{(n)}(w_2)) \cup \cdots \cup \|^{(h^{(n)}(\overrightarrow{w_{l-1}}))(\circ)}(h^{(n)}(w_l)) \right\} \\ &= \left\{ \| (h^{(n)}(w_1)) \cup \|^{w_1(\circ)}(h^{(n)}(w_2)) \cup \cdots \cup \|^{w_{l-1}(\circ)}(h^{(n)}(w_l)) \right\} \\ &\subseteq K_{w_1} \cup K_{w_2}^{w_1(\circ)} \cup \cdots \cup K_{w_l}^{\overrightarrow{w_{l-1}(\circ)}}. \end{aligned}$$

Ein Bild ist höchstens endlich vielen Kantenmengen zugeordnet: Wenn in einem Bild  $\mathfrak{B}$  zwischen zwei Knoten  $\mathfrak{p}$  und  $x(\mathfrak{p})$  eine Kante existiert, so liegt auch in jedem schlichten, gerichteten Gittergraphen, denen das Bild  $\mathfrak{B}$  zugeordnet ist, eine Kante zwischen  $\mathfrak{p}$  und  $x(\mathfrak{p})$ . Da es keine Mehrfachkanten gibt, tritt einer von drei Fällen ein:

- Die  $x$ -Kante  $(\mathfrak{p}, x)$  gehört zur Kantenmenge, aber nicht die  $\bar{x}$ -Kante  $(x(\mathfrak{p}), \bar{x})$ .
- Die  $\bar{x}$ -Kante  $(x(\mathfrak{p}), \bar{x})$  gehört zur Kantenmenge, aber nicht die  $x$ -Kante  $(\mathfrak{p}, x)$ .
- Zur Kantenmenge gehört sowohl die  $x$ -Kante  $(\mathfrak{p}, x)$  als auch die  $\bar{x}$ -Kante  $(x(\mathfrak{p}), \bar{x})$ .

Somit gibt es für jede Bildkante höchstens drei Entstehungsmöglichkeiten; ein Bild mit  $k$  Kanten ist demzufolge höchstens  $3^k$  schlichten, gerichteten Gittergraphen zugeordnet.

Da die  $x$ -Eins-Systeme endliche Bildmengen erzeugen, sind auch die Kantensysteme  $K_{w_i}^{\overrightarrow{w_i-1}(o)}$  endlich. Daher ist auch das Kantensystem  $K_w$  endlich.

Es seien  $K_h, K_\gamma, K_g$  drei Kantensysteme. Dabei bestehe  $K_h$  aus den Kantenmengen jener Ableitungen von  $\omega$ , bei denen alle angewendeten Endomorphismen längenkonstant sind

$$K_h = \{ \|w \mid w \in h^n(\{\omega\}), n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Das Kantensystem  $K_\gamma$  bestehe aus den Kantenmengen zu jenen Ableitungen von  $\omega$ , bei denen der zuletzt angewendete Endomorphismus ein längenkontrahierender ist

$$K_\gamma = \{ \|w \mid w \in (f^m \circ g)(\{\omega\}), m \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Ferner bestehe  $K_g$  aus den Kantenmengen zu jenen Ableitungen von  $\omega$ , bei denen mindestens einmal ein längenkontrahierender Endomorphismus angewendet wird

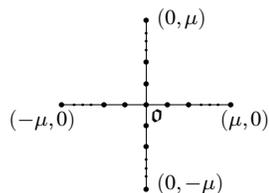
$$K_g = \{ \|w \mid w \in (f^m \circ g \circ h^n)(\{\omega\}), m, n \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Das Kantensystem  $K_h$  stimmt mit dem Kantensystem  $K_w$  überein. Da jeder Buchstabe von  $\omega$  auch in einer zweiten Ableitung auftritt, ist den obigen Überlegungen zufolge  $K_w$  endlich und damit auch  $K_h$ .

Zu jeder Kantenmenge  $K$  aus  $K_\gamma$  gibt es zwei Wörter  $v, w$ , wobei  $v$  eine  $m$ -te Ableitung des Axioms ist:  $v \in f^m(\{\omega\})$ , das Wort  $w$  die Ableitung von  $v$  mittels eines längenkontrahierenden Endomorphismus  $g_i \in g$  ist:  $w = g_i(v)$  und die Kantenmenge von  $w$  gerade  $K$  ist ( $\|w = K$ ). Aus der Definition von  $(0, \mu)$ -Endomorphismen folgt für alle  $v \in \mathcal{A}^*$  und Endomorphismen  $g_i \in g$ :

$$\|g_i(v) = \bigcup_{y \in [v]} \|g_i(y).$$

In jeder Kantenmenge liegen daher alle Kanten auf folgendem Kreuz



Somit ist das Kantensystem  $K_\gamma$  endlich.

