Untersuchungen zu
Kantengrammatiken und Valenzgrammatiken

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
(mathematisch-naturwissenschaftlicher Bereich)
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Herrn Ralf Stiebe
geb. am: 8. Februar 1968 in: Rostock

Gutachterin bzw. Gutachter:

1. Prof. Dr. Annegret Habel, Oldenburg
2. Prof. Dr. Jürgen Dassow, Magdeburg
3. Prof. Dr. Ludwig Staiger, Halle

Halle (Saale), 13. Juli 2000

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Die vorliegende Arbeit enthält Ergebnisse, die während meines Promotionsstudiums an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg und meiner Tätigkeit an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg entstanden.

Mein erster Dank geht an Herrn Prof. Dr. Dassow, der mich während meines Studiums in die Theorie der formalen Sprachen einführte, die Untersuchung von Kantengrammatiken als Promotionsthema vorschlug und mir auch nach meinem Wechsel nach Halle für zahlreiche Diskussionen zur Verfügung stand.

Dem schließt sich nahtlos der Dank an Herrn Prof. Dr. Staiger an, der mit dem Beginn meiner Zeit in Halle die Betreuung übernahm, mir großen Freiraum für meine Forschung ließ, die Ergebnisse kritisch mit mir diskutierte und auch mit dem nötigen Nachdruck auf die Fertigstellung der Arbeit drängte.

Besonders herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr. Salomaa aus Turku bedanken, bei dem ich einen dreimonatigen, sehr anregenden Forschungsaufenthalt verbringen konnte.

Herrn Dr. Fernau bin ich für zahlreiche fachliche Diskussionen, insbesondere zu Valenzgrammatiken, dankbar.

Den Kolleginnen und Kollegen am Fachbereich Mathematik und Informatik der Martin-Luther-Universität Halle, ganz besonders Frau Dr. Winter, danke ich für die gute und stimulierende Arbeitsatmosphäre.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir eine sorgenfreie Kindheit ermöglichten und meine Begabungen förderten, bei meiner Lebensgefährtin Katharina für ihre Geduld und für das Korrekturlesen einer früheren Fassung und bei meinem Sohn Viktor, der immer wieder für die notwendige Erholung von der Arbeit sorgte.

Einleitung

Graphen und Familien von Graphen spielen in vielen Gebieten der Informatik eine herausragende Rolle. Schon seit den siebziger Jahren versuchte man deshalb, Familien von Graphen mit Hilfe von Grammatiken zu beschreiben. Dabei verfolgt man das Ziel, die in der Theorie der formalen Sprachen bewährten Methoden bei der Untersuchung von solcherart erzeugten Graphenfamilien zu verwenden. Ein Überblick zu verschiedenen Aspekten von Graphgrammatiken und Graphtransformationen ist u.a. im *Handbook of Graph Grammars* [12] sowie in mehreren Kapiteln des 3. Bandes des *Handbook of Formal Languages* [33] zu finden.

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten *Kantengrammatiken* (*edge grammars*) wurden von F. Berman im Zusammenhang mit Fragen aus der Theorie der parallelen Programmierung eingeführt. In diesem Bereich besitzen Graphen in zweifacher Hinsicht eine Bedeutung. Einerseits läßt sich eine parallele Rechnerarchitektur als Graph darstellen, wobei die Knoten jeweils einen Prozessor darstellen und eine Kante zwischen zwei Knoten einer Verbindung zwischen den Prozessoren entspricht. Rechnerarchitekturen mit struktureller Ähnlichkeit werden zu Familien (z.B. Hyperwürfel, Gitter) zusammengefaßt. Andererseits wird ein paralleler Algorithmus durch eine Familie von sogenannten Kommunikationsgraphen repräsentiert. Ein Knoten eines Kommunikationsgraphen stellt einen Prozeß dar, während eine Kante die Kommunikation zwischen zwei Prozessen symbolisiert.

Ein wichtiges Problem bei der Anwendung eines parallelen Algorithmus ist die Einbettung des zur Probleminstanz gehörigen Kommunikationsgraphen in die konkrete Rechnerarchitektur. Dabei sollten kommunizierende Prozesse an nicht weit voneinander entfernte Prozessoren übergeben werden. Eine übliche Idee besteht darin, den Kommunikationsgraphen auf einen kleinen Graphen der gleichen Familie so zu kontrahieren, daß die Kommunikationsstruktur erhalten bleibt. Der kleinere Graph wird dann mittels einer Heuristik in den Graphen H eingebettet.

Viele in der Theorie der parallelen Algorithmen relevante Graphenfamilien lassen sich auf natürliche Weise durch einfache Wortrelationen beschreiben. Beispielsweise besitzt der Hyperwürfel der Dimension n als Knoten alle Wörter der Länge n über $\{0, 1\}$, und Kanten bestehen genau zwischen Wörtern mit Hamming-Abstand 1. Auch das Problem der Kontraktion ist einfach zu lösen, sofern die Wortrelation präfixabgeschlossen ist. In diesem Falle kann die Kontraktion erfolgen, indem ein Knoten auf sein Präfix der entsprechenden Länge abgebildet wird.

Aus den eben genannten Gründen liegt es nahe, Wortgrammatiken so zu modifizieren, daß sie Paare von Wörtern erzeugen. Ein Paar von Wörtern der Länge n wird als Kante im n-ten Graphen der Familie interpretiert. Bei Kantengrammatiken wird die Modifikation erreicht, indem Paare von Wörtern (nicht notwendig gleicher Länge) als Terminalsymbole verwendet werden. Verschiedene Aspekte der Erzeugung von Graphenfamilien durch Kantengrammatiken, insbesondere Fragen der Erzeugungskraft, der Beziehung zu klassischen formalen Sprachen und der Entscheidbarkeit, wurden von Berman [1], Berman und Shannon [2, 3], Berman und Snyder [4] sowie von Dassow [8] untersucht.

Diese Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit fortgesetzt. Hauptsächlich wird die Familie der *synchronen regulären Kantengrammatiken*, das sind Kantengrammatiken mit rechtslinearen Regeln und Wortpaaren gleicher Länge, betrachtet. Diese Teilfamilie ist zum einen besonders interessant, da die in der Theorie der parallelen Algorithmen wichtigen Graphenfamilien durch Kantengrammatiken dieses Typs erzeugt werden. Andererseits besteht ein enger Zusammenhang zur Theorie endlicher Automaten, so daß zahlreiche Resultate über die Familie der regulären Sprachen nutzbar sind.

Bei der Betrachtung der von (nicht synchronen) Kantengrammatiken erzeugten Sprachen zeigte sich, daß diese durch die von Păun [28] eingeführten *Valenzgrammatiken* beschrieben werden können. Dies sind Grammatiken, deren Regeln durch Elemente eines Steuermonoids (hier $(\mathbb{Z}, +, 0)$) bewertet sind. Die Bewertungen werden auf Ableitungen ausgedehnt, und es werden nur solche Ableitungen zugelassen, deren Bewertung das neutrale Element ergibt. Valenzgrammatiken sind ein Beispiel für die *gesteuerte Ersetzung* (*regulated rewriting*) und über die Beziehungen zu Kantengrammatiken hinaus von Interesse. Deshalb ist ihnen ein eigener Abschnitt gewidmet.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In Kapitel 1 werden die notwendigen Grundlagen aus der Graphentheorie und der Theorie der formalen Sprachen bereitgestellt. Danach folgen im Kapitel 2 die Untersuchungen zu Valenzgrammatiken. Das Hauptresultat ist die Konstruktion von Normalformen für Valenzgrammatiken mit $(\mathbb{Z}^k, +, \vec{0})$ als Steuermonoid. Damit wird auch die seit längerem offene Frage nach der Existenz von Normalformen für *ungeordnete Vektorgrammatiken* positiv beantwortet. Es wird weiter gezeigt, daß Valenzgrammatiken über beliebigen kommutativen Monoiden keine größere Erzeugungskraft als Valenzgrammatiken über $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ besitzen. Außerdem werden *schlanke* Valenzsprachen (das sind Sprachen mit beschränkter Strukturfunktion) untersucht. Für diese Teilfamilie werden einige positive Abschluß- und Entscheidbarkeitsresultate bewiesen. Diese Ergebnisse werden hier u.a. benutzt, um die Entscheidbarkeit des Elementproblems für kontextfreie Kantengrammatiken zu zeigen.

Kapitel 3 ist den Kantengrammatiken gewidmet. Abschnitt 3.1 enthält die Definitionen sowie einige motivierende Beispiele. Die Verbindungen zwischen Kantengrammatiken und klassischen formalen Sprachen, insbesondere Valenzsprachen, werden in Abschnitt 3.2 betrachtet. Anschließend wird in Abschnitt 3.3 die Erzeugungskraft von synchronen regulären Kantengrammatiken untersucht. Unter Verwendung von bekannten Resultaten über reguläre Sprachen erhält man einige wichtige Strukturaussagen. In Abschnitt 3.4 wird die

Teilfamilie der synchronen regulären und kürzbaren Kantengrammatiken gesondert betrachtet. Unter anderem wird gezeigt, daß diese Art von Kantengrammatiken äquivalent zu einer parallelen Variante von Knotenersetzungsgrammatiken ist. In den Abschnitten 3.5 und 3.6 folgen Untersuchungen zu Abschluß- und Entscheidbarkeitseigenschaften von Kantengrammatiken. Einerseits werden Abschluß- und Entscheidbarkeitsprobleme diskutiert, die sich als direkte Verallgemeinerung analoger Fragestellungen aus der Theorie der formalen Sprachen ergeben, wie z.B. das Leerheitsproblem und das Endlichkeitsproblem. Zum anderen werden graphentheoretisch motivierte Probleme betrachtet, wie das Abschlußverhalten unter Graphenoperationen oder die Frage nach der Existenz von Graphen mit bestimmten graphentheoretischen Eigenschaften.

Kapitel 1

Grundlagen

Nach der Einführung einiger mathematischer Notationen werden in diesem Abschnitt die grundlegenden Begriffe aus der Graphentheorie und der Theorie der formalen Sprachen erklärt. Eine ausführliche Einführung in diese Gebiete wird beispielsweise in [40] bzw. [18, 34] gegeben.

1.1 Grundbegriffe und Notationen

Die leere Menge wird mit $\emptyset$, die Potenzmenge einer Menge M wird mit $\mathcal{P}(M)$, die Mächtigkeit einer Menge M wird mit $\operatorname{card} M$ bezeichnet.

Wir notieren die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0 mit $\mathbb{N}$, die Menge der ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}$ und die Menge der positiven rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}_+$.

Das *kartesische Produkt* $A \times B$ zweier Mengen A, B ist als $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ definiert. Das n-fache kartesische Produkt einer Menge A wird als A^n notiert. Für eine Menge A, $n \in \mathbb{N}$ und ein k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ ist die *Projektion* von A^n auf die Komponenten $(i_1, \ldots, i_k)$ definiert als die Abbildung $\operatorname{pr}_{A,n;i_1,\ldots,i_k} : A^n \to A^k$ mit $\operatorname{pr}_{A,n;i_1,\ldots,i_k}(w_1, \ldots, w_n) = (w_{i_1}, \ldots, w_{i_k})$ für $(w_1, \ldots, w_n) \in A^n$. Wenn w explizit als Element von A^n definiert wurde, schreiben wir vereinfachend $\operatorname{pr}_{i_1,\ldots,i_k}(w)$ anstelle von $\operatorname{pr}_{A,n;i_1,\ldots,i_k}(w)$.

Es sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Für $A' \subseteq A$ definieren wir das *Bild von A' unter R* als $R(A') = \{b \in B : \exists a(a \in A' \wedge (a, b) \in R)\}$; für $a \in A$ schreiben wir $R(a)$ anstelle von $R(\{a\})$. Die zu R *inverse Relation* $R^{-1} \subseteq B \times A$ ist als $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$ definiert. R heißt *partielle Funktion*, falls $\operatorname{card} R(a) \leq 1$ für alle $a \in A$ und *Funktion*, falls $\operatorname{card} R(a) = 1$ für alle $a \in A$.

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ wird binäre Relation auf M genannt. Anstelle von $(m_1, m_2) \in R$ schreiben wir häufig $m_1 R m_2$. Die Relation $\mathrm{Id}_M := \{(m, m) : m \in M\}$ wird als *identische*

Relation auf M bezeichnet. Für eine binäre Relation $R \subseteq M$ definieren wir

$$R^0 = \mathrm{Id}_M,\ R^{i+1} = \{(m,n) : \exists m'((m,m') \in R \wedge (m',n) \in R^i)\},\ R^{\leq i} = \bigcup_{j=0}^{i} R^j,$$

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i,\ R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i.$$

Die Relationen R^+ bzw. R^* heißen der *transitive Abschluß* bzw. der *transitive und reflexive Abschluß* von R.

Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *transitiv*, wenn aus xRy und yRz stets xRz folgt, *reflexiv,*, wenn xRx für alle $x \in M$ gilt, *symmetrisch*, wenn aus xRy stets yRx folgt, *antisymmetrisch*, wenn aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt. Eine binäre Relation auf M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie transitiv, reflexiv und symmetrisch ist; sie zerlegt M in Äquivalenzklassen. Eine binäre Relation $\leq$ auf M heißt *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist; sie heißt *Totalordnung* oder einfach *Ordnung*, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in M$ gilt.

Es folgen einige Definitionen für ganzzahlige Vektoren. Der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{Z}^k$, $k \geq\ 1, 1 \leq i \leq k$, wird mit $\vec{e_i}$ bezeichnet. Die 1-*Norm* eines Vektors $\vec{r} = \sum_{i=1}^{k} r_i \vec{e_i}$ aus $\mathbb{Z}^k$ wird als $\|\vec{r}\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |r_i|$, seine *Maximum-Norm* wird als $\|\vec{r}\|_1 := \max\{|r_i| : 1 \leq i \leq k\}$ definiert. Die Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ wird in natürlicher Weise zu einer Halbordnung auf $\mathbb{Z}^k$ verallgemeinert: $(a_1, \ldots, a_k) \leq (b_1, \ldots, b_k) :\iff a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq k$.

Die Operationen der ganzzahligen Division bzw. des Restes bei ganzzahliger Division werden mit div bzw. rest bezeichnet. Für $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ ist $a \operatorname{div} b := \lfloor a/b \rfloor$ und $a \operatorname{rest} b := a - (a \operatorname{div} b)b$. Die gleichen Operationen werden für $a \in \mathbb{Z}^k, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiert, indem man sie komponentenweise ausführt. Auf $\mathbb{Z}^k$ definieren wir die *Kongruenz modulo* $m \in \mathbb{N}$ als: $a \equiv b (\operatorname{mod} m) :\iff a \operatorname{rest} m = b \operatorname{rest} m$.

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *linear*, wenn es endlich viele Vektoren $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{N}^k$ mit

$$S = \left\{ \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m \right\}$$

gibt. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k$ heißt *semilinear*, wenn sie die Vereinigung endlich vieler linearer Mengen ist.

Eine *(algebraische) Struktur* ist ein Konstrukt $(M, R_1, \ldots, R_m)$, bestehend aus einer Menge M und Relationen $R_1 \subseteq M^{k_1}, \ldots, M^{k_m}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$. (Funktionen sowie Konstanten werden als Relationen angesehen.) Spezielle im folgenden betrachtete Strukturen sind Monoide, Graphen und Halbringe. Es seien $\mathbf{M} = (M, R_1, \ldots, R_m)$ und $\mathbf{N} = (N, R'_1, \ldots, R'_m)$ Strukturen mit $R_1 \subseteq M^{k_1}, \ldots, M^{k_m}$, $R'_1 \subseteq N^{k_1}, \ldots, N^{k_m}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$. Ein *Homomorphismus von* $\mathbf{M}$ *nach* $\mathbf{N}$ ist eine Abbildung $h : M \to N$ mit $(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in R_i \iff (h(a_1), \ldots, h(a_{k_i})) \in R'_i$ für alle $1 \leq i \leq m$. Ist h außerdem eine bijektive Abbildung, so wird h ein *Isomorphismus* genannt. Zwei Strukturen heißen *isomorph*, wenn zwischen ihnen ein Isomorphismus existiert.

Ein *Monoid* ist ein Tripel $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$, wobei M eine nichtleere Menge, $\circ$ eine Abbildung von $M \times M$ auf M und 1 ein Element aus M sind und $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in M$ sowie $1 \circ a = a \circ 1 = a$ für alle $a \in M$ erfüllt sind. Die n-te Potenz von $a \in M$ ist rekursiv definiert als $a^0 = 1$, $a^n = a^{n-1} \circ a$ für $n \geq 1$.

Für $A, B \subseteq M$ definieren wir das Produkt $A \circ B := \{a \circ b : a \in A, b \in B\}$. Das n-fache Produkt A^n von A ist definiert als $A^0 = \{1\}, A^n = A^{n-1} \circ A$ für $n \geq 1$. Das von A *erzeugte Untermonoid* A^* bzw. die von A *erzeugte Unterhalbgruppe* sind

$$A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n, \; A^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n.$$

$\mathbf{M}$ heißt *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $A \subseteq M$ mit $A^* = M$ gibt.

Ein Monoid $(M, \circ, 1)$ heißt *Gruppe*, wenn es zu jedem $m \in M$ ein *inverses Element* m^{-1} mit $m \circ m^{-1} = m^{-1} \circ m = 1$ gibt.

Ein Monoid $(M, \circ, 1)$ heißt *kommutativ*, wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$ gilt.

1.2 Graphen

Ein *(gerichteter) Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge und $E \subseteq V \times V$ eine binäre Relation auf V sind. Man nennt die Elemente von V bzw. E *Knoten* bzw. *Kanten*. Eine Äquivalenzklasse von isomorphen Graphen wird als *abstrakter Graph* bezeichnet. Der zu G gehörige abstrakte Graph wird mit $[G]$ notiert; für eine Menge von Graphen $\mathcal{G}$ ist $[\mathcal{G}] := \{[G] : G \in \mathcal{G}\}$.

Es folgen einige Begriffe aus der Graphentheorie. Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben.

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph* von G, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap V' \times V'$ gelten. Für $V' \subseteq V$ nennen wir den Graphen $G_{V'} = (V', E')$ mit $E' = E \cap (V' \times V')$ den durch V' *induzierten Teilgraphen* von G.

Eine Kante (v, v) heißt *Schlinge*. Ein Graph ohne Schlingen wird *schlicht* genannt. Im folgenden beschränken wir uns auf schlichte Graphen. Für $v \in V$ definieren wir den *Eingangsgrad* $d_{in}(v)$ bzw. den *Ausgangsgrad* $d_{out}(v)$ als $d_{in}(v) = \text{card } E^{-1}(v)$ bzw. $d_{out}(v) = \text{card } E(v)$.

Eine *Kantenfolge von* v_0 *nach* v_k *der Länge* k in G ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_i \in V$ für $0 \leq i \leq k$ und $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für $1 \leq i \leq k$. Eine Kantenfolge $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ heißt *Weg*, falls $v_i \neq v_j$ für $0 \leq i < j \leq k$ gilt; sie heißt *Zyklus*, falls $v_0 = v_k$ gilt. Ein Graph ohne Zyklus wird *azyklisch* genannt.

Der *Abstand* von $v \in V$ zu $w \in V$ ist die Länge des kürzesten Weges von v nach w bzw. ∞, falls kein Weg existiert. Zwei Knoten v, w eines Graphen G heißen *(stark) zusammenhängend*, wenn es einen Weg von v nach w und einen Weg von w nach v gibt.

Sie heißen *schwach zusammenhängend*, wenn es in $G^u := (V, E^u)$ mit $E^u = E \cup E^{-1}$ einen Weg von v nach w gibt. Offenbar sind der starke wie auch der schwache Zusammenhang Äquivalenzrelationen auf V. Die von den Äquivalenzklassen bezüglich des starken bzw. schwachen Zusammenhangs induzierten Teilgraphen bezeichnen wir als *starke bzw. schwache Zusammenhangskomponenten* von G. Gibt es genau eine starke bzw. schwache Zusammenhangskomponente, so heißt G *stark bzw. schwach zusammenhängend*.

Ein azyklischer Graph $G = (V, E)$ heißt *Wald*, wenn $\delta_{in}(v) \leq 1$ für alle $v \in V$ gilt. Ein schwach zusammenhängender Wald heißt *Baum*. Ein Baum besitzt genau einen Knoten mit dem Eingangsgrad 0, der als *Wurzel* bezeichnet wird. In einem Baum werden die Knoten mit dem Ausgangsgrad 0 als *Blätter* bezeichnet, alle anderen Knoten heißen *innere Knoten*. Ist (v, w) eine Kante in einem Baum, so nennt man v den *Vater* von w und w den *Sohn* von v. Sind v und w Knoten des Baumes $G = (V, E)$ mit $(v, w) \in E^*$, so bezeichnet man die von $\{u : (v, u) \in E^*\}$ bzw. $\{u : (v, u) \in E^* \wedge (w, u) \notin E^+\}$ induzierten Untergraphen (die beide Bäume mit der Wurzel v sind) als den *Unterbaum von v* bzw. als den *Unterbaum zwischen v und w*.