Wenn eine Kantenmenge  $K$  zu  $K_g$  gehört, dann existieren zwei Wörter  $v, w$ , so daß die Kantenmenge von  $v$  gerade  $K$  ist,  $v$  durch  $n$ -maliges Ableiten von  $w$  mittels  $h$  entsteht und  $w$  durch  $(m+1)$ -maliges Ableiten des Axioms entsteht, wobei der zuletzt angewendete Endomorphismus ein längenkontrahierender ist; außerdem liegt dann die Kantenmenge  $\|w$  von  $w$  in  $K_\gamma$ :

$$\begin{aligned} K \in K_g &\implies \exists v : \|v = K \\ &\text{und } v \in (f^m \circ g \circ h^n)(\{\omega\}) \\ &\text{und } v \in h^n((f^m \circ g)(\{\omega\})) \\ &\text{und } \exists w : v \in h^n(\{w\}) \wedge w \in (f^m \circ g)(\{\omega\}) \wedge \|w \in K_\gamma. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt  $K$  eine Kantenmenge aus  $K_\gamma$ , dann gibt es ein Wort  $w$ , so daß  $K$  die Kantenmenge von  $w$  ist. Folglich gilt  $w \in (f^m \circ g)(\{\omega\})$  und für jede Ableitung  $v$  von  $w$  mittels  $h$  gilt  $v \in h^n(\{w\}) \subseteq (f^m \circ g \circ h^n)(\{\omega\})$ , also gehört die Kantenmenge von  $v$  zu  $K_g$ :

$$\begin{aligned} K \in K_\gamma &\implies \exists w : \|w = K \\ &\text{und } w \in (f^m \circ g)(\{\omega\}) \\ &\text{und } \forall v : v \in h^n(\{w\}) \implies \|v \in K_g. \end{aligned}$$

Daher kann man für das Kantensystem  $K_g$  auch schreiben

$$K_g = \{ \|v \mid v \in h^n(\{w\}), w \in (f^m \circ g)(\{\omega\}), n, m \in \mathbb{N}_0 \}.$$

Stimmen die Kantenmengen zweier Wörter überein, so stimmen auch die Kantenmengen ihrer Ableitungen mittels  $h$  überein. Um dies zu zeigen, sei  $w \in \mathcal{A}^l$  ein Wort der Länge  $l$ . Dann gilt für seine Kantenmenge

$$\begin{aligned} \|w &= \|w_1 \cup \|\overrightarrow{w_1}(\mathfrak{o})w_2 \cup \dots \cup \|\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathfrak{o})w_l \\ &= \{ (\mathfrak{o}, w_1), (\overrightarrow{w_1}(\mathfrak{o}), w_2), \dots, (\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathfrak{o}), w_l) \}. \end{aligned}$$

Die Kantenmenge einer  $n$ -ten Ableitung  $h^{(n)}(w)$  mit  $h^{(n)} \in h^n$  ist

$$\begin{aligned} \|h^{(n)}(w) &= \|h^{(n)}(w_1) \cup \|(h^{(n)}(\overrightarrow{w_1}(\mathfrak{o})))h^{(n)}(w_2) \cup \dots \cup \|(h^{(n)}(\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathfrak{o})))h^{(n)}(w_l) \\ &= \|h^{(n)}(w_1) \cup \|\overrightarrow{w_1}(\mathfrak{o})h^{(n)}(w_2) \cup \dots \cup \|\overrightarrow{w_{l-1}}(\mathfrak{o})h^{(n)}(w_l), \end{aligned}$$

wobei  $(h^{(n)}(\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{o}))) (\mathfrak{o}) = \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{o})$  aus der Definition von  $(1, \mu)$ -Endomorphismen folgt. Man erkennt, daß die Kantenmenge einer Ableitung entsteht, indem die Ausgangskanten durch die Kantenmengen der entsprechenden Ableitungen ersetzt werden:

$$\|h^{(n)}(w) = \bigcup_{(q,x) \in \|w} \|q h^{(n)}(x).$$

Stimmen für zwei Wörter  $u, v$  die Kantenmengen überein, so folgt für  $h^{(n)} \in h^n$

$$\|h^{(n)}(u) = \bigcup_{(q,x) \in \|u} \|q h^{(n)}(x) = \bigcup_{(q,x) \in \|v} \|q h^{(n)}(x) = \|h^{(n)}(v).$$

Damit gilt für  $K_g$ :

$$K_g = \left\{ \|h^{(n)}(w) \mid n \in \mathbb{N}_0, h^{(n)} \in h^n, \|w \in K_\gamma \right\}.$$

Stimmen die Kantenmengen zweier Wörter  $u, v$  überein, so stimmen auch die Kantensysteme  $K_u, K_v$  (s. oben) überein. Also ist  $K_g$  die Vereinigung der Mengen  $K_w$  über alle Wörter  $w$ , deren Kantenmenge in  $K_\gamma$  liegt:

$$K_g = \bigcup_{\|w \in K_\gamma} K_w.$$

Da  $K_\gamma$  endlich ist und jede Menge  $K_w$  ebenfalls endlich ist, ist auch  $K_g$  endlich.

Das Kantensystem  $K_G$  von  $G$  besteht aus den Kantenmengen zu Ableitungen von  $\omega$ , bei denen alle angewendeten Endmorphismen längenkonstant sind oder mindestens einmal ein längenkontrahierender Endomorphismus angewendet wird. Also setzt sich  $K_G$  aus den Mengen  $K_h$  und  $K_g$  zusammen:

$$K_G = K_h \cup K_g.$$

Da die Mengen  $K_h$  und  $K_g$  endlich sind, ist auch  $K_G$  endlich. Damit ist auch die Bildmenge  $B_G$  endlich. Mit diesen Überlegungen ist das folgende Lemma bewiesen.

**3.13. Lemma:** *Es sei  $G = (\mathcal{A}, f, \omega)$  ein sDTOL-System. Wenn jedes  $x$ -Eins-System  $T_x$  von  $G$  mit  $x \in [f^2(\{\omega\})]$  eine endliche Bildsprache erzeugt, so ist auch die Bildsprache  $B_G$  von  $G$  endlich.*

Diese Lemma führt zusammen mit Lemma 3.12 zu folgendem Endlichkeitskriterium.

**3.14. Satz:** *Es sei  $G = (\mathcal{A}, f, \omega)$  ein gemischtes, längenkonstantes sDTOL-System. Die Menge der auftretenden längenkonstanten Endomorphismen sei  $h$ . Die von  $G$  erzeugte Bildsprache  $B_G$  ist genau dann endlich, wenn für jeden Buchstaben  $x \in [f^2(\{\omega\})]$ , der in einer zweiten Ableitung mittels  $G$  auftritt, das  $x$ -Eins-System  $T_x = (\mathcal{A}, h, x)$  von  $G$  eine endliche Bildsprache erzeugt.*

## 4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden synchrone, deterministisch-tabellierte Ketten-Code-Bild-Systeme über dem Alphabet  $\{r, u, l, d\}$  hinsichtlich der Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht.

Die Untersuchungen beruhen auf einer Abstrahierungshierarchie aus [T02]. Es wird nachgewiesen, daß es entscheidbar ist, ob ein synchrones, deterministisch-tabelliertes Ketten-Code-Bild-System eine endliche oder unendliche Bildsprache erzeugt.

Ketten-Code-Bild-Systeme werden in längenkontrahierende, -konstante und -expandierende Systeme eingeteilt, wobei noch zwischen reinen und gemischten Systemen unterschieden wird. Längenkontrahierende Ketten-Code-Bild-Systeme erzeugen eine endliche, längenexpandierende eine unendliche Bildsprache. Unter den längenkonstanten Ketten-Code-Bild-Systemen gibt es sowohl Systeme, die eine endliche Bildsprache liefern, als auch solche, die eine unendliche Bildsprache erzeugen. Ein reines, längenkonstantes deterministisch-tabelliertes Ketten-Code-Bild-System hat genau dann eine unendliche Bildsprache, wenn sein minimales *sOL*-Obersystem eine unendliche Bildsprache erzeugt. Ein gemischtes, längenkonstantes System hat genau dann eine unendliche Bildsprache, wenn eines seiner *x*-Eins-Systeme eine unendliche Bildsprache erzeugt.

## Literatur

- [DH89] DASSOW, J.; HINZ, F.: *Kettencode-Bildsprachen. Theorie und Anwendungen*. Wiss. Zeitschrift der Techn. Univ. Magdeburg, 1989.
- [DHr92] DASSOW, J.; HROMKOVIČ, J.: *On Synchronized Lindenmayer Picture Languages*. Lindenmayer Systems, 253–261. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [Fe68] FEDER, J.: *Languages of encoded line patterns*. Inform. Control, 13:230–244.
- [Fr61] FREEMAN, H.: *On the encoding of arbitrary geometric configurations*. IRE Trans. EC, 10:260–168, 1961.
- [MRW82] MAURER, H.; ROZENBERG, G.; WELZL, E.: *Using string languages to describe picture languages*. Inform. Control, 54:155–185, 1982.
- [RS80] ROZENBERG, G.; SALOMAA, A.: *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, 1980.
- [SW85] SUDBOROUGH, I. H.; WELZL, E.: *Complexity and decidability for chain code picture languages*. Theoretical Computer Science, 36:173–202, 1985.
- [T02] TRUTHE, B.: *Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Preprint Nr. 8/2002.
- [T03] TRUTHE, B.: *Zur Endlichkeit von Bildsprachen synchroner, einfach nicht-deterministischer Ketten-Code-Bild-Systeme*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Preprint Nr. 7/2003.