Ein *ungerichteter schlichter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Knotenmenge und E eine Menge von ungerichteten Kanten, das sind zweielementige Teilmengen von V, sind. Es ist für die folgendenden Ausführungen bequem, ungerichtete Graphen als gerichtete Graphen mit symmetrischer Kantenrelation zu definieren. Die ungerichtete Kante $\{v, w\}$ wird durch die gerichteten Kanten (v, w) und (w, v) dargestellt.

Für jeden Knoten v eines ungerichteten (schlichten) Graphen ist der Eingangsgrad gleich dem Ausgangsgrad und wird einfach als *Grad* $d(v)$ bezeichnet. Den *maximalen* Knotengrad $\Delta(G)$ bzw. *minimalen Knotengrad* $\delta(G)$ eines ungerichteten Graphen G definieren wir als $\Delta(G) = \max_{v \in V}\{d(v)\}$ bzw. $\delta(G) = \min_{v \in V}\{d(v)\}$.

Ist G ein beliebiger gerichteter Graph, so heißt der bereits erwähnte Graph G^u der *zu G gehörige ungerichtete Graph*. Ein ungerichteter Graph wird *ungerichteter Wald* bzw. *ungerichteter Baum* genannt, wenn er der zu einem gerichteten Wald bzw. Baum gehörige ungerichtete Graph ist.

1.3 Sprachen und Grammatiken

Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge X; die Elemente eines Alphabets werden *Buchstaben* oder *Symbole* genannt. Ein *Wort* über X ist eine endliche Folge von Buchstaben. Wie allgemein üblich, benutzen wir für ein Wort $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die kürzere Schreibweise $a_1 a_2 \cdots a_n$. Die *Länge* eines Wortes w ist die Anzahl der Folgeglieder und wird mit $|w|$ bezeichnet. Das Wort der Länge 0 wird das *leere Wort* genannt und mit λ bezeichnet. Die Menge aller Wörter über X wird mit X^* bezeichnet. Sind $v = a_1 \cdots a_m$ und $w = b_1 \cdots b_n$ Wörter, so ist ihr *Produkt (Konkatenation)* $v \cdot w$ (oder kurz vw) als $a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$ definiert. Offenbar bildet $(X^*, \cdot, \lambda)$ ein Monoid, das *freie Monoid* über X. Eine *(formale) Sprache* über X ist eine Teilmenge von X^*. Wegen der Monoideigenschaft von $(X^*, \cdot, \lambda)$ sind die Definitionen der Sprachen $L_1 \cdot L_2$, L^k $(k \geq 0)$, L^* und L^+ entsprechend Abschnitt 1.1 klar.

Ein Wort u heißt *Präfix* des Wortes w, in Zeichen $u \sqsubseteq w$, wenn es ein Wort v mit $w = uv$ gibt. Für ein Wort w der Länge n wird mit $\mathrm{pref}_k(w)$ das Präfix der Länge $k \leq n$ bezeichnet.

Für ein Alphabet Y und ein beliebiges Alphabet X bezeichnen wir den Homomorphismus $\pi_Y : X^* \to Y^*$ mit $\pi_Y(y) = y$, falls $y \in Y$, $\pi_Y(x) = \lambda$, falls $x \in X \setminus Y$, als die *Projektion auf* Y. Vereinfachend schreiben wir π_a statt $\pi_{\{a\}}$ für $a \in Y$ sowie $|w|_Y$, $|w|_a$ anstelle von $|\pi_Y(w)|, |\pi_a(w)|$.

Es sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache. Die *charakteristische Funktion* von L ist die Abbildung $\chi_L : X^* \to \{0, 1\}$ mit $\chi_L(w) = 1$, falls $w \in L$, $\chi_L(w) = 0$, falls $w \notin L$. Die *Längenmenge (length set)* von L ist $\Lambda(L) = \{|w| : w \in L\}$. Die *Strukturfunktion* von L ist die Abbildung $s_L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s_L(n) = \mathrm{card}\,\{w \in L : |w| = n\}$. Ist s_L beschränkt bzw. durch k beschränkt bzw. fast überall durch k beschränkt, so nennt man L *schlank* bzw. im strengen Sinne k-schlank bzw. k-schlank.

Ist X ein Alphabet mit n Symbolen, so ist eine *Parikh-Abbildung* ein Monoidhomomorphismus von $(X^*, \cdot, \lambda)$ nach $(\mathbb{N}^n, +, \vec{0})$, der ein Symbol aus X eineindeutig auf einen Einheitsvektor abbildet. Da Parikh-Abbildungen bis auf Isomorphie gleich sind, wird eine dieser Abbildungen als *die* Parikh-Abbildung von X^* bestimmt und mit Ψ bezeichnet. Für eine Sprache $L \subseteq X^*$ wird $\Psi(L)$ als die *Parikh-Menge* von L bezeichnet.

Formale Sprachen lassen sich durch Grammatiken und Automaten beschreiben. Eine *kontextfreie Grammatik* ist ein Quadrupel $G = (N, T, P, S)$, bestehend aus dem Alphabet der Nichtterminale N, dem zu N disjunkten Alphabet der Terminale T, der Regelmenge P, einer endlichen Teilmenge von $N \times (N \cup T)^*$, und dem Startsymbol $S \in N$. Eine Regel $(A, \beta) \in P$ wird allgemein als $A \to \beta$ notiert. Über $(N \cup T)^*$ definiert man für eine Regel $p = (A, \beta)$ aus P bzw. für G die binären Ableitungsrelationen $\Rightarrow_p$ bzw. $\Rightarrow_G$ als

$$\begin{aligned} v \Rightarrow_p w \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists v_1 \exists v_2 (v = v_1 A v_2 \wedge w = v_1 \beta v_2) \\ v \Rightarrow_G w \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists p (p \in P \wedge v \Rightarrow_p w). \end{aligned}$$

Die *von G erzeugte Sprache* ergibt sich als $L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$. Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ heißt

- *linear*, wenn P nur Regeln der Form $A \to vBw$, $A \to v$ mit $A, B \in N$, $v, w \in T^*$ enthält,
- *regulär*, wenn P nur Regeln der Form $A \to vB$, $A \to v$ mit $A, B \in N$, $v \in T^*$ enthält.

Eine Sprache L heißt *kontextfrei, linear bzw. regulär*, wenn es eine kontextfreie, eine lineare bzw. eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L$ gibt. Die Familien der kontextfreien bzw. linearen bzw. regulären Sprachen werden mit $\mathcal{L}(\mathrm{CF})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathrm{LIN})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathrm{REG})$ bezeichnet.

Von den Automatenmodellen erwähnen wir nur die endlichen Automaten, die äquivalent zu den regulären Grammatiken sind, sowie die endlichen Transducer (endliche Automaten mit Ausgabe).

Definition 1.3.1 *Ein* (nichtdeterministischer) endlicher Automat *ist ein Quintupel* $\mathcal{A} = (Z, X, z_0, \delta, F)$, *bestehend aus der endlichen Zustandsmenge* Z, *dem Eingabealphabet* X, *dem Startzustand* $z_0 \in Z$, *der Menge der Endzustände* $F \subseteq Z$ *und der endlichen Übergangsrelation* $\delta \subseteq Z \times X \times Z$.

Die Relation δ *wird auf* $Z \times X^* \times Z$ *wie folgt fortgesetzt:*
$(z, \lambda, z') \in \delta :\iff z = z'$ *für* $z, z' \in Z$,
$(z, wa, z') \in \delta :\iff \exists y(y \in Z \wedge (z, w, y) \in \delta \wedge (y, a, z') \in \delta)$ *für* $z, z' \in Z, w \in X^*, a \in X$.
Die von $\mathcal{A}$ *akzeptierte Sprache* $L(\mathcal{A})$ *ist definiert als*

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in X^* : (z_0, w, q) \in \delta \text{ für ein } q \in F\}.$$

Ist δ *eine Funktion bzw. eine partielle Funktion von* $Z \times X$ *nach* Z, *so heißt* $\mathcal{A}$ deterministischer *bzw.* partieller deterministischer *Automat.*

Ein Lauf *von* $\mathcal{A}$ *auf dem Wort* $w = a_1 \cdots a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in X$, *ist eine Folge von Zuständen* $z_0, z_1, \ldots, z_n$ *mit* $(z_{i-1}, a_i, z_i) \in \delta$ *für* $1 \leq i \leq n$. *Ist zusätzlich* $z_n \in F$, *so heißt der Lauf* akzeptierend. *Für ein Wort* $w \in X^*$ *ist der* Grad der Mehrdeutigkeit *bezüglich* $\mathcal{A}$, $d_{\mathcal{A}}(w)$, *als die Anzahl der akzeptierenden Läufe von* $\mathcal{A}$ *auf* w *definiert. Der Grad der Mehrdeutigkeit von* $\mathcal{A}$ *ist* $d_{\mathcal{A}} = \sup\{d_{\mathcal{A}}(w) : w \in X^*\}$.

Definition 1.3.2 *Ein* endlicher Transducer *ist ein Sextupel* $\mathcal{A} = (Z, X, Y, z_0, \delta, F)$, *wobei* Z, X, z_0 *und* F *wie bei einem endlichen Automaten definiert sind,* Y *ein Ausgabealphabet ist und die Überführungsrelation* δ *eine endliche Relation* $\delta \subseteq Z \times X^* \times Y^* \times Z$ *ist.*

Die Relation δ *wird zu einer Relation* $\delta^* \subseteq Z \times X^* \times Y^* \times Z$ *wie folgt fortgesetzt:*

- $\delta^0 := \{(z, \lambda, \lambda, z) : z \in Z\}$,
- $(z_1, w_1, w_2, z_2) \in \delta^{n+1} :\iff$
  $\exists z \exists u_1 \exists v_1 \exists u_2 \exists v_2 (w_1 = u_1 v_1, w_2 = u_2 v_2, (z_1, u_1, u_2, z) \in \delta^n, (z, v_1, v_2, z_2) \in \delta)$,
- $\delta^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta^n$.

Die von $\mathcal{A}$ *akzeptierte Relation* $\tau_{\mathcal{A}}$ *ist definiert als*

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{(w_1, w_2) \in X^* \times Y^* : (z_0, w_1, w_2, q) \in \delta^* \text{ für ein } q \in F\}.$$

Eine Relation $R \subset X^* \times Y^*$ *heißt* reguläre Transduktion*, falls es einen endlichen Transducer* $\mathcal{A}$ *mit* $\tau_{\mathcal{A}} = R$ *gibt.*

Eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ heißt *abgeschlossen* unter der Operation F, die k Sprachen auf eine Sprache abbildet, falls aus $L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ stets $F(L_1, \ldots, L_k) \in \mathcal{L}$ folgt. Einige wichtige Abschlußeigenschaften der Familien der kontextfreien, linearen bzw. regulären Sprachen werden im folgenden zusammengefaßt, siehe auch [18]:

Satz 1.3.1 *Die Familien $\mathcal{L}(X), X \in \{REG, LIN, CF\}$, sind abgeschlossen unter Vereinigung und regulären Transduktionen. Die Familien $\mathcal{L}(REG)$ und $\mathcal{L}(CF)$ sind außerdem unter Konkatenation und Hüllenbildung abgeschlossen. Weiterhin ist $\mathcal{L}(REG)$ abgeschlossen unter Komplementierung.*

Da Homomorphismen, inverse Homomorphismen, der Durchschnitt mit einer regulären Sprache und die Substitution durch eine reguläre Sprache spezielle reguläre Transduktionen sind, besteht hinsichtlich dieser Operationen ein positives Abschlußverhalten für die genannten Sprachfamilien.

Wichtige *Entscheidungsprobleme* für Grammatiken sind das

- Elementproblem: gegeben eine Grammatik G und ein Wort w; ist $w \in L(G)$?
- Leerheitsproblem: gegeben eine Grammatik G; ist $L(G)$ leer?
- Endlichkeitsproblem: gegeben eine Grammatik G; ist $L(G)$ endlich?
- Universalitätsproblem: gegeben eine Grammatik $G = (N, T, P, S)$; ist $L(G) = T^*$?
- Schlankheitsproblem: gegeben eine Grammatik G; ist $L(G)$ schlank?
- Äquivalenzproblem: gegeben zwei Grammatiken G und H; ist $L(G) = L(H)$?
- Disjunktheitsproblem: gegeben zwei Grammatiken G und H; sind $L(G)$ und $L(H)$ disjunkt?

Satz 1.3.2 *Das Element-, das Leerheits-, das Endlichkeits- und das Schlankheitsproblem sind entscheidbar für kontextfreie Grammatiken. Das Äquivalenz- und das Disjunktheitsproblem sind entscheidbar für reguläre Grammatiken und unentscheidbar für lineare Grammatiken.*

Eine parallel arbeitende Variante von Grammatiken stellen die Lindenmayer-Systeme dar. Wir werden im folgenden nur deren einfachste Version, die D0L-Systeme, betrachten.

Ein *D0L-System* ist ein Tripel $G = (\Sigma, h, \omega)$, bestehend aus einem Alphabet Σ, einem Homomorphismus $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ und dem Axiom $\omega \in \Sigma^*$. Die von G erzeugte Folge ist $S(G) = (w_i)_{i \geq 0}$ mit $w_0 = \omega$, $w_i = h(w_{i-1}) = h^i(\omega)$ für $i \geq 1$. Die von G erzeugte Sprache ist $L(G) = \{w : w \in S(G)\}$, die Funktion $g_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g_G(i) = |w_i|$ nennt man die *Wachstumsfunktion* von G. Eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *D0L-Wachstumsfunktion*, falls es ein D0L-System G mit $g = g_G$ gibt.

1.4 Formale Potenzreihen

Eine wichtige Verallgemeinerung von Sprachen stellen die *formalen Potenzreihen* dar. Im folgenden werden die Definitionen und Fakten zu formalen Potenzreihen und ihre Beziehung zu endlichen Automaten in dem hier benötigten Umfang angegeben. Für eine ausführliche Erörterung dieses Themas siehe z.B. [5, 35].

Definition 1.4.1 *Ein* kommutativer Halbring *ist ein Quintupel* $(A, +, \cdot, 0, 1)$. *Dabei sind* $(A, +, 0)$ *und* $(A, \cdot, 1)$ *kommutative Monoide, und außerdem gilt*

- $\forall a \forall b \forall c((a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c))$ *(Distributivgesetz) sowie*
- $\forall a(0 \cdot a = 0)$.

Beispiele für kommutative Halbringe sind der Boolesche Halbring $\mathbb{B} = (\{0,1\}, +, \cdot, 0, 1)$ mit $1+1=1$, der Halbring der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ und $\mathbb{N}_k$, der Restklassenring modulo k.

Definition 1.4.2 *Es seien* $A = (A, +, \cdot, 0, 1)$ *ein Halbring und* X *ein Alphabet. Eine Abbildung* $r : X^* \to A$ *wird als* (formale) Potenzreihe *bezeichnet. Der Wert von* r *für* $w \in X^*$ *wird als* (r, w) *und* r *selbst als formale Summe* $r = \sum_{w \in X^*} (r, w) w$ *notiert. Eine Potenzreihe* r *heißt* quasiregulär, *wenn* $(r, \lambda) = 0$ *gilt.*

Die Menge aller $w \in X^*$ *mit* $(r, w) \neq 0$ *wird als Trägermenge von* r, *support*(r), *bezeichnet. Ist support*(r) *endlich, so wird* r *ein* Polynom *genannt. Die Menge der formalen Potenzreihen wird mit* $A\langle\langle X^* \rangle\rangle$, *die Menge aller Polynome wird mit* $A\langle X^* \rangle$ *bezeichnet.*

Als nächstes definieren wir einige Operationen für Potenzreihen. Es seien A, B Halbringe, $a \in A$, X, Y Alphabete, $h : A \to B$ ein Halbringhomomorphismus, $H : X^* \to Y^*$ ein Monoidhomomorphismus, r, r' Potenzreihen aus $A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ und s eine Potenzreihe aus $A\langle\langle Y^* \rangle\rangle$. Dann sind die Potenzreihen $r + r', ar, ra, rr', r \odot r', H^{-1}s, r^+ \in A\langle\langle X^* \rangle\rangle$, $hr \in B\langle\langle X^* \rangle\rangle$ und $Hr \in A\langle\langle Y^* \rangle\rangle$ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
(r + r', w) &= (r, w) + (r', w), \text{ die Summe,} \\
(ar, w) &= a(r, w), \text{ externes Produkt von links,} \\
(ra, w) &= (r, w)a, \text{ externes Produkt von rechts,} \\
(rr', w) &= \sum_{w_1 w_2 = w} (r, w_1)(r', w_2), \text{ das Produkt,} \\
(r \odot r', w) &= (r, w) \cdot (r', w), \text{ das Hadamard-Produkt,} \\
(hr, w) &= h((r, w)), \\
(Hr, w) &= \sum_{v \in X^*, H(v) = w} (r, v), \text{ falls } H \text{ nichtlöschend, d.h. } (H(w) = \lambda \to w = \lambda), \\
(H^{-1}s, w) &= (s, H(w)) \\
(r^+, w) &= \sum_{n=1}^{\infty} (r^n, w), \text{ falls } r \text{ quasiregulär.}
\end{aligned}
$$

Eine Teilfamilie E von $A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ heißt rational abgeschlossen, wenn für $r, r' \in E$, $a \in A$ auch $r + r', rr', ar, ra$ und für quasireguläre r auch r^+ in E enthalten sind.

Definition 1.4.3 *Die Menge der A-rationalen Potenzreihen $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$ ist die kleinste rational abgeschlossene Teilmenge von $A\langle\langle X^*\rangle\rangle$, die alle Polynome enthält.*

Einige wichtige Abschluß- und Entscheidbarkeitseigenschaften für rationale Potenzreihen sowie die Zusammenhänge zwischen endlichen Automaten und rationalen Potenzreihen werden im folgenden zusammengefaßt, siehe auch [5, 35].

Satz 1.4.1 *Es seien A, B Halbringe, $a \in A$, X, Y Alphabete, $h : A \to B$ ein Halbringhomomorphismus, $H : X^* \to Y^*$ ein Monoidhomomorphismus, r, r' Potenzreihen aus $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$ und s eine Potenzreihe aus $B^{\mathrm{rat}}\langle\langle Y^*\rangle\rangle$.*

Dann sind die Potenzreihen $r \odot r', H^{-1}s$ in $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$, hr in $B^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$ und, falls H nichtlöschend ist, Hr in $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle Y^*\rangle\rangle$.

Satz 1.4.2 *Ist $L \subseteq X^*$ eine reguläre Sprache, so ist die Potenzreihe C_L mit $(C_L, w) = \chi_L(w)$ in $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$ und in $\mathbb{B}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$; die Potenzreihe S_L mit $(S_L, x^n) = s_L(n)$ ist in $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \{x\}^*\rangle\rangle$.*

Ist $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat mit Eingabealphabet X, so ist die formale Potenzreihe $D_{\mathcal{A}}$ mit $(D_{\mathcal{A}}, w) = d_{\mathcal{A}}(w)$ in $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$.

Satz 1.4.3 *Ist S eine Potenzreihe aus $\mathbb{Z}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \{x\}^*\rangle\rangle$, so ist die Menge $\{n : (S, x^n) = 0\}$ semilinear.*

Satz 1.4.4 *Für Potenzreihen aus $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \{x\}^*\rangle\rangle$ sowie $\mathbb{N}_k^{\mathrm{rat}}\langle\langle \{x\}^*\rangle\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, ist es entscheidbar, ob alle Koeffizienten gleich 0 sind bzw. ob ein Koeffizient gleich 0 ist.*

Für Potenzreihen aus $\mathbb{Z}^{\mathrm{rat}}\langle\langle \{x\}^*\rangle\rangle$ ist es entscheidbar, ob alle Koeffizienten gleich 0 sind.

Satz 1.4.5 *Für eine Potenzreihe S aus $\mathbb{N}^{\mathrm{rat}}\langle\langle X^*\rangle\rangle$ ist es entscheidbar, ob der Wertebereich $\{(S, w) : w \in X^*\}$ endlich ist.*

Kapitel 2

Valenzgrammatiken

In diesem Kapitel werden Valenzgrammatiken und ähnliche Konzepte untersucht. Eine Valenzgrammatik ist eine kontextfreie Grammatik, wobei jeder Regel eine Bewertung (Valenz) aus einem Monoid $\mathbf{M}$ zugeordnet wird. Diese Bewertung wird auf Ableitungen erweitert. Eine Ableitung ist nur dann zulässig, wenn ihre Bewertung gleich dem neutralen Element von $\mathbf{M}$ ist. Valenzgrammatiken sind eine spezielle Variante von Grammatiken mit *gesteuerter Ersetzung (regulated rewriting)*. Die Idee von gesteuerten Ersetzungen ist, die Erzeugungskraft kontextfreier Grammatiken zu erhöhen und gleichzeitig positive Abschlußeigenschaften und Entscheidbarkeitsresultate der kontextfreien Sprachen zu bewahren, indem die Anwendung der kontextfreien Regeln gesteuert wird. Eine umfassende Übersicht zu diesem Thema findet man in [9].

Nach der formalen Definition von Valenzgrammatiken werden bereits bekannte Resultate sowie einige Beispiele angegeben, welche die Bedeutung dieses Konzeptes hervorheben. Anschließend wird gezeigt, daß es für Valenzgrammatiken über den Gruppen $\mathbf{Z}_k$ Normalformen analog zu den Chomsky- und Greibach-Normalformen für kontextfreie Grammatiken gibt. Außerdem wird bewiesen, daß Valenzgrammatiken über beliebigen kommutativen Monoiden keine stärkere Erzeugungskraft als Valenzgrammatiken über der Gruppe $\mathbf{Q}_+$ besitzen. Schließlich werden schlanke Valenzsprachen untersucht. Wir zeigen, daß das Problem der k-Schlankheit für $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatiken und gegebenes k entscheidbar ist. Außerdem besitzen schlanke Valenzsprachen nützliche Abschlußeigenschaften. Eine interessante Anwendung der Ergebnisse bezüglich schlanker Valenzsprachen ist der Beweis der Entscheidbarkeit des Elementproblems für kontextfreie Kantengrammatiken, siehe Satz 3.6.5.

2.1 Definitionen und bekannte Resultate

Wir geben zunächst die Definition der Valenzgrammatik an; das Konzept der Valenzen wird danach auf endliche Automaten und Transducer übertragen.

Definition 2.1.1 *Es sei* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ *ein Monoid. Eine* $\mathbf{M}$-Valenzgrammatik *ist ein Quadrupel* $G = (N, T, P, S)$*, bestehend aus dem endlichen Alphabet der Nichtterminale* N*, dem endlichen Alphabet der Terminale* T *mit* $N \cap T = \emptyset$*, aus der endlichen Menge von Valenzregeln* $P \subset N \times (N \cup T)^* \times M$ *und dem Startsymbol* $S \in N$*. Eine Valenzregel* $p = (A, \alpha, m)$ *wird üblicherweise als* $(A \to \alpha, m)$ *notiert, wobei* $A \to \alpha$ *die* Kernregel *von* p *und* m *die* Valenz *von* p *genannt werden.*

Die binären Ableitungsrelationen $\Rightarrow_p$ *bzw.* $\Rightarrow_G$ *über* $(N \cup T)^* \times M$ *bezüglich einer Regel* $p = (A \to \alpha, m)$ *bzw. bezüglich* G *definieren wir als*

$$\begin{aligned}(\beta_1, m_1) \Rightarrow_p (\beta_2, m_2) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\gamma_1\exists\gamma_2(\beta_1 = \gamma_1 A\gamma_2 \wedge \beta_2 = \gamma_1\alpha\gamma_2 \wedge m_2 = m_1 \circ m),\\ (\beta_1, m_1) \Rightarrow_G (\beta_2, m_2) \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\beta_1, m_1) \Rightarrow_p (\beta_2, m_2) \text{ für ein } p \in P.\end{aligned}$$

Die von G *erzeugte Sprache ist* $L(G) = \{w \in T^* : (S, 1) \Rightarrow_G^* (w, 1)\}$*.*

Sind die Kernregeln von G *kontextfrei, linear bzw. regulär, so nennen wir* G *eine kontextfreie, lineare bzw. reguläre Valenzgrammatik. Die Familie der von* $\mathbf{M}$*-Valenzgrammatiken vom Typ* $X \in \{CF, LIN, REG\}$ *erzeugten Sprachen wird mit* $\mathcal{L}(Val, X, \mathbf{M})$ *bezeichnet.*

Definition 2.1.2 *Es sei* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ *ein Monoid. Ein* (nichtdeterministischer) endlicher $\mathbf{M}$-Valenzautomat *ist ein Quintupel* $\mathcal{A} = (Z, X, z_0, \delta, F)$*, wobei* Z *eine endliche Menge von Zuständen,* X *ein endliches Alphabet,* $z_0 \in Z$ *ein Anfangszustand,* $\delta \subseteq Z \times (X \cup \{\lambda\}) \times Z \times M$ *eine endliche Übergangsrelation und* $F \subseteq Z$ *eine Menge von Endzuständen sind.*

Eine Konfiguration von $\mathcal{A}$ *ist ein Tripel aus* $Z \times X^* \times M$*. Auf der Menge der Konfigurationen definieren wir die binäre Relation* $\Rightarrow_{\mathcal{A}}$ *als:*

$$\begin{aligned}(z_1, w_1, m) \Rightarrow_{\mathcal{A}} (z_2, w_2, n) \quad &:\Longleftrightarrow\\ &\exists a\exists m'((z_1, a, z_2, m') \in \delta \wedge w_1 = aw_2 \wedge m \circ m' = n)\end{aligned}$$

Die von $\mathcal{A}$ *akzeptierte Sprache ist* $L(\mathcal{A}) = \{w \in X^* : \exists q(q \in F \wedge (z_0, w, 1) \Rightarrow_{\mathcal{A}}^* (q, \lambda, 1))\}$*.*

Definition 2.1.3 *Ein* endlicher $\mathbf{M}$-Valenztransducer *über dem Monoid* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ *ist ein Sextupel* $\mathcal{A} = (Z, X, Y, z_0, \delta, F)$*, wobei* Z*,* X*,* z_0 *und* F *wie bei einem endlichen Valenzautomaten definiert sind,* Y *ein endliches Ausgabealphabet ist und* $\delta \subseteq Z \times X^* \times Y^* \times Z \times M$ *eine endliche Übergangsrelation ist.*

Eine Konfiguration von $\mathcal{A}$ *ist ein Quadrupel aus* $Z \times X^* \times Y^* \times M$*. Auf der Menge der Konfigurationen definieren wir die binäre Relation* $\Rightarrow_{\mathcal{A}}$ *als:*

$$\begin{aligned}&(z_1, v_1, w_1, m) \Rightarrow_{\mathcal{A}} (z_2, v_2, w_2, n) :\Longleftrightarrow\\ &\exists\alpha\exists\beta\exists m'((z_1, \alpha, \beta, z_2, m') \in \delta \wedge v_1 = \alpha v_2 \wedge w_2 = w_1\beta \wedge m \circ m' = n)\end{aligned}$$

Die von $\mathcal{A}$ *definierte Transduktion ist*

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{(v, w) \in X^* \times Y^* : \exists q(q \in F \wedge (z_0, v, \lambda, 1) \Rightarrow_{\mathcal{A}}^* (q, \lambda, w, 1))\}.$$

Eine Relation $R \subseteq X^* \times Y^*$ *heißt* rationale $\mathbf{M}$-Valenztransduktion*, falls es einen endlichen* $\mathbf{M}$*-Valenztransducer* $\mathcal{A}$ *mit* $R = \tau_{\mathcal{A}}$ *gibt.*

Bemerkung. Valenzgrammatiken wurden 1980 von Păun [28] zunächst über den Gruppen $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ und $\mathbf{Q}_+ = (\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ eingeführt. Unabhängig davon wurden etwa zur gleichen Zeit *endliche Automaten mit Multiplikation* ($\mathbf{Q}_+$-Valenzautomaten) durch Ibarra, Sahni, Kim [19], *blinde Zählerautomaten* ($\mathbf{Z}_k$-Valenzautomaten mit $k \in \mathbb{N}$) durch Greibach [16] sowie endliche Automaten über Gruppen durch Redko und Lisovik [30] untersucht.

Da der Ableitungsprozeß in Valenzgrammatiken dem in gewöhnlichen kontextfreien Grammatiken sehr ähnlich ist, lassen sich einige Eigenschaften aus der klassischen Theorie formaler Sprachen direkt übertragen:

Satz 2.1.1 *Es sei* $\mathbf{M}$ *ein Monoid.*

1. *Die Familien* $\mathcal{L}(Val, X, \mathbf{M})$, $X \in \{CF, LIN, REG\}$, *sind abgeschlossen unter Vereinigung und regulären Transduktionen [15].*
2. *Die Familie der von endlichen* $\mathbf{M}$*-Valenzautomaten akzeptierten Sprachen und die Familie* $\mathcal{L}(Val, REG, \mathbf{M})$ *sind identisch.*

Beweis. (zu 2.) Der Beweis der Äquivalenz von nichtdeterministischen endlichen Automaten mit spontanen Transitionen und regulären Grammatiken (siehe z.B. [18, Satz 9.1,9.2]) läßt sich wörtlich (unter Berücksichtigung der Valenzen) übertragen. □

Für das spezielle Steuermonoid $\mathbf{Q}_+ = (\mathbb{Q}_+, \cdot, 1)$ gelten zusätzliche Abschlußeigenschaften:

Satz 2.1.2 1. *Die Familien* $\mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Q}_+)$, $X \in \{CF, LIN, REG\}$, *sind abgeschlossen unter* $\mathbf{Q}_+$*-Valenztransduktionen [39].*

(Genauer: Ist L *aus* $\mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Z}_m)$ *und ist* τ *eine* $\mathbf{Z}_n$*-Valenztransduktion* $(m, n \geq 0)$*, so gilt* $\tau(L) \in \mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Z}_{m+n})$*.)*

2. *Die Familien* $\mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$, $X \in \{CF, REG\}$, *sind zusätzlich abgeschlossen unter Konkatenation [9].*

Bezüglich der Erzeugungskraft von Valenzgrammatiken mit verschiedenen Steuermonoiden sind folgende Resultate bekannt.

Satz 2.1.3 1. *Für* $X \in \{CF, LIN, REG\}$ *gilt:*
$\mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Z}_i) \subset \mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Z}_{i+1}), i \geq 0,$ [*38*].
$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Z}_i) = \mathcal{L}(Val, X, \mathbf{Q}_+) = \mathcal{L}(UV, X)$, *[9, Theorem 2.1.4].*
Dabei ist $\mathcal{L}(UV, X)$ *die Familie der Sprachen, die durch* ungeordnete Vektorgrammatiken *(siehe [9, Definition 2.1.4]) erzeugbar sind.*

2. $\bigcup_{\mathbf{M}\ endlich} \mathcal{L}(Val, X, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(MAT, X)$ *[15].*
Dabei ist $\mathcal{L}(MAT, X)$ *die Familie der Sprachen, die durch* Matrixgrammatiken *(siehe [9, Definition 1.1.1]) erzeugbar sind.*

3. $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{REG}, F_2) = \mathcal{L}(\mathit{CF})$ *[30],*
   $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{REG}, F_2 \times F_2) = \mathcal{L}(\mathit{RE})$ *[27],*
   $\mathcal{L}(\mathit{MAT}, \mathit{CF}) \subseteq \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, F_2) \subseteq \mathcal{L}(\mathit{RE})$ *[26].*
   Dabei ist F_2 die von zwei Elementen frei erzeugte Gruppe.

Die Sprachfamilie $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Z})$ ist echt in $\mathcal{L}(\mathrm{CF})$ enthalten und unvergleichbar mit $\mathcal{L}(\mathrm{LIN})$. Von Interesse ist der Durchschnitt von $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Z})$ und $\mathcal{L}(\mathrm{LIN})$. Dieser enthält die Familie der von *blinden one-turn Zählerautomaten* akzeptierten Sprachen. Ein blinder one-turn Zählerautomat ist ein blinder 1-Zählerautomat, der nach Anwendung einer Transition der Form $(z_1, x, z_2, -m)$ $(m > 0)$ keine Transition der Form (z_1', x', z_2', n) $(n > 0)$ ausführen darf, formal:

Definition 2.1.4 *Es sei $\mathcal{A} = (Z, X, z_0, \delta, F)$ ein blinder* 1*-Zählerautomat. Die Mengen Z_+ und Z_- seien definiert als:*

$$\begin{aligned} Z_+ &= \{z_1 \in Z : \exists a \exists z_2 \exists m((z_1, a, z_2, m) \in \delta \wedge m > 0)\} \\ Z_- &= \{z_2 \in Z : \exists a \exists z_2 \exists m((z_1, a, z_2, -m) \in \delta \wedge m > 0)\} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ heißt blinder one-turn Zählerautomat*, wenn aus $(z_1, w_1, m) \Rightarrow_{\mathcal{A}}^* (z_2, w_2, n)$ und $z_1 \in Z_-$ stets $z_2 \notin Z_+$ folgt.*

Satz 2.1.4 *Die Familie der von blinden one-turn Zählerautomaten akzeptierten Sprachen ist in $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{REG}, \mathbf{Z}) \cap \mathcal{L}(\mathit{LIN})$ enthalten.*

Beweis. Ein blinder 1-Zählerautomat kann durch einen Kellerautomaten simuliert werden. Analog kann man blinde one-turn Zählerautomaten durch one-turn Kellerautomaten simulieren, die wiederum zu linearen Grammatiken äquivalent sind. □

Als nächstes soll für zwei wichtige Operationen gezeigt werden, daß sie Spezialfälle von Valenztransduktionen sind. Es handelt sich um den Durchschnitt mit regulären Valenzsprachen und die Permutation.

Satz 2.1.5 *Für jedes Monoid* $\mathbf{M}$ *und jede Sprache $L \in \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{REG}, \mathbf{M})$ ist Id_L eine* $\mathbf{M}$*-Valenztransduktion.*

Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ ein $\mathbf{M}$-Valenzautomat mit $L(\mathcal{A}) = L$. Einen $\mathbf{M}$-Valenztransducer für Id_L erhält man, indem man jede Transition (z, a, z', m) in $\mathcal{A}$ durch die Transition (z, a, a, z', m) ersetzt, also die Eingabe ausgibt. □

Satz 2.1.6 *Es sei $X = \{a_1, \ldots, a_r\}$ ein Alphabet und $\Psi : X^* \to \mathbb{N}^r$ eine Parikh-Abbildung. $\mathit{Perm} := \{(v, w) : \Psi(v) = \Psi(w)\}$ ist eine $\mathbf{Z}_r$-Valenztransduktion.*

Beweis. Ein entsprechender $\mathbf{Z}_r$-Valenztransducer ist $\mathcal{A} = (\{q\}, X, X, q, \delta, \{q\})$ mit $\delta = \{(q, a_i, a_j, q, \vec{e_i} - \vec{e_j}) : 1 \leq i, j \leq r\}$. □

Eine wichtige Eigenschaft von $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprachen ist die Semilinearität ihrer Parikh-Mengen, siehe [9, Lemma 2.1.9]. Gewissermaßen als Umkehrung zeigen wir, daß das Urbild einer semilinearen Menge eine reguläre $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprache ist. Dies ist auch eine interessante Erweiterung des bekannten Satzes, daß jede semilineare Menge das Parikh-Bild einer regulären Sprache ist.

Satz 2.1.7 *Es seien $X = \{a_1, \ldots, a_r\}$ ein Alphabet, $\Psi : X^* \to \mathbb{N}^r$ eine Parikh-Abbildung und $S \subseteq \mathbb{N}^r$ eine semilineare Menge. Die Sprache $\Psi^{-1}(S) = \{w \in X^* : \Psi(w) \in S\}$ ist in $\mathcal{L}(Val, REG, \mathbf{Z}_r)$.*

Beweis. Für jede reguläre Sprache $L \subseteq X^*$ ist $\mathrm{Perm}(L)$ in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Z}_r)$, da die Permutation über X eine $\mathbf{Z}_r$-Valenztransduktion ist. Nach dem Satz von Parikh gibt es eine reguläre Sprache $L_S \subseteq X^*$ mit $\Psi(L_S) = S$. Wegen $\mathrm{Perm}(L_S) = \Psi^{-1}(\Psi(L_S)) = \Psi^{-1}(S)$ folgt die Behauptung. □

Eine der Steuerung durch Valenzen ähnliche Idee ist, die Bewertung nicht den Regeln, sondern den Terminalsymbolen zuzuordnen. Ein von einer Grammatik erzeugtes Wort wird genau dann in die Sprache aufgenommen, wenn es mit dem neutralen Element des zugehörigen Monoides bewertet wird. Wir untersuchen diese Art von Grammatiken mit bewertetem Alphabet, da sich die Kantensprache einer Kantengrammatik als eine Sprache über einem bewerteten Alphabet auffassen läßt, siehe Abschnitt 3.2.

Definition 2.1.5 *Es seien T ein Alphabet, $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ ein Monoid und $\varphi : T^* \to M$ ein Monoidhomomorphismus, der als* Bewertung (valuation) *bezeichnet wird. Für eine Grammatik $G = (N, T, P, S)$ und eine Bewertung φ definieren wir die erzeugte Sprache als*
$L(G, \varphi) = \{w \in L(G) : \varphi(w) = 1\}$.
Die Familie der Sprachen, die durch Grammatiken vom Typ $X \in \{CF, LIN, REG\}$ mit einer Bewertung über dem Monoid $\mathbf{M}$ erzeugbar sind, wird mit $\mathcal{L}(\mathrm{Val}', X, \mathbf{M})$ bezeichnet.

Ein Beispiel für eine Sprache aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val}', \mathrm{REG}, \mathbf{Z}_2)$ ist $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ mit der Bewertung $\varphi(a) = (1, 1)$, $\varphi(b) = (-1, 0)$, $\varphi(c) = (0, -1)$. Dagegen läßt sich die Sprache $L = \{a^k b^m c^n : k \geq m \geq n \geq 0\}$ nicht durch eine kontextfreie Grammatik mit bewertetem Alphabet (über einem beliebigen Monoid) erzeugen, da sowohl a (wegen $a \in L$) als auch b (wegen $ab \in L$) als auch c (wegen $abc \in L$) mit dem neutralen Element bewertet sein müßten. Folgender Zusammenhang besteht zwischen Grammatiken mit bewertetem Alphabet und Valenzgrammatiken:

Satz 2.1.8 *Ist $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ kommutativ, so gilt $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}', X, \mathbf{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}, X, \mathbf{M})$ für $X \in \{CF, LIN\}$.*
Für beliebige Monoide $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ gilt $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}', \mathrm{REG}, \mathbf{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{M})$.

Beweis. Es seien $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $\varphi : T^* \to M$ eine Bewertung. Die Abbildung φ wird auf $(N \cup T)^*$ fortgesetzt, indem $\varphi(A)$ für alle $A \in N$ auf 1 gesetzt wird. Wir wählen H als die **M**-Valenzgrammatik $H = (N, T, P', S)$ mit $P' = \{(A \to \alpha, \varphi(\alpha)) : A \to \alpha \in P\}$. Durch Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte zeigt man leicht, daß für kommutatives **M** ein Paar (α, r) genau dann in H ableitbar ist, wenn α in G ableitbar ist und $r = \varphi(\alpha)$ gilt. Im Falle regulärer Grammatiken kann auf die Kommutativität verzichtet werden. □

2.2 Beispiele

Beispiel 2.2.1 Die Sprache $L = \{a, b\}^* \setminus \{(a^k b)^{k+1} : k \geq 0\}$ wird von einem blinden one-turn Zählerautomaten erkannt. Ein Wort $w = a^{n_1} b a^{n_2} b \cdots a^{n_k} b \cdots a^{n_{k+1}} b$ ist genau dann in L, wenn eine der Bedingungen (a)-(d) zutrifft: (a) $n_j > n_{j+1}$ für ein $j < k$, (b) $n_j < n_{j+1}$ für ein $j < k$, (c) $n_1 > k$, (d) $n_1 < k$. Ein Wort besitzt Eigenschaft (a) genau dann, wenn es ein Teilwort der Form $a^{m+1} b a^m b$ besitzt. Folglich wird die Menge aller Wörter mit Eigenschaft (a) durch den one-turn Zählerautomaten $\mathcal{A} = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b\}, z_0, \delta, \{z_3\})$,

$$\begin{aligned}\delta \;=\; & \{(z_0, a, z_0, 0), (z_0, b, z_0, 0), (z_0, a, z_1, 1), (z_1, a, z_1, 1), (z_1, b, z_2, 0), \\ & (z_2, a, z_2, -1), (z_2, b, z_2, -1), (z_3, a, z_3, 0), (z_3, b, z_3, 0)\}\end{aligned}$$

akzeptiert. Analog konstruiert man one-turn Zählerautomaten $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}$, die alle Wörter mit den Eigenschaften (b) bzw. (c) bzw. (d) akzeptieren.

Beispiel 2.2.2 Es sei $L = \{a_1 a_2, b_1 b_2\}^*$ und **M** das syntaktische Monoid von L. Die **M**-Valenzgrammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned}P \;=\; & \{(S \to AB, [\lambda]_L), (A \to aA, [a_1]_L), (A \to bA, [b_1]_L), (A \to \lambda, [\lambda]_L), \\ & (B \to aB, [a_2]_L), (B \to bB, [b_2]_L), (B \to \lambda, [\lambda]_L)\}\end{aligned}$$

erzeugt die Sprache $\{ww : w \in \{a, b\}^*\}$.

Beispiel 2.2.3 Interessante Zusammenhänge gibt es zwischen Valenztransducern und dem Problem der ungefähren Übereinstimmung (*approximate matching*) zweier Wörter. Für zwei Wörter gleicher Länge $v = a_1 \ldots a_n$ und $w = b_1 \ldots b_n$ ist der *Hamming-Abstand* $d_H(v, w)$ definiert als $d_H(v, w) = \operatorname{card}\{k : a_k \neq b_k\}$.

Der *Levenshtejn-Abstand* d_L ist zwischen Wörtern beliebiger Länge über einem Alphabet X wie folgt definiert: Es seien $\# \notin X$ ein Blanksymbol und $h : (X \cup \{\#\})^* \to X^*$ der Homomorphismus mit $h(a) = a, a \in X$, $h(\#) = \lambda$. ($h^{-1}(v)$ ist also für $v \in X^*$ die Menge aller Wörter, die aus v durch Einfügen von Blanksymbolen hervorgehen.) Für $v, w \in X^*$ ist

$$d_L(v, w) = \min\{d_H(v', w') : v' \in h^{-1}(v), w' \in h^{-1}(w), |v'| = |w'|\}.$$

Der Levenshtejn-Abstand von v und w kann als die minimale Anzahl der Operationen ,,Löschen", ,,Einfügen", ,,Ersetzen eines Zeichens" angesehen werden, die man benötigt, um von v nach w zu gelangen. Deshalb wird er auch als *edit distance* bezeichnet.

Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante. Die Relation $R_{1/k} = \{(v,w) : d_L(v,w) \leq |v|/k\}$ ist eine rationale $\mathbf{Z}$-Valenztransduktion. Ein zugehöriger Valenztransducer ist $\mathcal{A} = (Z, X, X, z_0, \delta, Z)$ mit $Z = \{z_0, \ldots, z_k\}$ und

$$\begin{aligned}
\delta \;=\; & \{(z_i, a, a, z_{i+1}, 0) : a \in X, 0 \leq i \leq k-1\} \cup \\
& \{(z_i, a, b, z_{i+1}, 1) : a \in X, b \in X \cup \{\lambda\}, a \neq b, 0 \leq i \leq k-1\} \cup \\
& \{(z_i, \lambda, b, z_i, 1) : b \in X, 0 \leq i \leq k-1\} \cup \\
& \{(z_k, \lambda, \lambda, z_0, r) : r \in \{-1, 0\}\}.
\end{aligned}$$

Mittels der Zustände wird die Länge der Eingabe modulo k gezählt; für jede Nichtübereinstimmung von Eingabe und Ausgabe wird der Zähler inkrementiert; nach einem Block von k Eingabesymbolen darf der Zähler in einem λ-Übergang dekrementiert werden.

Die Konstruktion läßt sich auch auf die in der Molekularbiologie gebräuchlichen Ähnlichkeitsfunktionen mit affinen Gap-Kosten ausdehnen.

2.3 Ableitungsbäume für Valenzgrammatiken

Ein wichtiges Hilfsmittel aus der Theorie der kontextfreien Sprachen sind *Ableitungsbäume*, siehe z.B. [18, Abschnitt 4.3]. Dieser Begriff läßt sich auf Valenzgrammatiken verallgemeinern.

Definition 2.3.1 *Es seien $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ ein Monoid und $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie $\mathbf{M}$-Valenzgrammatik. Ein* Ableitungsbaum *in G ist ein gerichteter Baum $D = (V, E)$, der den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Jeder Knoten v von D besitzt eine* Markierung *$Label(v) \in N \cup T \cup \{\lambda\}$; jeder innere Knoten v besitzt außerdem eine* Bewertung *$Value(v) \in M$.*
2. *Die Söhne eines inneren Knotens sind von links nach rechts geordnet. Besitzt ein innerer Knoten die Markierung A und die Bewertung m und sind seine Söhne von links nach rechts mit $X_1, \ldots, X_k$ markiert, so gibt es in G die Valenzregel $(A \to X_1 \cdots X_k, m)$.*
3. *Wenn ein Knoten die Markierung λ hat, so ist er ein Blatt und der einzige Sohn seines Vaters.*

Die Ordnung der Söhne von links nach rechts und die Halbordnung E^* können auf eine Ordnung $\leq_{DFS}$ aller Knoten von V wie folgt erweitert werden. Es seien $v, w \in V$.

- *Aus* $(v, w) \in E^*$ *folgt* $v \leq_{DFS} w$.
- *Sind* v *und* w *Söhne des gleichen Vaters und ist* v *links von* w, *so ist* $v \leq_{DFS} w$.
- *Anderenfalls sei* u *der letzte gemeinsame Vorgänger von* v *und* w *und* v' *sowie* w' *die Söhne von* u *auf den Pfaden nach* v *sowie* w. *Ist* v' *links von* w', *so gilt* $v \leq_{DFS} w$.

Diese Ordnung entspricht der Reihenfolge bei der Tiefensuche (depth first search), wobei die Suche von einem Knoten von links nach rechts erfolgt. Deshalb bezeichnen wir diese Ordnung als DFS-Ordnung.

Die Markierungen der Blätter ergeben von links nach rechts (d.h. in der DFS-Ordnung) ein Wort aus $(N \cup T)^*$, *die* Front *des Ableitungsbaumes* $\mathit{Front}(D)$.

Wir nennen eine Ordnung $\leq$ *auf den inneren Knoten von* D zulässig, *wenn sie eine Verfeinerung von* E^* *darstellt (d.h., für alle inneren Knoten* v, w *gilt:* $(v, w) \in E^* \rightarrow v \leq w$). *Eine zulässige Ordnung ist z.B. die DFS-Ordnung. Die* Bewertung des Ableitungsbaumes *bezüglich einer zulässigen Ordnung* $\leq$ *der inneren Knoten ergibt sich als*

$$\begin{aligned} \mathit{Value}(D, \leq) &= \mathit{Value}(v_1) \circ \mathit{Value}(v_2) \circ \ldots \circ \mathit{Value}(v_j), \\ & \quad v_1, v_2, \ldots, v_j \text{ sind die inneren Knoten, geordnet bzgl. } \leq \end{aligned}$$

Satz 2.3.1 *Sei* $G = (N, T, P, S)$ *eine kontextfreie* $\mathbf{M}$*-Valenzgrammatik mit* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$. *Für* $A \in N, \alpha \in (N \cup T)^*, m \in M$ *gilt* $(A, 1) \Rightarrow_G^* (\alpha, m)$ *genau dann, wenn es einen Ableitungsbaum* $D = (V, E)$ *in* G *mit der Wurzelmarkierung* A, $\mathit{Front}(D) = \alpha$ *und eine zulässige Ordnung* $\leq$ *mit* $\mathit{Value}(D, \leq) = m$ *gibt.*

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte bzw. die Zahl der inneren Knoten eines Ableitungsbaumes geführt. Wegen der im allgemeinen nichtkommutierenden Valenzen können Unterableitungen nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Deshalb ist die Strategie des Beweises von [18, Satz 4.1] (im Induktionsschritt werden der erste Ableitungsschritt bzw. die Wurzel des Ableitungsbaumes sowie die Unterableitungen bzw. die Unterbäume betrachtet) nicht auf Valenzgrammatiken übertragbar; wir betrachten den letzten Ableitungsschritt bzw. ein Blatt des Ableitungsbaumes.

Für Ableitungen mit null Schritten und für Ableitungsbäume mit null inneren Knoten gilt die Äquivalenz offensichtlich.

Sei nun für alle $0 \leq i < n$ gezeigt, daß es genau dann eine Ableitung $(A, 1) \Rightarrow_G^i (\alpha, m)$ gibt, wenn ein Ableitungsbaum $D = (V, E)$ mit Wurzelmarkierung A, i inneren Knoten und einer zulässigen Ordnung $\leq$ existiert, so daß $\mathrm{Front}(D) = \alpha$, $\mathrm{Value}(D, \leq) = m$ gilt.

Wir betrachten eine Ableitung $(A, 1) \Rightarrow_G^n (\alpha, m)$. Nach der Definition der Ableitungsrelation gibt es $B \in N, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in (N \cup T)^*, m_1, m_2 \in M$ mit $\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2$, $m = m_1 \circ m_2$, $(A, 1) \Rightarrow_G^{n-1} (\alpha_1 B \alpha_2, m_1)$, $(B \rightarrow \beta, m_2) \in P$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Ableitungsbaum $D = (V, E)$ mit $(n-1)$ inneren Knoten mit einer zulässigen Ordnung $\leq$, so daß Front$(D) = \alpha_1 B \alpha_2$, Value$(D, \leq) = m_1$ erfüllt ist. Es sei b das in der DFS-Ordnung $(|\alpha_1| + 1)$-te Blatt von D. Es hat die Markierung B. Fügt man zu D noch Blätter als Söhne von b hinzu, deren Markierungen von links nach rechts β ergeben, und bekommt b die Bewertung m_2, so ist wegen $(B \to \beta, m_2) \in P$ der entstandene Baum $D' = (V', E')$ ein Ableitungsbaum mit Wurzelmarkierung A, n inneren Knoten und Front$(D') = \alpha$. Die auf den inneren Knoten von D' definierte Ordnungsrelation $\leq'$ mit $(v \leq w) \iff (v \leq' w)$ für alle inneren Knoten v, w in D und $v \leq' b$ für alle inneren Knoten v in D' ist zulässig. Es ist Value$(D', \leq') = m_1 \circ m_2$.

Umgekehrt sei $D = (V, E)$ ein Ableitungsbaum mit n inneren Knoten und einer zulässigen Ordnung $\leq$. Ist v der bezüglich $\leq$ maximale innere Knoten, so sind alle Söhne von v Blätter. Entfernt man aus D die Söhne von v und streicht die Bewertung von v, so ist der entstandene Baum D' ein Ableitungsbaum mit $n-1$ inneren Knoten (v ist jetzt ein Blatt). Die Einschränkung $\leq'$ von $\leq$ auf die inneren Knoten von D' ist eine zulässige Ordnung für D'. Ist B die Markierung von v und β die Markierung der Söhne von v von links nach rechts, so gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup T)^*$ mit Front$(D) = \alpha_1 \beta \alpha_2$, Front$(D') = \alpha_1 B \alpha_2$. Es gilt außerdem $m = m_1 \circ m_2$ für $m =$ Value$(D, \leq)$, $m_1 =$ Value$(D', \leq')$, $m_2 =$ Value(v) (in D). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Ableitung $(A, 1) \Rightarrow_G^{n-1} (\alpha_1 B \alpha_2, m_1)$. Nach der Definition eines Ableitungsbaumes gibt es eine Valenzregel $(B \to \beta, m_2)$. Damit existiert auch eine Ableitung $(A, 1) \Rightarrow_G^n (\alpha_1 \beta \alpha_2, m)$. □

Falls **M** kommutativ ist, hat die Ordnungsrelation keinen Einfluß auf die Bewertung des Ableitungsbaumes:

Satz 2.3.2 *Es seien* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ *ein kommutatives Monoid und* $G = (N, T, P, S)$ *eine kontextfreie* **M**-*Valenzgrammatik. Für* $A \in N, \alpha \in (N \cup T)^*, m \in M$ *gilt* $(A, 1) \Rightarrow_G^* (\alpha, m)$ *genau dann, wenn es einen Ableitungsbaum* $D = (V, E)$ *in* G *mit der Wurzelmarkierung* A*, Front*$(D) = \alpha$ *und Value*$(D, \leq_{DFS}) = m$ *gibt.*

Daraus folgt, daß man Induktionsbeweise über die Zahl der Ableitungsschritte für Valenzgrammatiken über kommutativen Monoiden ähnlich wie für kontextfreie Grammatiken führen kann:

Behauptung 2.3.3 *Es seien* $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ *ein kommutatives Monoid und* $G = (N, T, P, S)$ *eine kontextfreie* **M**-*Valenzgrammatik. Für* $n \geq 2$*,* $A \in N$*,* $\alpha \in (N \cup T)^*$*,* $r \in M$ *gilt* $(A, 1) \Rightarrow_G^n (\alpha, r)$ *genau dann, wenn es eine Regel* $(A \to I_1 \ldots I_m, r_0)$ *mit* $I_1, \ldots, I_m \in N \cup T$ *sowie* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (N \cup T)^*$*,* $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ *und* $r_1, \ldots, r_m \in M$ *derart gibt, daß* $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$*,* $n = n_1 + \ldots + n_m + 1$*,* $r = r_0 \circ r_1 \circ \ldots \circ r_m$ *und* $(I_j, 1) \Rightarrow_G^{n_j} (\alpha_j, r_j)$ *für* $j = 1, \ldots, m$ *gilt.*

Beweis. Es sei D ein der Ableitung $(A, 1) \Rightarrow_G^n (\alpha, r)$ entsprechender Ableitungsbaum. Die Wurzel von D sei w, die Söhne von w seien von links nach rechts $v_1, \ldots, v_k$. Es seien $D_1, \ldots, D_k$ die Unterbäume mit den Wurzeln $v_1, \ldots, v_k$. Die Front von D ergibt sich als Front$(D_1) \cdots$ Front(D_k), die Bewertung von D bzgl. der DFS-Ordnung ist

$$\text{Value}(D, \leq_{DFS}) = \text{Value}(w) \circ \text{Value}(D_1, \leq_{DFS}) \circ \cdots \circ \text{Value}(D_k, \leq_{DFS}).$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus dem vorigen Satz. □

2.4 Normalformen für Valenzgrammatiken

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß es – analog zu den Chomsky- und Greibach - Normalformen für kontextfreie Grammatiken – Normalformen für $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatiken gibt. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist der folgende

Satz 2.4.1 *Zu jeder $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik G gibt es äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatiken $G_i = (N_i, T, P_i, S_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei die Valenzregeln der einzelnen Grammatiken folgende Formen haben:*

- G_1: $(A \to BC, \vec{r})$ *bzw.* $(A \to a, \vec{0})$ *mit* $A, B, C \in N_1, a \in T, ||\vec{r}||_1 \leq 1$;
- G_2: $(A \to BC, \vec{0})$ *bzw.* $(A \to a, \vec{r})$ *mit* $A, B, C \in N_2, a \in T, ||\vec{r}||_1 \leq 1$;
- G_3: $(A \to a\alpha, \vec{r})$ *mit* $A \in N_3, \alpha \in N_3^* a \in T, ||\vec{r}||_1 \leq 1$.

Dabei und im folgenden verwenden wir die Konvention, daß A, B, C Nichtterminalsymbole, a ein Terminalsymbol und α ein Nichtterminalwort sind.

Eine Konsequenz aus Satz 2.4.1 ist, daß Normalformen auch für ungeordnete Vektorgrammatiken existieren und die Sprachfamilie $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+) = \mathcal{L}(\mathrm{UV}, \mathrm{CF})$ in der Komplexitätsklasse **LOGCFL** enthalten ist. In [36] zeigte SATTA das Komplexitätsresultat; die Frage nach Normalformen blieb jedoch offen.

Da der Beweis von Satz 2.4.1 recht aufwendig ist, wird er in eine Reihe von Behauptungen zerlegt. Die meisten Beweise beruhen auf dem in Behauptung 2.3.3 gezeigten Induktionsprinzip. Behauptung 2.4.2 ist ein Analogon zum bekannten Satz von Parikh, daß zu jeder kontextfreien Sprache eine Parikh-äquivalente reguläre Sprache existiert. In den Behauptungen 2.4.3–2.4.5 werden die Regeln der Form $A \to \lambda$ beseitigt; anschließend wird in den Behauptungen 2.4.6–2.4.10 gezeigt, daß auch Kettenregeln der Form $A \to B$ eliminiert werden können; schließlich werden in den Behauptungen 2.4.11–2.4.15 die Valenzvektoren normiert und die gewünschten Normalformen hergestellt.

Das Alphabet Σ_k sei für $k \geq 1$ im folgenden als $\Sigma_k = \{X_1, \ldots, X_k\} \cup \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ definiert. Zwischen $\mathbb{Z}^k$ und Σ_k definieren wir die Abbildungen:

$$\mathrm{word} : \mathbb{Z}^k \to \Sigma_k^* \quad \text{mit} \quad \mathrm{word}\left(\sum_{i=1}^{k} r_i \vec{e}_i\right) = C_1^{|r_1|} \cdots C_k^{|r_k|},\ C_i = \begin{cases} X_i, & \text{falls } r_i \geq 0 \\ Y_i, & \text{falls } r_i < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{vector} : \Sigma_k^* \to \mathbb{Z}^k \quad \text{mit} \quad \mathrm{vector}(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} (|\alpha|_{X_i} - |\alpha|_{Y_i}) \vec{e}_i$$

Die Abbildung vector wird im folgenden häufig auf Σ^* mit $\Sigma_k \subseteq \Sigma$ erweitert vermöge $\mathrm{vector}(\alpha) = \mathrm{vector}(\pi_{\Sigma_k}(\alpha))$ für $\alpha \in \Sigma^*$.

Behauptung 2.4.2 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik* $G = (N, T, P, S)$ *mit Kernregeln der Form* $A \to \alpha$, $A \in N, \alpha \in N^*$, *existiert eine reguläre* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik* H, *so daß* $(\lambda, \vec{r})$ *genau dann in* G *ableitbar ist, wenn* $(\lambda, \vec{r})$ *in* H *ableitbar ist. Dabei kann man* H *so wählen, daß* $(\lambda, \vec{r})$ *in genau* $||\vec{r}||_1 + 1$ *Schritten ableitbar ist.*

Beweis. Es sei G' die kontextfreie Grammatik $G' = (N, \Sigma_k, P', S)$ mit der Regelmenge $P' = \{A \to \alpha\text{word}(\vec{r}) : \alpha \in N^*, (A \to \alpha, \vec{r}) \in P\}$. Es gilt $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \vec{r})$ genau dann, wenn es ein $\beta \in \Sigma_k^*$ mit $A \Rightarrow_{G'}^* \beta$ und $\text{vector}(\beta) = \vec{r}$ gibt.

Als nächstes zeigen wir, daß die Relation

$$\tau \subseteq \Sigma_k^* \times \Sigma_k^* \text{ mit } \tau = \{(v, w) : \text{vector}(v) = \text{vector}(w)\}$$

eine rationale $\mathbf{Z}_k$-Valenztransduktion ist. Ein zugehöriger $\mathbf{Z}_k$-Valenztransducer ist $\mathcal{A} = (\{z\}, \Sigma_k, \Sigma_k, z, \delta, \{z\})$ mit

$$\delta = \{(z, a, b, z, \text{vector}(a) - \text{vector}(b)) : a, b \in \Sigma_k \cup \{\lambda\}\}.$$

Damit ist $L' := \tau(L(G')) = \{\beta \in \Sigma_k^* : (S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \text{vector}(\beta))\}$. Die Sprache $L'' = \{\text{word}(\vec{r}) : (S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \vec{r})\}$ ergibt sich als $L'' = L' \cap (\{X_1\}^* \cup \{Y_1\}^*) \cdots (\{X_k\}^* \cup \{Y_k\}^*)$.

Wegen der Abschlußeigenschaften der Familie der Valenzsprachen ist $L'' \in \mathcal{L}(\text{Val}, \text{CF}, \mathbf{Z}_k)$. Da die Parikh-Menge einer Sprache aus $\mathcal{L}(\text{Val}, \text{CF}, \mathbf{Z}_k)$ semilinear ist, siehe [9, Lemma 2.1.9], existiert eine reguläre Grammatik H' mit Regeln der Form $A \to aB, A \to \lambda$ mit $\Psi(L(H')) = \Psi(L'')$.

Nach den Konstruktionen gilt

$$\text{vector}(L(H')) = \text{vector}(L'') = \text{vector}(L') = \text{vector}(L(G')) = \{\vec{r} : (S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \vec{r})\}.$$

Dabei folgt die erste Gleichheit aus der Inklusion $(\Psi(\alpha) = \Psi(\beta) \to \text{vector}(\alpha) = \text{vector}(\beta))$.

Schließlich konstruieren wir aus H' die gesuchte reguläre Valenzgrammatik H, indem jede Regel $A \to aB$ in die Valenzregel $(A \to B, \text{vector}(a))$ umgeformt wird und die Regeln $A \to \lambda$ durch die Valenzregeln $(A \to \lambda, \vec{0})$ ersetzt werden. In H ist $(\lambda, \vec{r})$ genau dann ableitbar, wenn es ein Wort $\beta \in L(H')$ mit $\text{vector}(\beta) = \vec{r}$ gibt, d.h. genau dann, wenn $(\lambda, \vec{r})$ in G ableitbar ist.

Ferner läßt sich feststellen, daß $||\text{vector}(\beta)||_1 = |\beta|$ für $\beta \in L(H')$ gilt. Mithin läßt sich jedes in H ableitbare Paar $(\lambda, \vec{r})$ in genau $||\vec{r}||_1 + 1$ Schritten ableiten. □

Behauptung 2.4.3 *Zu jeder* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik existiert eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$ *- Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form* $A \to BC$, $A \to B$, $A \to a$, $A \to \lambda$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik. Zunächst führt man für jedes Terminalsymbol a ein neues Nichtterminal a' ein. Auf jeder rechten Regelseite wird a durch a' ersetzt; es werden die Valenzregeln $(a' \to a, \vec{0})$ für alle $a \in T$ hinzugefügt.

Anschließend werden für jede Valenzregel $p = (A \to B_1 \ldots B_m, \vec{r})$ mit $m \geq 3$ die neuen Nichtterminale $A_1^{(p)}, \ldots, A_{m-2}^{(p)}$ und die Valenzregeln

$$(A \to B_1 A_1^{(p)}, \vec{r}), \ldots, (A_i^{(p)} \to B_{i+1} A_{i+1}^{(p)}, \vec{0}),\ 1 \leq i \leq m-3,\ (A_{m-2}^{(p)} \to B_{m-1} B_m, \vec{0})$$

eingeführt. □

Behauptung 2.4.4 *Zu jeder kontextfreien $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik existiert eine äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik $G' = (N \cup N', T, P', S)$ mit $N' \cap N = \emptyset$, wobei die Kernregeln von P' eine der folgenden Formen besitzen:*

$$A \to BC, A \to B'C, A \to BC', A' \to B'C', A \to B, A' \to B', A \to a, A' \to \lambda$$

mit $A, B, C \in N, A', B', C' \in N', a \in T$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Regeln wie in Behauptung 2.4.3. Wir konstruieren jetzt die Valenzgrammatik $G' = (N \cup N', T, P', S)$. Dabei ist N' eine disjunkte Kopie von N (die Kopie von $A \in N$ wird mit A' bezeichnet), und die Regelmenge ergibt sich als

$$\begin{aligned} P' \;=\; & \{(A \to BC, \vec{r}), (A \to B'C, \vec{r}), (A \to BC', \vec{r}), (A' \to B'C', \vec{r}) : (A \to BC, \vec{r}) \in P\} \cup \\ & \{(A \to B, \vec{r}), (A' \to B', \vec{r}) : (A \to B, \vec{r}) \in P\} \cup \\ & \{(A \to a, \vec{r}) : (A \to a, \vec{r}) \in P\} \cup \{(A' \to \lambda, \vec{r}) : (A \to \lambda, \vec{r}) \in P\} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte entsprechend Behauptung 2.3.3 zeigt man leicht:

1. Das einzige aus $A' \in N'$ ableitbare Terminalwort ist λ; es gilt $(A', \vec{0}) \Rightarrow_{G'}^* (\lambda, \vec{r})$ genau dann, wenn $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \vec{r})$ gilt.
2. Für $A \in N, w \in T^*, \vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ gilt $(A, \vec{0}) \Rightarrow_{G'}^* (w, \vec{r})$ genau dann, wenn $w \neq \lambda$ und $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$. □

Behauptung 2.4.5 *Zu jeder kontextfreien $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC$, $A \to B$, $A \to a$.*

Beweis. Es sei $G = (N \cup N', T, P', S)$ eine wie in Behauptung 2.4.4 konstruierte Valenzgrammatik. Wir zerlegen P' als $P' = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, wobei die Kernregeln von P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 die Form $A \to BC, A \to B, A \to a$ bzw. $A \to B'C, A \to BC'$ bzw. $A' \to B'C', A' \to B', A' \to \lambda$ mit $A, B, C \in N, A', B', C' \in N', a \in T$ besitzen.

Für alle $A' \in N'$ kann man gemäß Behauptung 2.4.2 eine reguläre Valenzgrammatik $H_{A'} = (N_{A'}, T, P_{A'}, S_{A'})$ konstruieren, so daß das Paar $(\lambda, \vec{r})$ genau dann in $H_{A'}$ ableitbar ist, wenn es in G eine Ableitung $(A', \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\lambda, \vec{r})$ gibt. Man kann o.B.d.A. verlangen, daß $N_{A'}$ und $N_{B'}$ für $A' \neq B'$ disjunkt sind.

Es sei $H' = (N_{H'}, T, P_{H'}, S)$ die Valenzgrammatik mit $N_{H'} = N \cup \bigcup_{A' \in N'} N_{A'}$ und

$$\begin{aligned} P_{H'} &= P_1 \cup \bigcup_{B' \in N'} P_{B'} \cup \\ &\quad \{(A \to S_{B'}C, \vec{r}) : (A \to B'C, \vec{r}) \in P_2\} \cup \\ &\quad \{(A \to S_{C'}B, \vec{r}) : (A \to BC', \vec{r}) \in P_2\} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über die Anzahl der Ableitungsschritte zeigt man leicht

$$(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r}) \iff (A, \vec{0}) \Rightarrow_{H'}^* (w, \vec{r}) \text{ für } A \in N, w \in T^+, \vec{r} \in \mathbb{Z}^k$$

und folglich $L(H') = L(G)$.

Schließlich konstruieren wir die Valenzgrammatik $H = (N_H, T, P_H, S)$ mit $N_H = N \cup \bigcup_{A' \in N'} (N_{A'} \times N)$ und den folgenden Valenzregeln:

$$\begin{aligned} P_H &= P_1 \cup \{(A \to (S_{B'}, C), \vec{r}) : (A \to S_{B'}C, \vec{r}) \in P_{H'}\} \cup \\ &\quad \bigcup_{C \in N} \bigcup_{B' \in N'} \{((X, C) \to (Y, C), \vec{r}) : (X \to Y, \vec{r}) \in P_{B'}\} \cup \\ &\quad \bigcup_{C \in N} \bigcup_{B' \in N'} \{((X, C) \to C, \vec{r}) : (X \to \lambda, \vec{r}) \in P_{B'}\} \end{aligned}$$

Wie man leicht durch Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte sieht, existiert für $Y \in N_{B'}$, $B' \in N'$, $C \in N$, $w \in T^+$, $\vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ eine Ableitung $((Y, C), \vec{0}) \Rightarrow_H^* (w, \vec{r})$ genau dann, wenn es Ableitungen $(Y, \vec{0}) \Rightarrow_{G_{B'}}^* (C, \vec{r}_1)$ und $(C, \vec{r}_1) \Rightarrow_{H'}^* (w, \vec{r})$ gibt. Daraus folgt ebenfalls per Induktion, daß eine Ableitung $(A, \vec{0}) \Rightarrow_H^* (w, \vec{r})$ genau dann existiert, wenn es auch in H' eine solche Ableitung gibt. Folglich ist H äquivalent zu H' und damit zu G.

□

Definition 2.4.1 *Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a$. Ein* Loop *ist eine Ableitung $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (A, \vec{r})$ mit $A \in N$. Für $A \in N$ bzw. für $M \subseteq N$ definieren wir*

$$\begin{aligned} \mathit{Loop}(A) &= \{\vec{r} : (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (A, \vec{r})\} \\ \mathit{Loop}(M) &= \{\vec{r} : \vec{r} = \sum_{A \in M} \vec{r}_A, \vec{r}_A \in \mathit{Loop}(A) \text{ für } A \in M\} \end{aligned}$$

In einem Ableitungsbaum in G heißt ein Weg von s nach t Loop-Pfad*, falls s und t die gleiche Markierung haben und der Baum zwischen s und t ein Weg ist. Eine Ableitung heißt* loop-frei*, falls der zugehörige Ableitungsbaum keinen Loop-Pfad enthält.*

Man beachte, daß Loop(M) ein Untermonoid von $\mathbf{Z}_k$ ist, d.h., es gilt $\vec{0} \in$ Loop(M), und es besteht Abschluß unter Vektoraddition.

Behauptung 2.4.6 *Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a$. Dann gilt $(S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$ genau dann, wenn es eine Menge $M \subseteq N$ sowie $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ gibt mit:*

- *Es existiert in G eine loop-freie Ableitung D von $(w, \vec{r_1})$ mit $M \subseteq N(D)$, wobei $N(D)$ die Menge der in D auftretenden Nichtterminale ist.*
- *$\vec{r_2} \in Loop(M)$.*
- *$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$.*

Beweis. Es sei D eine loop-freie Ableitung von $(w, \vec{r_1})$ mit $M \subseteq N(D)$, und $\vec{r_2} = \sum_{A \in M} \vec{r_A}$ mit $\vec{r_A} \in$ Loop(A) sei ein Vektor aus Loop(M). Im zu D gehörigen Ableitungsbaum existiert für alle $A \in M$ ein Knoten mit der Markierung A. Ersetzt man für alle $A \in M$ einen Knoten mit der Markierung A durch einen Loop-Pfad mit der Bewertung $\vec{r_A}$, so entsteht ein Ableitungsbaum mit Front w und Bewertung $\vec{r_1} + \vec{r_2}$.

Sei andererseits eine Ableitung von $(w, \vec{r})$ gegeben und sei T_0 ein zugehöriger Ableitungsbaum. Wir konstruieren eine (endliche) Folge von Ableitungsbäumen $T_0, T_1, \ldots, T_m$. Enthält der Baum $T_i, i \geq 0$, keinen Loop-Pfad, so ist $m = i$. Anderenfalls sei s_i der bezüglich der DFS-Ordnung minimale Knoten in T_i, der Startknoten eines Loop-Pfades in T_i ist. Es sei t_i der Endknoten des längsten in s_i startenden Loop-Pfades. Den Baum T_{i+1} erhält man durch Entfernen des Loop-Pfades von s_i nach t_i, d.h., der Unterbaum mit der Wurzel s_i wird entfernt und der Unterbaum mit der Wurzel t_i wird an der Stelle von s_i eingefügt.

Da s_i und t_i die gleiche Markierung A_i besitzen, ist mit T_i auch T_{i+1} ein Ableitungsbaum. Weil aus T_i lediglich ein Loop-Pfad entfernt wurde, ist die Front von T_i gleich der Front von T_{i+1}; die Bewertung $\vec{v}_{i+1}$ von T_{i+1} ergibt sich als Differenz aus der Bewertung $\vec{v_i}$ von T_i und der Bewertung $\vec{l_i}$ des Pfades von s_i nach t_i.

Per Induktion ergibt sich Front(T_0) = Front(T_m) und $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$ mit $\vec{r_1} = \vec{v}_m$ und $\vec{r_2} = \sum_{i=0}^{m-1} \vec{l_i}$. Es gilt $\vec{r_2} \in$ Loop(M) mit $M = \{A_i : 0 \leq i \leq m-1\}$.

Schließlich ist durch die Wahl von s_i und t_i gewährleistet, daß t_i in der DFS-Ordnung kleiner als s_{i+1} ist und damit in den Bäumen $T_{i+1}, \ldots, T_m$ enthalten ist. Folglich ist jedes A_i mit $0 \leq i \leq m-1$ als Markierung eines Knoten von T_m enthalten, und damit folgt $M \subseteq N(T_m)$. □

Behauptung 2.4.7 *Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a$. Für alle $M \subseteq N$ gibt es eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik H_M mit Kernregeln der Form $A \to BC$, $A \to a$, so daß $(w, \vec{r})$ genau dann in H_M abgeleitet werden kann, wenn es in G eine loop-freie Ableitung D mit $M \subseteq N(D)$ für $(w, \vec{r})$ gibt.*

Beweis. Zunächst konstruieren wir eine Menge Q, deren Elemente aus einer Valenzregel und einer Teilmenge von N bestehen. Für jede loop-freie Ableitung

$$D = (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (A', \vec{r'}) \Rightarrow_G (\alpha, \vec{r}) \text{ mit } A, A' \in N,\ \alpha \in T \cup NN$$

nehmen wir $((A \to \alpha, \vec{r}), N(D))$ in Q auf.

Offensichtlich ist Q endlich. Es sei jetzt $N' = N \times \mathcal{P}(N)$ und P' die wie folgt erhaltene Menge von Valenzregeln: Für $((A \to BC, \vec{r}), M_0) \in Q$ und für alle $M \subseteq N$ enthält P' alle Valenzregeln $((A, M) \to (B, M_1)(C, M_2), \vec{r})$ mit $M \subseteq M_0 \cup M_1 \cup M_2$. Für jedes Paar $((A \to a, \vec{r}), M_0) \in Q$ enthält P' alle Valenzregeln $((A, M) \to a, \vec{r})$ mit $M \subseteq M_0$. Die gesuchte Valenzgrammatik H_M ergibt sich für $M \subseteq N$ als $H_M = (N', T, P', (S, M))$.

Durch vollständige Induktion entsprechend Behauptung 2.3.3 zeigt man, daß für $w \in T^*$ mit $|w| \geq 2$ genau dann eine loop-freie Ableitung $D : (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$ mit $M \subseteq N(D)$ existiert, wenn es loop-freie Ableitungen

$$D_0 : (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (BC, \vec{r}_0),\ \ D_1 : (B, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w_1, \vec{r}_1),\ \ D_2 : (C, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w_2, \vec{r}_2)$$

mit $w = w_1 w_2, \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, $M \subseteq N(D_0) \cup N(D_1) \cup N(D_2)$ gibt.

Mit Hilfe dieses Induktionsprinzip zeigt man, daß genau dann eine loop-freie Ableitung $D : (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$ mit $M \subseteq N(D)$ existiert, wenn es in H_M eine Ableitung $((A, M), \vec{0}) \Rightarrow_{H_M}^* (w, \vec{r})$ gibt. $\square$

Behauptung 2.4.8 *Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a$. Für alle $M \subseteq N$ gibt es eine reguläre $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik $K_M = (N_M, T, P_M, S_M)$ mit $(S_M, \vec{0}) \Rightarrow_{K_M}^* (\lambda, \vec{r}) \iff \vec{r} \in Loop(M)$. Ferner ist $(\lambda, \vec{r})$ in $||\vec{r}||_1 + 1$ Schritten in K_M ableitbar, falls $\vec{r} \in Loop(M)$.*

Beweis. Es sei P_1 die Menge aller Valenzregeln aus P mit einer Kernregel der Form $A \to B$. Für ein Nichtterminal A sei $G_A = (N, T, P_A, A)$ mit $P_A = P_1 \cup \{(A \to \lambda, \vec{0})\}$. Offensichtlich gilt $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (A, \vec{r})$ genau dann, wenn $(A, \vec{0}) \Rightarrow_{G_A}^* (\lambda, \vec{r})$. Durch Umbenennung erhalten wir die regulären $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatiken $G'_A = (N'_A, T, P'_A, S'_A)$ mit $(A, \vec{0}) \Rightarrow_{G_A}^* (\lambda, \vec{r})$ genau dann, wenn $(S'_A, \vec{0}) \Rightarrow_{G'_A}^* (\lambda, \vec{r})$ und $N'_A \cap N'_B = \emptyset$ für $A \neq B$.

Für $M = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq N$ erhalten wir $G_M = (N_M, T, P_M, S_M)$ mit $N_M = \bigcup_{A \in M} N'_A$, $P_M = \bigcup_{A \in M} P'_A \cup \{(S_M \to S'_{A_1} \cdots S'_{A_m}, \vec{0})\}$. Offensichtlich ist $(\lambda, \vec{r})$ genau dann in G_M ableitbar, wenn es für $i = 1, \ldots, m$ Vektoren $\vec{r}_i$ gibt, so daß $(\lambda, \vec{r}_i)$ in G'_{A_i} erzeugbar ist und $\vec{r} = \sum_{i=1}^{m} \vec{r}_i$ gilt, also wenn $\vec{r} \in \mathrm{Loop}(M)$ erfüllt ist.

Die gesuchte reguläre $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik K_M konstruieren wir gemäß Behauptung 2.4.2 aus G_M. $\square$

Behauptung 2.4.9 *Es seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$ eine kontextfreie $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC$, $A \to a$ und $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ eine reguläre $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to B, A \to \lambda$.*

Für $c \in \mathbb{N}$ gibt es eine kontextfreie $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik $G = (N, T, P, S)$ mit Kernregeln der Form $A \to BC$, $A \to a$, so daß $(S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$ für $w \in T^+$ und $\vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ genau dann gilt, wenn es $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{Z}^k$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$,
2. $(w, \vec{r}_1)$ *ist in* G_1 *ableitbar.*
3. $(\lambda, \vec{r}_2)$ *ist in höchstens* $c|w|$ *Schritten in* G_2 *ableitbar.*

Beweis. G wird durch eine Tripelkonstruktion gefunden. Die Menge der Nichtterminale N ergibt sich als $N = (N_2 \cup \{\lambda\}) \times (N_1 \cup T) \times (N_2 \cup \{\lambda\})$, das Startsymbol ist $S = (S_2, S_1, \lambda)$. Wir konstruieren die folgenden Regelmengen Q_1, Q_2, Q_3:

- Für jede Regel $(A_1 \to B_1 C_1, \vec{r}_1) \in P_1$ mit $A_1, B_1, C_1 \in N_1$ enthält Q_1 alle Regeln $((A_2, A_1, C_2) \to (A_2, B_1, B_2)(B_2, C_1, C_2), \vec{r}_1)$ mit $A_2, B_2, C_2 \in N_2 \cup \{\lambda\}$.
- Für jede Regel $(A_1 \to a, \vec{r}_1) \in P_1$ mit $A_1 \in N_1, a \in T$ enthält Q_2 alle Regeln $((A_2, A_1, C_2) \to (A_2, a, C_2), \vec{r}_1)$ mit $A_2, C_2 \in N_2 \cup \{\lambda\}$.
- Für jede Ableitung $(A_2 \Rightarrow_{G_2}^{\leq c} B_2, \vec{r}_2)$ in G_2 mit $A_2, B_2 \in N_2 \cup \{\lambda\}$ enthält Q_3 alle Regeln $((A_2, a, B_2) \to a, \vec{r}_2)$ mit $a \in T$.

Es sei zunächst $G' = (N, T, P', S)$ mit $P' = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$. Da durch die Regeln von Q_1 und Q_2 nur Nichtterminale und durch Regeln von Q_3 nur Terminale erzeugt werden, kann eine Ableitung in G' o.B.d.A. so erfolgen, daß zuerst mittels der Regeln aus Q_1 und Q_2 ein Paar $(\alpha, \vec{r}_1)$ mit $\alpha \in ((N_2 \cup \{\lambda\}) \times T \times (N_2 \cup \{\lambda\}))^*$ und anschließend aus $(\alpha, \vec{r}_1)$ mit Hilfe der Regeln aus Q_3 ein Paar $(w, \vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ mit $w \in T^*$ erzeugt wird. Durch vollständige Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte entsprechend Behauptung 2.3.3 zeigt man leicht:

- Aus $((A, A_1, B), \vec{0})$ mit $A, B \in N_2 \cup \{\lambda\}, A_1 \in N_1$ ist in G' das Paar
  $$((C_1, a_1, D_1)(C_2, a_2, D_2) \cdots (C_k, a_k, D_k), \vec{r}) \text{ mit } C_i, D_i \in N_2 \cup \{\lambda\}, a_i \in T,\ 1 \leq i \leq k$$
  genau dann ableitbar, wenn $(a_1 a_2 \cdots a_k, \vec{r})$ in G_1 aus A_1 ableitbar ist und $C_1 = A, D_k = B, C_{j+1} = D_j$ für $1 \leq j \leq k-1$ gilt.
- Aus $((D_0, a_1, D_1)(D_1, a_2, D_2) \cdots (D_{k-1}, a_k, D_k), \vec{0})$ mit $D_0, D_i \in N_2 \cup \{\lambda\}, a_i \in T$, $1 \leq i \leq k$ ist das Paar $(w, \vec{r})$ mit $w \in T^*$ genau dann ableitbar, wenn $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ gilt und $(D_k, \vec{r})$ in G_2 aus $(D_0, \vec{0})$ in höchstens $c \cdot k$ Schritten ableitbar ist.

Damit erfüllt G' die in der Behauptung genannten Forderungen an G bezüglich des Ableitungsverhaltens. Die Valenzgrammatik G mit der geforderten Form der Kernregeln ist $G = (N, T, P, S)$ mit $P = Q_0 \cup Q_1$. Dabei erhält man die Regelmenge Q_0, indem für jedes Paar von Regeln $((A_2, A_1, B_2) \to (A_2, a, B_2)\vec{r}_1) \in Q_2$, $((A_2, a, B_2) \to a, \vec{r}_2) \in Q_3$ die Regel $((A_2, A_1, B_2) \to a, \vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ eingeführt wird. $\square$

Behauptung 2.4.10 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form* $A \to BC, A \to a$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a$. Für $M \subseteq N$ seien H_M und K_M die gemäß den Behauptungen 2.4.7, 2.4.8 konstruierten Valenzgrammatiken.

Es sei c_M das Maximum über die Normen der in H_M auftretenden Valenzvektoren. Nach Behauptung 2.4.9 können wir eine Grammatik G_M konstruieren, in der $(w, \vec{0})$ mit $w \in T^+$ genau dann ableitbar ist, wenn es ein $\vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ gibt, so daß $(w, \vec{r})$ in H_M ableitbar ist und $(\lambda, -\vec{r})$ in K_M in höchstens $2c_M|w|$ Schritten ableitbar ist.

Wegen der Form der Kernregeln von H_M ist jedes in H_M ableitbare Paar $(w, \vec{r})$ in genau $2|w|-1$ Schritten ableitbar. Die Norm von $\vec{r}$ läßt sich deshalb durch $||\vec{r}||_1 \leq c_M(2|w|-1) \leq 2c_M|w| - 1$ abschätzen. Sind $(w, \vec{r})$ in H_M und $(\lambda, -\vec{r})$ in K_M ableitbar, so ist $(\lambda, -\vec{r})$ in höchstens $2c_M|w|$ Schritten in K_M ableitbar.

Aufgrund der Konstruktionen von H_M, K_M und G_M ist damit gezeigt, daß $w \in L(G_M)$ genau dann gilt, wenn es eine loop-freie Ableitung D von $(w, \vec{r})$ mit $M \subseteq N(D)$ und $-\vec{r} \in \mathrm{Loop}(M)$ gibt. Nach Behauptung 2.4.6 ist $L(G) = \bigcup_{M \subseteq N} L(G_M)$.

Schließlich konstruiert man aus den Grammatiken G_M, $M \subseteq N$, eine Valenzgrammatik H mit Kernregeln der Form $A \to BC, A \to a$ und $L(H) = \bigcup_{M \subseteq N} L(G_M) = L(G)$. □

Behauptung 2.4.11 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form* $(A \to BC, \vec{r}), (A \to a, \vec{0})$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Kernregeln der Form $A \to BC$ in P_1, $A \to a$ in P_2 und $P = P_1 \cup P_2$. Für jedes $a \in T$ führen wir ein neues Nichtterminalsymbol a' ein und konstruieren $G' = (N', T, P', S)$ mit $N' = N \cup \{a' : a \in T\}$ und

$$\begin{aligned}
P' \quad = \quad & P_1 \cup \{(a' \to a, \vec{0})\} \cup \\
& \{(A \to a'C, \vec{r}_1 + \vec{r}_2) : (A \to BC, \vec{r}_1), (B \to a, \vec{r}_2) \in P\} \cup \\
& \{(A \to Ba', \vec{r}_1 + \vec{r}_2) : (A \to BC, \vec{r}_1), (C \to a, \vec{r}_2) \in P\} \cup \\
& \{(A \to a'b', \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) : (A \to BC, \vec{r}_1), (B \to a, \vec{r}_2), (C \to b, \vec{r}_3) \in P\}
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte zeigt man, daß $(w, \vec{r})$ mit $w \in T^+, |w| \geq 2$ genau dann in G ableitbar ist, wenn es in G' abgeleitet werden kann. Durch Hinzufügen der in G enthaltenen Regeln $(S \to a, \vec{0})$ erhält man eine zu G äquivalente Valenzgrammatik. □

Behauptung 2.4.12 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form* $(A \to BC, \vec{r})$, $\vec{r} = r\vec{e}_j$ *mit* $j \in \{1, \ldots, k\}$, $r \in \mathbb{Z}$ *bzw.* $(A \to a, \vec{0})$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine Valenzgrammatik mit Regeln wie in Behauptung 2.4.11. Wir konstruieren zunächst $G_1 = (N, T, P_1, S)$ mit

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & \{(A \to a, \vec{0}) : (A \to a, \vec{0}) \in P\} \cup \\ & & \{(A \to \alpha, \vec{r}) : \alpha \in N^*, k+1 \leq |\alpha| \leq k(k+1), (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\alpha, \vec{r})\} \cup \\ & & \{(S \to \alpha, \vec{0}) : \alpha \in N^*, 2 \leq |\alpha| \leq k, (S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\alpha, \vec{0})\} \end{array}$$

Da einer Regel in P_1 eine Ableitung in G entspricht, ist $L(G_1) \subseteq L(G)$. Wir zeigen jetzt $L(G) \subseteq L(G_1)$. Es reicht zu zeigen, daß aus $(S, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\alpha, \vec{0})$ mit $\alpha \in N^*$ stets $(S, \vec{0}) \Rightarrow_{G_1}^* (\alpha, \vec{0})$ folgt. Für $|\alpha| \leq k$ gilt diese Beziehung nach Definition von G_1. Für $|\alpha| \geq k+1$ beweisen wir durch Induktion über die Länge von α:

$$(A, \vec{0}) \Rightarrow_{G_1}^* (\alpha, \vec{r}) \iff (A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\alpha, \vec{r}) \text{ für } \alpha \in N^*, |\alpha| \geq k+1, \vec{r} \in \mathbb{Z}^k \qquad (*)$$

Für $k+1 \leq |\alpha| \leq k(k+1)$ gilt (*) nach Konstruktion von G_1. Sei nun für alle m mit $k(k+1) \leq m < n$ die Gültigkeit von (*) gezeigt.

Ist $(\alpha, \vec{r})$ mit $|\alpha| = n$ in G aus $(A, \vec{0})$ ableitbar, so existieren ein $\vec{r}_0 \in \mathbb{Z}^k$, $B_i \in N$, $\beta_i \in N^+$, $\vec{r}_i \in \mathbb{Z}^k$, $1 \leq i \leq k+1$, mit

$$(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (B_1 \cdots B_{k+1}, \vec{r}_0),\ (B_i, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\beta_i, \vec{r}_i),\ 1 \leq i \leq k+1,\ \alpha = \beta_1 \cdots \beta_{k+1},\ \vec{r} = \sum_{i=0}^{k+1} \vec{r}_i.$$

Wir setzen jetzt

$$(\gamma_i, \vec{s}_i) = \begin{cases} (\beta_i, \vec{r}_i), & \text{falls } |\beta_i| \leq k \\ (B_i, \vec{0}), & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{sowie } \gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_{k+1},\ \vec{s} = \vec{r}_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \vec{s}_i.$$

Es gilt $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (\gamma, \vec{s})$ und, wegen $k+1 \leq |\gamma| \leq k(k+1)$, $(A, \vec{0}) \Rightarrow_{G_1} (\gamma, \vec{s})$. Außerdem ist $(\beta_i, \vec{r}_i)$ in G_1 aus $(\gamma_i, \vec{s}_i)$ ableitbar. Für $|\beta_i| \leq k$ ist dies trivial; für $|\beta_i| \geq k+1$ folgt dies aus der Induktionsannahme (denn es gilt $|\beta_i| < n$). Damit ist $L(G) \subseteq L(G_1)$ und folglich $L(G) = L(G_1)$ gezeigt.

Als nächstes konstruieren wir die gesuchte $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik G_2 mit Valenzregeln der Form $(A \to BC, \vec{r})$, $\vec{r} = r\vec{e}_j$, $r \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq k$, und $(A \to a, \vec{0})$. Dazu werden für jede Valenzregel $(A_1 \to B_1 \cdots B_m, \sum_{i=1}^{k} r_i \vec{e}_i)$ in P_1 die neuen Nichtterminale $A_2, \ldots, A_{m-1}$ sowie die Valenzregeln $(A_i \to B_i A_{i+1}, \vec{q}_i)$, $1 \leq i \leq m-2$, $(A_{m-1} \to B_{m-1} B_m, \vec{q}_{m-1})$ eingeführt, wobei $\vec{q}_i = r_i \vec{e}_i$ für $1 \leq i \leq k$ und $\vec{q}_i = 0$ für $k+1 \leq i \leq m$ gilt. Analog wird jede Regel $(S \to B_1 \cdots B_m, \vec{0})$, $2 \leq m \leq k$, durch Valenzregeln der Form $(A \to BC, \vec{0})$ ersetzt. □

Behauptung 2.4.13 *Zu jeder kontextfreien $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form $(A \to BC, \vec{r})$, $||\vec{r}||_1 \leq 1$, und $(A \to a, \vec{0})$.*

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine Valenzgrammatik über $\mathbf{Z}_k$ mit Valenzregeln der in Behauptung 2.4.12 genannten Form. Es sei c das Maximum über die Normen der Valenzvektoren von G, und $X = \{0, \ldots, c-1\}^k$ sei die Menge aller k-dimensionalen Vektoren mit Komponenten aus $\{0, \ldots, c-1\}$.

Wir konstruieren $H = (N', T, P', S')$ mit $N' = X \times N \times X$, $S' = (\vec{0}, S, \vec{0})$. P' enthält für jede Regel $(A \to BC, \vec{r}) \in P$ und für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$ die Regel

$$\Big((\vec{x}, A, \vec{z}) \to (\vec{x'}, B, \vec{y})(\vec{y}, C, \vec{z}), \vec{r'}\Big) \text{ mit } \vec{x'} = (\vec{x} + \vec{r}) \operatorname{rest} c,\ \vec{r'} = (\vec{x} + \vec{r}) \operatorname{div} c.$$

Wegen $\vec{r} = r\vec{e_i}$ und $-c \le r \le c$ hat $\vec{r'}$ die Form $\vec{r'} = r'\vec{e_i}, -1 \le r' \le 1$. Für jede Regel $(A \to a, \vec{0}) \in P$ und alle $\vec{x} \in X$ enthält P' die Regel $((\vec{x}, A, \vec{x}) \to a, \vec{0})$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\vec{r} = c\vec{r'} + (\vec{x'} - \vec{x})$.

H besitzt offenbar die in der Behauptung angegebene Form. Um die Äquivalenz von G und H zu beweisen, zeigen wir die folgenden Aussagen:

1. Gibt es für $A \in N, w \in T^+, m \in \mathbb{N}, \vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ eine Ableitung $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^m (w, \vec{r})$ in G, so existiert für alle $\vec{x}, \vec{z} \in X$ mit $(\vec{z} - \vec{x}) \equiv \vec{r} (\operatorname{mod} c)$ eine Ableitung $((\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H^m (w, \vec{r'})$ mit $c\vec{r'} + (\vec{z} - \vec{x}) = \vec{r}$.

2. Gibt es für $A \in N, w \in T^+, m \in \mathbb{N}, \vec{r'} \in \mathbb{Z}^k, \vec{x}, \vec{z} \in X$ eine Ableitung $(\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H^m (w, \vec{r'})$ in H, so existiert in G eine Ableitung $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^m (w, \vec{r})$ mit $c\vec{r'} + (\vec{z} - \vec{x}) = \vec{r}$.

Aus 1. und 2. folgt speziell $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{0}) \iff ((\vec{0}, A, \vec{0}), \vec{0}) \Rightarrow_H^* (w, \vec{0})$ und damit $L(G) = L(H)$. Wir zeigen die Gültigkeit von 1. und 2. durch vollständige Induktion über die Zahl der Ableitungsschritte m.

Für $m = 1$ gelten die Aussagen wegen der Definition von H.

Seien nun die Aussagen 1. und 2. für Ableitungen der Länge $i < m$ gezeigt und gelte $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^m (w, \vec{r})$. Dann gibt es Ableitungen

$$(A, \vec{0}) \Rightarrow_G (BC, \vec{r}_0),\ (B, \vec{0}) \Rightarrow_G^i (w_1, \vec{r}_1),\ (C, \vec{0}) \Rightarrow_G^j (w_2, \vec{r}_2)$$

mit $w = w_1 w_2, \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2, m = i + j + 1$.

Es seien $\vec{x}, \vec{z}$ Vektoren aus X mit $(\vec{z} - \vec{x}) \operatorname{rest} c = \vec{r} \operatorname{rest} c$. In H gibt es die Ableitung

$$((\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H ((\vec{x'}, B, \vec{y})(\vec{y}, C, \vec{z}), \vec{r'}_0) \text{ mit } \vec{x'} = (\vec{x} + \vec{r}_0) \operatorname{rest} c,\ \vec{r'}_0 = (\vec{x} + \vec{r}_0) \operatorname{div} c$$

für beliebige $\vec{y} \in X$, insbesondere für $\vec{y} = (\vec{x'} + \vec{r}_1) \operatorname{rest} c$. Wegen der Wahl von $\vec{x}, \vec{x'}, \vec{y}, \vec{z}$ gilt

$$\begin{array}{rcll} (\vec{z} - \vec{x}) & \equiv & \vec{r} & (\operatorname{mod} c) \\ & \equiv & \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 & (\operatorname{mod} c) \\ (\vec{z} - \vec{x}) & \equiv & (\vec{z} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{x'}) + (\vec{x'} - \vec{x}) & (\operatorname{mod} c) \\ & \equiv & (\vec{z} - \vec{y}) + \vec{r}_1 + \vec{r}_0 & (\operatorname{mod} c) \end{array}$$

Folglich ist $(\vec{z}-\vec{y}) \equiv \vec{r}_2 \pmod c$. Nach Induktionsannahme gibt es in H die Ableitungen

$$\begin{aligned} ((\vec{x'}, B, \vec{y}), \vec{0}) &\Rightarrow_H^i (w_1, \vec{r'}_1) \quad \text{mit} \quad c\vec{r'}_1 + (\vec{y} - \vec{x'}) = \vec{r}_1, \\ ((\vec{y}, C, \vec{z}), \vec{0}) &\Rightarrow_H^j (w_2, \vec{r'}_2) \quad \text{mit} \quad c\vec{r'}_2 + (\vec{z} - \vec{y}) = \vec{r}_2. \end{aligned}$$

Damit gibt es in H die Ableitung $((\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H^m (w, \vec{r'})$ mit $\vec{r'} = \vec{r'}_0 + \vec{r'}_1 + \vec{r'}_2$. Wegen $\vec{r}_0 = c\vec{r'}_0 + (\vec{x'} - \vec{x})$ ergibt sich

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = c\vec{r'}_0 + (\vec{x'} - \vec{x}) + c\vec{r'}_1 + (\vec{y} - \vec{x'}) + c\vec{r'}_2 + (\vec{z} - \vec{y}) = c\vec{r'} + (\vec{z} - \vec{x}),$$

womit Aussage (1) bewiesen ist.

Sei nun $((\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H^m (w, \vec{r})$ eine Ableitung in H. Dann existieren Ableitungen

$((\vec{x}, A, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H ((\vec{x'}, B, \vec{y})(\vec{y}, C, \vec{z}), \vec{r}_0)$, $((\vec{x'}, B, \vec{y}), \vec{0}) \Rightarrow_H^i (w_1, \vec{r}_1)$, $((\vec{y}, C, \vec{z}), \vec{0}) \Rightarrow_H^j (w_2, \vec{r}_2)$

mit $\vec{x'} = (\vec{x} + \vec{r}_0) \operatorname{rest} c$. Nach Definition von H gibt es in G eine Regel $(A \to BC, c\vec{r}_0 + (\vec{x'} - \vec{x}))$; nach Induktionsvoraussetzung gibt es in G die Ableitungen $(B, \vec{0}) \Rightarrow_G^i (w_1, c\vec{r}_1 + (\vec{y} - \vec{x'}))$ und $(C, \vec{0}) \Rightarrow_G^j (w_2, c\vec{r}_2 + (\vec{z} - \vec{y}))$. Daraus folgt $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^m (w, c\vec{r} + (\vec{z} - \vec{x}))$, womit Aussage (2) gezeigt ist. □

Behauptung 2.4.14 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form* $(A \to BC, \vec{0})$ *und* $(A \to a, \vec{r})$ *mit* $||\vec{r}||_1 \leq 1$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine Valenzgrammatik mit Regeln wie in Behauptung 2.4.13. Es sei $E_k := \{\vec{r} \in \mathbb{Z}^k : ||\vec{r}||_1 \leq 1\}$. Wir konstruieren die gesuchte Valenzgrammatik als $G' = (N', T, P', S')$ mit $N' = N \times E_k$, $S' = (S, \vec{0})$ und

$$\begin{aligned} P' \quad = \quad & \{((A, \vec{s}) \to (B, \vec{s})(C, \vec{r}), \vec{0}) : (A \to BC, \vec{r}) \in P, \vec{s} \in E_k\} \cup \\ & \{((A, \vec{s}) \to a, \vec{s}) : (A \to a, \vec{0}) \in P, \vec{s} \in E_k\} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion weist man leicht nach, daß $((A, \vec{s}), \vec{0}) \Rightarrow_{G'}^* (w, \vec{r} + \vec{s})$ für $w \in T^+$ genau dann gilt, wenn es die Ableitung $(A, \vec{0}) \Rightarrow_G^* (w, \vec{r})$ in G gibt. □

Behauptung 2.4.15 *Zu jeder kontextfreien* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente* $\mathbf{Z}_k$*-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form* $(A \to a\alpha, \vec{r})$, $||\vec{r}||_1 \leq 1$.

Beweis. Es sei G eine Valenzgrammatik mit Regeln wie in Behauptung 2.4.14. Die Konstruktion der Greibach-Normalform für kontextfreie Grammatiken (siehe [18, S.101-104]) kann wörtlich (unter Berücksichtigung der Valenzen) übertragen werden. □

Auch für reguläre und lineare $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatiken existieren Normalformen, die mit den gleichen Methoden konstruiert werden.

Satz 2.4.16 *Es sei $k \in \mathbb{N}$.*

- *Zu jeder regulären $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form $(A \to aB, \vec{r}), (A \to a, \vec{r})$ mit $\|\vec{r}\|_1 \leq 1$.*
- *Zu jeder linearen $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik gibt es eine äquivalente $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form $(A \to aB, \vec{r}), (A \to Ba, \vec{r}), (A \to a, \vec{r})$ mit $\|\vec{r}\|_1 \leq 1$.*

2.5 Valenzgrammatiken über kommutativen Monoiden

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß Valenzgrammatiken über beliebigen kommutativen Monoiden keine größere Erzeugungskraft als $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatiken besitzen. Wir betrachten hier nur kontextfreie Valenzgrammatiken. Analoge Resultate gelten auch im linearen bzw. regulären Fall. Zunächst beweisen wir einige einfache Hilfsaussagen.

Behauptung 2.5.1 *Für ein Monoid $\mathbf{M}$ sei $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ die Familie der endlich erzeugten Untermonoide von $\mathbf{M}$. Es gilt $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{M}) = \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})} \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{F})$.*

Beweis. Die Inklusion $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{M}) \supseteq \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})} \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{F})$ ist trivial; die Beziehung $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{M}) \subseteq \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})} \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{F})$ folgt, da jede $\mathbf{M}$-Valenzgrammatik G auch eine Valenzgrammatik über dem Untermonoid ist, das von der Menge der in G auftretenden (endlich vielen) Valenzen erzeugt wird. □

Behauptung 2.5.2 *Für ein Monoid $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ sei $E(\mathbf{M})$ die Menge aller Elemente aus M, die zu 1 ergänzt werden können, d.h.,*

$$E(\mathbf{M}) := \{x \in M : \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \circ x \circ x_2 = 1)\}.$$

Es gilt $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, E(\mathbf{M})^*)$.

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{M}$-Valenzgrammatik. Ist $p_1 \cdots p_k \in P$ eine Ableitungsfolge für das Paar $(w, 1)$, so kann jede der Valenzen von $p_1, \ldots, p_k$ zu 1 ergänzt werden. Folglich ist G äquivalent zur Valenzgrammatik G', die genau die Valenzregeln aus G enthält, deren Valenz in $E(\mathbf{M})$ ist. G' ist eine Valenzgrammatik über $E(\mathbf{M})$. □

Behauptung 2.5.3 *Sind $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ isomorph, so gilt $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{N})$.*

Beweis. In einer $\mathbf{M}$-Valenzgrammatik G ersetze man in jeder Valenzregel die Valenz durch ihr isomorphes Bild in $\mathbf{N}$. □

Behauptung 2.5.4 *$\mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{M}\times\mathbf{Z}_k) = \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Z}_k)$, für jedes endliche kommutative Monoid $\mathbf{M}$ und $k \geq 0$.*

Beweis. Es seien $\mathbf{M} = (M, \circ, 1)$ ein endliches kommutatives Monoid und $G = (N, T, P, S)$ eine $(\mathbf{M}\times\mathbf{Z}_k)$-Valenzgrammatik. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß P nur Kernregeln der Form $A \to BC, A \to B, A \to a, A \to \lambda$ enthält. (Dies wird durch die gleiche Konstruktion wie in Behauptung 2.4.3 garantiert.)

Aus G konstruieren wir die $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik $H = (N', T, P', S')$ mit $N' = N \times M$, $S' = (S, 1)$ und

$$\begin{aligned}
P' \;=\; & \{((A, m_0) \to (B, m_1)(C, m_2), \vec{r}) : \exists m(m_0 = m \circ m_1 \circ m_2 \wedge (A \to BC, (m, \vec{r})) \in P)\} \cup \\
& \{((A, m_0) \to (B, m_1), \vec{r}) : \exists m(m_0 = m \circ m_1 \wedge (A \to B, (m, \vec{r})) \in P)\} \cup \\
& \{((A, m) \to a, \vec{r}) : (A \to a, (m, \vec{r})) \in P\} \cup \{((A, m) \to \lambda, \vec{r}) : (A \to \lambda, (m, \vec{r})) \in P\}
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über die Anzahl der Ableitungsschritte im Sinne von Behauptung 2.3.3 zeigt man, daß $((A, m), \vec{0}) \Rightarrow_H^* (w, \vec{r})$ für $w \in T^*$ genau dann gilt, wenn $(A, (1, \vec{0})) \Rightarrow_G^* (w, (m, \vec{r}))$ erfüllt ist. □

Satz 2.5.5 *Es sei $\mathbf{M}$ ein kommutatives Monoid. Dann gilt $\mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Z}_k)$ für ein $k \geq 0$ oder $\mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$.*

Beweis. Für ein kommutatives Monoid $\mathbf{F} = (F, \circ, 1)$ ist $E(\mathbf{F}) = \{x \in F : \exists y(x \circ y = 1)\}$. Wegen der Kommutativität ist $E(\mathbf{F})$ unter $\circ$ abgeschlossen; da außerdem für jedes Element aus $E(\mathbf{F})$ ein inverses Element existiert, ist $(E(\mathbf{F}), \circ, 1)$ eine Gruppe. Besitzt $\mathbf{F}$ das endliche Erzeugendensystem A, so wird $E(\mathbf{F})$ durch $A \cap E(\mathbf{F})$ erzeugt. Wir können uns damit auf endlich erzeugte Abelsche (kommutative) Gruppen beschränken.

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte Abelsche Gruppen (siehe z.B. [32]) ist eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe das direkte Produkt von endlich vielen zyklischen Abelschen Gruppen, d.h. isomorph zu $\mathbf{M} \times \mathbf{Z}_k$ für eine endliche Abelsche Gruppe $\mathbf{M}$ und ein $k \geq 0$. Nach den Behauptungen 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4 gilt somit für jedes endlich erzeugte kommutative Monoid $\mathbf{F}$: $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_k)$ für ein $k \geq 0$.

Für ein beliebiges kommutatives Monoid $\mathbf{M}$ gibt es 2 Möglichkeiten: Gibt es ein kleinstes $k \geq 0$ mit $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_k)$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{M})$, so ist $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_k)$. Anderenfalls ist $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{M}) = \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$. □

2.6 Iterationslemmata für Valenzgrammatiken

In diesem Abschnitt sollen, vergleichbar zu den Pumping-Lemmata für reguläre und kontextfreie Sprachen, Iterationslemmata für Valenzsprachen über dem Monoid $\mathbf{Z}_k$ bewiesen werden. Die Idee der minimalen Zyklen findet sich bereits bei VICOLOV [38], wo nachgewiesen wurde, daß die Hierarchie $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_k) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_{k+1})$ echt ist. Zusätzlich sind die folgenden Hilfssätze von Nutzen:

Lemma 2.6.1 *Ist $S \subseteq \mathbb{N}^t$ $(t \geq 1)$ unendlich, so gibt es in S zwei Elemente $\vec{a}, \vec{b}$ mit $\vec{a} < \vec{b}$.*

Beweis. Für $t = 1$ ist das Lemma offenbar korrekt. Sei die Korrektheit für $t \geq 1$ gezeigt und sei $S \subseteq \mathbb{N}^{t+1}$ eine unendliche Menge. Wir betrachten ein Element $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_{t+1})$ aus S. Falls es in S kein $\vec{b}$ mit $a < b$ gibt, so existiert ein $i \in \{1, \ldots, t+1\}$ derart, daß es unendlich viele Elemente in S gibt, deren i-te Komponente kleiner als a_i ist. Das heißt, es gibt in S unendlich viele Elemente, deren i-te Komponente gleich einem gewissen $x \in \{0, \ldots, a_i - 1\}$ ist. In dieser Menge gibt es nach Induktionsvoraussetzung zwei vergleichbare Elemente. □

Lemma 2.6.2 *Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t \in \mathbb{Z}^k$. Besitzt die Gleichung*

$$a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_t\vec{v}_t = \vec{0} \qquad (*)$$

eine Lösung in $\mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$, so existiert in $\mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$ auch eine Lösung mit höchstens $k+1$ von Null verschiedenen Komponenten.

Beweis. Es sei $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$ eine Lösung von (*). O.B.d.A. gelte $a_i > 0$ für $1 \leq i \leq s$ und $a_i = 0$ für $s+1 \leq i \leq t$ für ein $s \in \{1, \ldots, t\}$. Gilt $s \leq k+1$, so ist $\vec{a}$ eine Lösung der gesuchten Form. Anderenfalls konstruieren wir folgendermaßen eine Lösung mit weniger von Null verschiedenen Komponenten.

In $\mathbb{Z}^t \setminus \{\vec{0}\}$ hat (*) eine Lösung $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_t)$ mit $b_j = 0$ für $j \in \{k+2, \ldots, t\}$. Sind alle Komponenten von $\vec{b}$ nichtnegativ, so haben wir eine Lösung der gewünschten Form gefunden. Anderenfalls gelte o.B.d.A. $b_1/a_1 = \min\{b_i/a_i : 1 \leq i \leq k+1\}$. Dann ist $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_t) = a_1\vec{b} - b_1\vec{a}$ ebenfalls eine Lösung von (*). Es gilt $c_i = a_1 b_i - b_1 a_i \geq 0$ für $2 \leq i \leq s$, $c_i = 0$ für $i = 1$ und $s < i \leq t$. Damit hat $\vec{c}$ höchstens $s-1$ von Null verschiedene Komponenten. Wegen $c_s = -b_1 a_s > 0$ ist diese Lösung nicht der Nullvektor. □

Satz 2.6.3 *Es sei $L \subseteq T^*$ eine Sprache aus $\mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{Z}_k)$. Dann existieren eine Konstante n und eine endliche Menge $I \subseteq (T^*)^{2k+2}$ von* iterativen $(2k+2)$-Tupeln *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) $|\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{2k+2}| > 0$ *für alle* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+2}) \in I$.

(2) Für alle $w \in L$ mit $|w| > n$ gibt es eine Zerlegung $w = z_1 z_2 \cdots z_{2k+2} z_{2k+3}$ und ein iteratives Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+2}) \in I$ mit

$$z_1\alpha_1^i z_2\alpha_2^i \cdots z_{2k+2}\alpha_{2k+2}^i z_{2k+3} \in L \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. Es sei $G = (N, T, P, S)$ eine $\mathbf{Z}_k$-Valenzgrammatik in Normalform mit $L = L(G)$. Eine Ableitung der Form $(A, \vec{0}) \Rightarrow^* (vAw, \vec{r})$ mit $A \in N, vw \in T^+, \vec{r} \in \mathbb{Z}^k$ heißt *Zyklus*. Ein Zyklus ist ein *elementarer Zyklus*, wenn keine seiner Unterableitungen einen Zyklus bildet. Da G in Normalform ist, insbesondere also keine löschenden Regeln und keine Kettenregeln enthält, kann man jede Ableitung $\Delta : (S, \vec{0}) \Rightarrow^* (w, \vec{0})$ durch das sukzessive Streichen von Unterableitungen, die elementare Zyklen darstellen, zu einer zyklenfreien Ableitung $\Delta' : (S, \vec{0}) \Rightarrow^* (w', \vec{r})$ umformen.

Mit N_{inf} bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen $M \subseteq N$, für die es unendlich viele Ableitungen $\Delta : (S, \vec{0}) \Rightarrow^* (w, \vec{0})$ mit $w \in T^*$ und $N(\Delta) = M$ gibt. Im folgenden sei M in N_{inf}. Weiterhin sei $Z(M) = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_t\}$ mit $\zeta_i : (A_i, \vec{0}) \Rightarrow^* (v_i A_i w_i, \vec{r}_i)$ die Menge der minimalen Zyklen der Form $(A, \vec{0} \Rightarrow^* (vAw, \vec{r})$ mit $A \in M$. Wird in dem oben beschriebenen Reduktionsprozeß der minimale Zyklus ζ_i, $1 \leq i \leq t$, genau a_i-mal gestrichen, so gilt $a_1\vec{r}_1 + \ldots + a_t\vec{r}_t = -\vec{r}$, wobei $\vec{r}$ die Bewertung der entstandenen zyklenfreien Ableitung ist.

Da es nur endlich viele zyklenfreie Ableitungen gibt, existiert eine zyklenfreie Ableitung Δ', auf die unendlich viele Ableitungen reduziert werden. Damit hat die Gleichung

$$a_1\vec{r}_1 + \ldots + a_t\vec{r}_t = -\mathrm{Value}(\Delta')$$

unendlich viele Lösungen in $\mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$. Unter diesen gibt es nach Lemma 2.6.1 zwei Lösungen $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{N}^t$ mit $\vec{b} < \vec{c}$. Die Gleichung $a_1\vec{r}_1 + \ldots + a_t\vec{r}_t = \vec{0}$ hat somit eine Lösung in $\mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$, nämlich $\vec{c} - \vec{b}$. Nach Lemma 2.6.2 gibt es für die letztgenannte Gleichung eine Lösung $(a_1, \ldots, a_t) \in \mathbb{N}^t \setminus \{\vec{0}\}$ mit höchstens $k+1$ positiven Komponenten. O.B.d.A. seien diese unter den ersten $k+1$ Komponenten zu finden, d.h. es gelte $a_1\vec{r}_1 + \ldots a_{k+1}\vec{r}_{k+1} = \vec{0}$ mit $(a_1, \ldots, a_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}$.

In eine Ableitung $\Delta : (S, \vec{0}) \Rightarrow^* (w, \vec{0})$ mit $N(\Delta) = M$ kann man für $i \geq 1$ sukzessive $(i \cdot a_1)$-mal den Zyklus ζ_1, $(i \cdot a_2)$-mal den Zyklus ζ_2, …, $(i \cdot a_{k+1})$-mal den Zyklus ζ_{k+1} einfügen. Die so entstandene Ableitung liefert wieder ein Terminalwort und ist mit $\vec{0}$ bewertet. Die iterativen Wörter sind $\alpha_{2j-1} = v_j^{a_j}$, $\alpha_{2j} = w_j^{a_j}$, $1 \leq j \leq k+1$; ihre Reihenfolge ist abhängig von der Position der zugehörigen Nichtterminale A_i im Ableitungsbaum. Die Menge der iterativen Tupel bezüglich M ergibt sich damit als

$$I(M) = \left\{(\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(2k+2)}) : \pi \text{ ist Permutation von } \{1, \ldots, 2k+2\}\right\} .$$

(Genauer betrachtet, kommen nur bestimmte Permutationen in Frage.) Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned} I &= \bigcup_{M \in N_{inf}} I(M) \text{ und} \\ n &= \max\{|w| : w \in T^* \wedge \exists \Delta(\Delta : (S, \vec{0}) \Rightarrow^* (w, \vec{0}) \wedge N(\Delta) \notin N_{inf})\} \Box \end{aligned}$$

Analog zeigt man im Falle regulärer Valenzgrammatiken:

Satz 2.6.4 *Es sei $L \subseteq T^*$ eine Sprache aus $\mathcal{L}(Val, REG, \mathbf{Z}_k)$. Dann existieren eine Konstante n und eine endliche Menge $I \subseteq (T^*)^{k+1}$ von* iterativen $(k+1)$-Tupeln *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) $|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}| > 0$ *für alle* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}) \in I$.

(2) Für alle $w \in L$ *mit* $|w| > n$ *gibt es eine Zerlegung* $w = z_1z_2\cdots z_{k+1}z_{k+2}$ *und ein iteratives Tupel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}) \in I$ *mit*

$$z_1\alpha_1^i z_2\alpha_2^i \cdots z_{k+1}\alpha_{k+1}^i z_{k+2} \in L \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\,.$$

Gibt es einen Zyklus $(A, \vec{0}) \Rightarrow^* (vAw, \vec{0})$, so stellt (v, w) für jede Ableitung, die das Symbol A enthält, ein iteratives Paar dar. Besitzt also einer der im Beweis von Satz 2.6.3 betrachteten minimalen Zyklen die Bewertung $\vec{0}$, so kann man sogar ein iteratives Paar finden. Bei Grammatiken mit bewerteten Alphabeten entspricht ein Zyklus $(A, \vec{0}) \Rightarrow^* (vAw, \vec{0})$ einer Bewertung von vw mit $\vec{0}$. Damit ergeben sich folgende Resultate:

Satz 2.6.5 *Es sei* $L \subseteq T^*$ *eine Sprache aus* $\mathcal{L}(\mathrm{Val}', \mathrm{CF}, \mathbf{Z}_k)$ *mit Bewertung* $\varphi : T^* \to \mathbb{Z}^k$. *Dann existieren eine Konstante* n, *eine endliche Menge* $I' \subseteq (T^*)^2$ *von* iterativen Paaren *und eine endliche Menge* $I \subseteq (T^*)^{2k+2}$ *von* iterativen $(2k+2)$-Tupeln *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) Für alle $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+2}) \in I$ *existiert ein* i *mit* $\varphi(\alpha_i) \neq \vec{0}$.

(2) $|\alpha_1\alpha_2| > 0$ *für alle* $(\alpha_1, \alpha_2) \in I'$.

(3) Für alle $w \in L$ *mit* $|w| > n$ *gibt es*

- *eine Zerlegung* $w = z_1z_2\cdots z_{2k+2}z_{2k+3}$ *und ein iteratives Tupel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k+2})$ *aus* I *mit* $z_1\alpha_1^i z_2\alpha_2^i \cdots z_{2k+2}\alpha_{2k+2}^i z_{2k+3} \in L$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *oder*
- *eine Zerlegung* $w = z_1z_2z_3$ *und ein iteratives Paar* $(\alpha_1, \alpha_2) \in I'$ *mit* $z_1\alpha_1^i z_2\alpha_2^i z_3 \in L$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$.

Satz 2.6.6 *Es sei* $L \subseteq T^*$ *eine Sprache aus* $\mathcal{L}(\mathrm{Val}', \mathrm{REG}, \mathbf{Z}_k)$ *mit Bewertung* $\varphi : T^* \to \mathbb{Z}^k$. *Dann existieren eine Konstante* n, *eine endliche Menge von* iterativen Wörtern $I' \subseteq T^*$ *und eine endliche Menge* $I \subseteq (T^*)^{k+1}$ *von* iterativen $(k+1)$-Tupeln *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) Für alle $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}) \in I$ *existiert ein* i *mit* $\varphi(\alpha_i) \neq \vec{0}$.

(2) $|\alpha| > 0$ *für alle* $\alpha \in I'$.

(3) Für alle $w \in L$ *mit* $|w| > n$ *gibt es*

- *eine Zerlegung* $w = z_1z_2\cdots z_{k+1}z_{k+2}$ *und ein iteratives Tupel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1})$ *aus* I *mit* $z_1\alpha_1^i z_2\alpha_2^i \cdots z_{k+1}\alpha_{k+1}^i z_{k+2} \in L$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *oder*
- *eine Zerlegung* $w = z_1z_2$ *und ein iteratives Wort* α *aus* I' *mit* $z_1\alpha^i z_2 \in L$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$.

2.7 Schlanke Valenzsprachen

Schlanke Sprachen, d.h. Sprachen mit beschränkter Strukturfunktion, wurden in den letzten Jahren in zahlreichen Arbeiten untersucht. Ilie [21], [22] sowie Raz [29] zeigten, daß schlanke kontextfreie Sprachen sich als endliche Vereinigung von *paired loops* darstellen lassen (ein *paired loop* ist eine Sprache der Form $\{uv^m wx^m y : m \geq 0\}$ mit $u, v, w, x, y \in X^*$). Raz zeigte außerdem die Entscheidbarkeit der Frage, ob eine kontextfreie Grammatik eine schlanke Sprache erzeugt.

In diesem Abschnitt werden die Untersuchungen bezüglich Schlankheit auf Valenzsprachen über $\mathbf{Q}_+$ ausgedehnt. Es wird die Entscheidbarkeit der Frage, ob eine $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatik eine k-schlanke Sprache erzeugt, gezeigt. Außerdem ergeben sich einige Abschlußeigenschaften der Familie der schlanken $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprachen. Wesentliches Hilfsmittel in den Beweisen ist die Abgeschlossenheit der Familie der $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprachen unter $\mathbf{Q}_+$-Transduktionen. Es sei darauf hingewiesen, daß mit der gleichen Methode analoge Resultate für die umfassendere Familie der Matrixsprachen sowie für einige Variationen des Schlankheitsbegriffes erzielt werden können [37].

Im folgenden seien X ein Alphabet, $\# \notin X$ ein Trennsymbol, $L \subseteq X^*$ eine Sprache. Wir definieren für $k \geq 1$ die folgenden von L abgeleiteten Sprachen:

$$\begin{aligned}
L^{[\geq k]} &= \{w_1\#w_2\#\cdots w_k\# : w_i \in L, |w_1| = |w_i| \text{ für } 1 \leq i \leq k, w_i \neq w_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k\} \\
L_{[\geq k]} &= \{w \in L : s_L(|w|) \geq k\} \\
L_{[k]} &= \{w \in L : s_L(|w|) = k\} \\
S_{[L,\geq k]} &= \{w \in X^* : s_L(|w|) \geq k\} \\
S_{[L,k]} &= \{w \in X^* : s_L(|w|) = k\}
\end{aligned}$$

Als erstes werden wir beweisen, daß mit L auch $L^{[\geq k]}$ und $L_{[\geq k]}$ $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprachen sind. Daraus folgt, daß $S_{[L,\geq k]}$ und $S_{[L,k]}$ reguläre Sprachen sind und $L_{[k]}$ eine $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprache ist. Da die Abgeschlossenheit effektiv ist, folgt sofort die Entscheidbarkeit des Problems der $(k-1)$-Schlankheit, denn L ist genau dann $(k-1)$-schlank bzw. streng $(k-1)$-schlank, wenn $S_{[L,\geq k]}$ endlich bzw. leer ist.

Behauptung 2.7.1 *Aus $L \in \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$ folgt $L^{[\geq k]} \in \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$ für $k \geq 1$.*

Beweis. Offensichtlich gilt $L^{[\geq k]} = (L\#)^k \cap A_k \cap B_k$ mit

$$\begin{aligned}
A_k &= \{w_1\#w_2\#\ldots w_k\# : w_i \in X^*(1 \leq i \leq k), w_i \neq w_j(1 \leq i < j \leq k)\} \\
B_k &= \{w_1\#w_2\#\ldots w_k\# : w_i \in X^* \wedge |w_1| = |w_i|(1 \leq i \leq k)\}
\end{aligned}$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ unter Konkatenation ist $(L\#)^k$ eine $\mathbf{Q}_+$-Valenzsprache. Für den Beweis der Behauptung genügt es zu zeigen, daß A_k und B_k von endlichen $\mathbf{Q}_+$-Valenzautomaten akzeptiert werden. Wegen

$$\begin{aligned}
A_k &= \bigcap_{1\le i<j\le k} A_{k;i,j} \text{ mit} \\
A_{k;i,j} &= \{w_1\#w_2\#\ldots w_k\# : w_m \in X^*(1\le m\le k), w_i \ne w_j\} \\
&= \{u_1v_1u_2v_2u_3 : u_1 \in (X^*\#)^{i-1}, u_2 \in (X^*\#)^{j-i}, u_3 \in (X^*\#)^{k-j}, \\
&\qquad v_1, v_2 \in X^*\#, v_1v_2 \in A_2\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k &= \bigcap_{2\le i\le k} B_{k;i} \text{ mit} \\
B_{k;i} &= \{w_1\#w_2\#\ldots w_k\# : w_m \in X^*(1\le m\le k), |w_1| = |w_i|\} \\
&= \{v_1u_1v_2u_2 : u_1 \in (X^*\#)^{i-1}, u_2 \in (X^*\#)^{k-i}, v_1, v_2 \in X^*\#, v_1v_2 \in B_2\}
\end{aligned}$$

reduziert sich dieses Problem darauf, für die Sprachen A_2 und B_2 Valenzautomaten über $\mathbf{Z}$ zu finden, was im folgenden geschieht:

1. Zwei Wörter $w_1, w_2 \in X^*$ sind genau dann verschieden, wenn es ein i mit $1 \le i \le \min\{|w_1|, |w_2|\} + 1$ gibt, so daß die i-te Position von $w_1\#$ und die i-te Position von $w_2\#$ verschieden sind. Ein nichtdeterministischer $\mathbf{Z}$-Valenzautomat, der A_2 akzeptiert, arbeitet folgendermaßen.

   Zunächst wird der blinde Zähler für jedes gelesene Symbol um 1 erhöht. Irgendwann bis zum Lesen des ersten $\#$ wird nichtdeterministisch geraten, daß die Position erreicht ist, an der sich der erste und der zweite Teil des Wortes unterscheiden. Das Symbol an dieser Stelle wird im Zustand des Automaten gespeichert, der Zähler wird bis zum Ende des ersten Teiles nicht verändert.

   Beim Lesen des zweiten Teiles wird der Zählerinhalt zunächst für jedes Symbol um 1 verringert. Ist das aktuelle Symbol verschieden vom gespeicherten, so kann nichtdeterministisch das Verringern des Zählerinhaltes beendet werden. Der Zähler hat genau dann den Inhalt 0, wenn im zweiten Teil die gleiche Position wie im ersten Teil gewählt wurde.

2. $B_2 = L(\mathcal{B})$ mit $\mathcal{B} = (\{z_0, z_1, z_2\}, X \cup \{\#\}, z_0, \delta, z_2)$, wobei

   $$\delta = \{(z_0, x, z_0, 1), (z_0, \#, z_1, 1), (z_1, x, z_1, -1), (z_1, \#, z_2, -1) : x \in X\}$$

   Ein Wort über $X \cup \{\#\}$ wird genau dann akzeptiert, wenn es die Form $w_1\#w_2\#$, $w_1, w_2 \in X^*$, besitzt und w_1 und w_2 gleiche Länge besitzen. □

Behauptung 2.7.2 *Aus $L \in \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$ folgt $L_{[k]}, L_{[\ge k]} \in \mathcal{L}(Val, CF, \mathbf{Q}_+)$ sowie $S_{[L,k]}, S_{[L,\ge k]} \in \mathcal{L}(REG)$.*

Beweis. Es gilt $L_{[\geq k]} = \{w \in X^* : \exists\alpha(\alpha \in (X \cup \{\#\})^* \wedge w\#\alpha \in L^{[\geq k]})\}$ und damit $L_{[\geq k]} \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$. Die Längenmenge $\Lambda(L_{[\geq k]})$ ist demzufolge semilinear. Die Sprachen $S_{[L,\geq k]} = \{w \in X^* : |w| \in \Lambda(L_{[\geq k]})\}$ und $S_{[L,k]} = S_{[L,\geq k]} \setminus S_{[L,\geq k+1]}$ sind regulär; daraus folgt: $L_{[k]} = L \cap S_{[L,k]}$ ist in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ enthalten. □

Satz 2.7.3 *Für eine $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatik G und eine gegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist es entscheidbar, ob $L(G)$ (echt) k-schlank ist.*

Beweis. Sei $L = L(G)$. L ist genau dann k-schlank bzw. echt k-schlank ist, wenn $L_{[\geq k+1]}$ endlich bzw. leer ist. Die Beweise der letzten beiden Behauptungen sind konstruktiv. Damit läßt sich eine $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatik konstruieren, die $L_{[\geq k+1]}$ erzeugt. Da Endlichkeit bzw. Leerheit für $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatiken entscheidbar sind, folgt der Satz. □

Satz 2.7.4

1. *Aus $L, M \in \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{Q}_+)$ und der Schlankheit von M folgt $L \setminus M \in \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{Q}_+)$.*
2. *Aus $L, M \in \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{Q}_+)$ und der Schlankheit von L und M folgt $L \cap M \in \mathcal{L}(\mathit{Val}, \mathit{CF}, \mathbf{Q}_+)$.*

Beweis.

1. Die Strukturfunktion von M sei durch k beschränkt. Für $1 \leq m \leq k$ betrachten wir

$$\begin{aligned} L_M^{(m)} \;=\; & \{w_0\#w_1\#\cdots w_m\# : w_0 \in L, w_1, \ldots, w_m \in M_{[m]}, \\ & w_i \neq w_j, |w_0| = |w_j| \text{ für } 0 \leq i < j \leq m\}. \end{aligned}$$

   Wegen $L, M_{[m]} \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ kann man analog zum Beweis von Behauptung 2.7.1 zeigen, daß $L_M^{(m)}$ in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ ist. Sei nun $L_{M,m} = \{w \in L \setminus M : s_M(|w|) = m\}$ für $0 \leq m \leq k$. Es gilt $L_{M,0} = L \cap S_{M,0}$ und $L_{M,m} = \{w \in X^* : \exists\alpha(w\#\alpha \in L_M^{(m)})\}$, $1 \leq m \leq k$. Damit sind die Sprachen $L_{M,m}$, $0 \leq m \leq k$, in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$. Mit $L \setminus M = \bigcup_{m=0}^{k} L_{M,m}$ folgt die erste Aussage.

2. Folgt nach Aussage (1) und wegen $L \cap M = L \setminus (L \setminus M)$. □

Satz 2.7.5 *Es seien G_1 und G_2 kontextfreie $\mathbf{Q}_+$-Valenzgrammatiken, die jeweils schlanke Sprachen erzeugen. Es ist entscheidbar, ob $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ bzw. ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ gilt.*

Beweis. Die in Satz 2.7.4 aufgeführten Abschlußeigenschaften sind effektiv. Das heißt, man kann Valenzgrammatiken konstruieren, die $L(G_1) \setminus L(G_2)$ bzw. $L(G_1) \cap L(G_2)$ erzeugen. Damit sind das Inklusionsproblem sowie das Disjunktheitsproblem auf das Leerheitsproblem für Valenzgrammatiken reduziert. □

Kapitel 3

Kantengrammatiken

3.1 Definitionen und Beispiele

Zunächst werden Wortrelationen als Verallgemeinerungen von Sprachen eingeführt. Für eine zweistellige Wortrelation wird auf natürliche Weise eine Folge von Graphen definiert. Schließlich werden Kantengrammatiken als Mittel zur Erzeugung von Wortrelationen und damit von Graphenfolgen eingeführt.

In diesem Kapitel werden häufig kartesische Produkte von Alphabeten und Sprachen auftreten. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden für eine Sprache L das n-fache Monoidprodukt mit $L^{[n]}$ und das n-fache kartesische Produkt mit L^n notiert. Insbesondere ist $X^{[n]}$ die Menge aller Wörter der Länge n über dem Alphabet X. Dagegen wird für ein Wort w die Schreibweise w^n für die n-fache Konkatenation von w beibehalten.

Eine Wortrelation $R \subseteq (X^*)^n$ heißt *synchron*, wenn $|v_i| = |v_1|, 1 \leq i \leq n$, für alle $(v_1, \ldots, v_n)$ gilt. Mit $\mathrm{Syn}(R)$ wird die größte in R enthaltene synchrone Relation bezeichnet. Offenbar sind die Monoide $\mathrm{Syn}((X^*)^n)$ und $(X^n)^*$ isomorph. Wir werden deshalb im folgenden synchrone n-stellige Relationen über X^* und Sprachen über X^n miteinander identifizieren.

Definition 3.1.1 *Es seien X ein Alphabet und $E \subseteq X^* \times X^*$ eine synchrone Relation. Die* Knotensprache *von E ist*

$$V(E) = \{v \in X^* : \exists w\,((v,w) \in E \vee (w,v) \in E)\}\,.$$

Der zu E gehörige n-te Graph $G_n(E)$, $n \geq 0$, ist definiert als

$$G_n(E) = (V_n(E), E_n) \text{ mit } V_n(E) = V(E) \cap X^{[n]}, E_n = (E \setminus Id_V) \cap (X^{[n]} \times X^{[n]}).$$

Bemerkung. Aus der Kantenrelation E werden alle Paare der Form (v, v) entfernt; damit ist gewährleistet, daß nur schlichte Graphen erzeugt werden, und es ist möglich, isolierte Knoten zu erzeugen.

Beispiel 3.1.1 Wir betrachten folgende Wortrelationen:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(2^{m+1}w, 2^m aw) : m \geq 0, a \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*\} \\
E_2 &= \{(0^m 10^{n+k}, 0^{m+k}1, 0^n) : m, n \geq 0, k \geq 1\} \\
E_3 &= \{(0^{m+k}1^n, 0^m 1^{n+k}) : m, n \geq 0, k \geq 1\} \\
E_4 &= \{(w0, w1) : w \in \{0,1\}^*\} \cup \{(wa, aw) : a \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*\}
\end{aligned}$$

Der Graph $G_n(E_1)$ ist für $n \geq 1$ der vollständige binäre Baum der Tiefe n, wobei die Knotenmenge $\{2^i w : w \in \{0,1\}^{[n-i]}, 0 \leq i \leq n\}$ ist. Der Knoten 2^n ist die Wurzel, die Knoten aus $\{0,1\}^{[n]}$ sind die Blätter, und die Söhne von $2^i w$, $1 \leq i \leq n$, $w \in \{0,1\}^{[n-i]}$, sind die Knoten $2^{i-1}0w$ und $2^{i-1}1w$.

$G_n(E_2 \cup E_2^{-1})$ und $G_{n-1}(E_3 \cup E_3^{-1})$, $n \geq 2$, sind jeweils die vollständigen Graphen mit n Knoten, wobei die Knotenmengen $\{0^i 10^j : i + j = n - 1\}$ bzw. $\{0^i 1^j : i + j = n - 1\}$ sind.

$G_n(E_4 \cup E_4^{-1})$ ist der n-te *Shuffle-Exchange-Graph*, bestehend aus der Knotenmenge $\{0,1\}^{[n]}$, den (ungerichteten) *Shuffle-Kanten* der Form $\{aw, wa\}$ und den *Exchange-Kanten* der Form $\{w0, w1\}$.

Definition 3.1.2 *Eine* Kantengrammatik *ist ein Quintupel* $\Gamma = (N, X, T, P, S)$, *wobei* X *ein Alphabet,* T *eine endliche Teilmenge von* $X^* \times X^*$ *und* $\hat{\Gamma} = (N, T, P, S)$ *eine Grammatik sind.* Γ *heißt kontextfreie, lineare bzw. reguläre Kantengrammatik, wenn* $\hat{\Gamma}$ *eine kontextfreie, lineare bzw. reguläre Grammatik ist. Gilt* $|v| = |w|$ *für alle Paare* $(v, w) \in T$, *so nennt man* Γ synchron.

Die von Γ *erzeugte Sprache über* T *ist* $L(\Gamma) := \{w \in T^* : w \in L(\hat{\Gamma}) \wedge |\mathrm{pr}_1(w)| = |\mathrm{pr}_2(w)|\}$. *Die* Kantensprache *von* Γ, $E(\Gamma)$, *ist die durch* L *definierte synchrone binäre Relation über* X, *formal* $E(\Gamma) := \{(v, w) \in X^* \times X^* : \exists u(u \in L(\Gamma) \wedge \mathrm{pr}_1(u) = v \wedge \mathrm{pr}_2(u) = w)\}$, *die* Knotensprache *von* Γ *ist* $V(\Gamma) = V(E(\Gamma))$.

Der n-te von Γ erzeugte Graph *ist* $G_n(\Gamma) = (V_n(\Gamma), E_n(\Gamma)) = G_n(E(\Gamma))$. *Der Eingangs- bzw. der Ausgangsgrad des Knoten* $v \in V_n(\Gamma)$ *in* $G_n(\Gamma)$ *wird mit* $d_{in}(v|\Gamma)$ *bzw.* $d_{out}(v|\Gamma)$ *bezeichnet.*

Wir unterscheiden zwischen

- *der* von Γ erzeugten Graphenfolge $\mathcal{G}(\Gamma) = \{G_n(\Gamma)\}_{n=0}^{\infty}$ *und*
- *der* von Γ erzeugten (abstrakten) Graphensprache

$$[\mathcal{G}](\Gamma) = \{[G_n(\Gamma)] : V_n(\Gamma) \neq \emptyset, n \geq 0\}.$$

Der von $G_n(\Gamma)$ *induzierte ungerichtete Graph wird mit* $G_n^u(\Gamma)$ *bezeichnet; die Folge bzw. die Graphensprache der induzierten ungerichteten Graphen sind* $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ *bzw.* $[\mathcal{G}^u](\Gamma)$.

Definition 3.1.3 *Für* $X \in \{CF, LIN, REG\}$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{E}(X)$ *bzw.* $\mathcal{V}(X)$ *die Familien der von Kantengrammatiken vom Typ* X *erzeugten Kantensprachen bzw. Knotensprachen; mit* $\mathcal{E}(\mathrm{SYN} - X)$ *bzw.* $\mathcal{V}(\mathrm{SYN} - X)$ *werden die entsprechenden von synchronen Kantengrammatiken des Typs* X *erzeugten Sprachfamilien bezeichnet.*

Beispiel 3.1.2 Die Wortrelationen E_i, $1 \leq i \leq 4$, aus Beispiel 3.1.1 (und damit die entsprechenden Graphenfamilien) werden jeweils durch die Kantengrammatiken Γ_i erzeugt:

$\Gamma_1 :\ S \to (2,2)S \mid (2,1)B \mid (2,0)B,\ B \to (1,1)B \mid (0,0)B \mid \lambda$

$\Gamma_2 :\ S \to (0,0)S \mid (0,1)A \mid (1,0)B,\ A \to (0,0)A \mid (1,0)C,$
$\quad B \to (0,0)B \mid (0,1)C,\ C \to (0,0)C \mid \lambda$

$\Gamma_3 :\ S \to (0,0)S \mid (0,1)A \mid (1,0)B,\ A \to (0,1)A \mid (1,1)C,$
$\quad B \to (1,0)B \mid (1,1)C,\ C \to (1,1)C \mid \lambda,$

$\Gamma_4 :\ S \to (\lambda,0)A \mid (\lambda,1)B \mid E,\ A \to (0,0)A \mid (1,1)A \mid (0,\lambda),$
$\quad B \to (0,0)B \mid (1,1)B \mid (1,\lambda),\ E \to (0,0)E \mid (1,1)E \mid (0,1) \mid (1,0)$

Die folgenden Lemmata geben Normalformen für Kantengrammatiken an, die in den weiteren Untersuchungen nützlich sind.

Lemma 3.1.1 *1. Zu jeder kontextfreien, linearen bzw. regulären Kantengrammatik $\Gamma = (N, X, T, P, S)$ existiert eine äquivalente kontextfreie, lineare bzw. reguläre Kantengrammatik mit dem Terminalalphabet $\hat{T} = (X \times \{\lambda\}) \cup (\{\lambda\} \times X)$.*

2. Zu jeder synchronen kontextfreien, linearen bzw. regulären Kantengrammatik $\Gamma = (N, X, T, P, S)$ existiert eine äquivalente synchrone kontextfreie, lineare bzw. reguläre Kantengrammatik mit dem Terminalalphabet X^2.

Beweis.

1. Man ersetze in jeder rechten Regelseite ein Symbol $(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_n) \in T$ mit $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in X$ durch das Wort $(a_1, \lambda) \cdots (a_m, \lambda)(\lambda, b_1) \cdots (\lambda, b_n) \in \hat{T}^*$.

2. Man ersetze in jeder rechten Regelseite ein Symbol $(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_m) \in T$ mit $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in X$ durch das Wort $(a_1, b_1) \cdots (a_m, b_m) \in (X^2)^*$. □

Mit der erwähnten Identifizierung von Sprachen und synchronen Relationen ist die von einer synchronen regulären (kontextfreien) Kantengrammatik mit dem Knotenalphabet X erzeugte Relation eine reguläre (kontextfreie) Sprache über X^2 und umgekehrt. Die von synchronen regulären Kantengrammatiken erzeugten Relationen werden im folgenden als *synchrone reguläre Relationen* bezeichnet. Wegen der vielen positiven Eigenschaften der regulären Sprachen steht diese Teilklasse im Mittelpunkt der Untersuchungen.

Lemma 3.1.2 *Zu jeder synchronen kontextfreien, linearen bzw. regulären Kantengrammatik Γ existiert eine synchrone kontextfreie, lineare bzw. reguläre Kantengrammatik Γ' mit $\mathcal{G}(\Gamma) = \mathcal{G}(\Gamma')$ und $E(\Gamma') = E(\Gamma) \cup Id_{V(\Gamma)}$.*

Beweis. Wie bereits gesagt, ist eine Sprache $E \subseteq (X^2)^*$ genau dann kontextfrei, linear bzw. regulär, wenn eine synchrone Kantengrammatik Γ des entsprechenden Typs mit $E(\Gamma) = E$ existiert. Es gilt $V(\Gamma) = \mathrm{pr}_1(E(\Gamma)) \cup \mathrm{pr}_2(E(\Gamma))$ und $\mathrm{Id}_{V(\Gamma)} = h(V_\Gamma)$, wobei h der Homomorphismus $h : X^* \to (X^2)^*$ mit $h(a) = (a, a)$ für $a \in X$ ist. Ist nun Γ synchron und kontextfrei, linear bzw. regulär, so ist $E' = E(\Gamma) \cup \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}$ ebenfalls kontextfrei, linear bzw. regulär; es existiert folglich eine synchrone kontextfreie, lineare bzw. reguläre Kantengrammatik Γ' mit $E(\Gamma') = E'$. □

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist die geeignete Kontraktion großer Graphen auf kleinere Graphen der gleichen Familie eine wichtige Aufgabe in der Parallelprogrammierung. Für viele durch Kantengrammatiken erzeugte Graphenfolgen gibt es eine sehr einfache Kontraktion, die dadurch erfolgt, daß man von jedem Wort aus der Knotenmenge die letzten k Buchstaben abschneidet. Graphenfolgen mit dieser Eigenschaft wurden von Berman und anderen als *kürzbar (truncatable)* bezeichnet [1, 2, 4].

Definition 3.1.4 *Es seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ schlichte Graphen. Eine* Kontraktion von G auf G' *ist eine Abbildung*

$$h : V \to V' \text{ mit } \forall v \forall w\, ((v, w) \in E \to (h(v) = h(w) \vee (h(v), h(w)) \in E'))\,.$$

Der Kontraktionsfaktor $\varrho(h)$ ist definiert als $\varrho(h) = \max\{\mathrm{card}\, h^{-1}(v') : v' \in V'\}$.

Definition 3.1.5 *Es sei $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\geq 0}$ eine Folge von Graphen. Eine Folge H von Kontraktionen $\{h_n\}_{n\geq n_0}$ von G_{n+k} auf G_n heißt k-Kontraktion von $\mathcal{G}$. Der Kontraktionsfaktor $\varrho(H)$ ist definiert als $\varrho(H) = \sup\{\varrho(h_n) : n \geq n_0\}$.*

Beispiel 3.1.3 Es sei $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n\geq 0}$ eine Folge nichtleerer Graphen. Eine Folge $H = \{h_n\}_{n\geq 0}$ von Abbildungen $h_n : V(G_{n+1}) \to V(G_n)$ mit $h_n(v) = h_n(w)$ für alle $v, w \in V(G_{n+1})$ ist eine (triviale) 1-Kontraktion von $\mathcal{G}$. Es gilt $\varrho(h_n) = \mathrm{card}\, V(G_{n+1})$.

Wie man leicht sieht, stellt die iterierte Anwendung von Kontraktionen wieder eine Kontraktion dar, so daß in einer Graphenfolge $\{G_n\}_{n\geq 0}$ mit der k-Kontraktion $\{h_n\}_{n\geq n_0}$ ein Graph G_n durch Anwendung der Kontraktionen $h_{n+k}, h_n, h_{n-k}, \ldots$ auf einen Graphen G_r mit $r \leq n_0$ kontrahiert werden kann.

Definition 3.1.6 *Es sei $\Gamma = (N, X, T, P, S)$ eine Kantengrammatik. Die Graphenfolge $\mathcal{G}(\Gamma)$ heißt*

- k-kürzbar *für $k \geq 1$, falls es ein $n_0 \geq k$ gibt, so daß die Abbildungsfolge*

  $$\mathrm{trunc}_k = \{h_n : V_{n+k}(\Gamma) \to V_n(\Gamma)\}_{n\geq n_0} \text{ mit } h_n(v) = \mathrm{pref}_n(v) \text{ für } v \in V_{n+k}(\Gamma)$$

  eine k-Kontraktion von $\mathcal{G}(\Gamma)$ ist,

- im strengen Sinne k-kürzbar *für $k \geq 1$, wenn zusätzlich $n_0 = 0$ gilt,*
- kürzbar*, wenn ein $k \geq 1$ existiert, so daß $\mathcal{G}(\Gamma)$ k-kürzbar ist.*

Beispiel 3.1.4 Die Graphenfolgen $\mathcal{G}(\Gamma_1)$ und $\mathcal{G}(\Gamma_3)$ aus Beispiel 3.1.2 sind 1-kürzbar, während $\mathcal{G}(\Gamma_2)$ und $\mathcal{G}(\Gamma_4)$ nicht kürzbar sind.

Ist die Folge trunc_k eine k-Kontraktion einer Graphenfolge über dem Knotenalphabet X, so gilt für den Kontraktionsfaktor $\varrho(\mathrm{trunc}_k) \leq (\mathrm{card}\ X)^k$. Damit ist gesichert, daß das Kürzen nicht nur eine einfache, sondern auch eine relativ effiziente Art der Kontraktion ist. In der Arbeit [4] untersuchten Berman und Snyder Probleme der Kürzbarkeit und der Kontraktionsfaktoren für zahlreiche aus der Theorie der Parallelprogrammierung bekannte Graphenfolgen.

3.2 Kantengrammatiken und formale Sprachen

Die Untersuchung der von Kantengrammatiken erzeugten Knoten- bzw. Kantensprachen ist von besonderem Interesse, da sich aus Aussagen über diese Sprachen Eigenschaften der erzeugten Graphen ableiten lassen. So ist z.B. die Knotenzahl des Graphen $G_n(\Gamma)$ gleich der Strukturfunktion von $V(\Gamma)$ an der Stelle n.

In diesem Abschnitt setzen wir die Untersuchungen zu den Knotensprachen kontextfreier Kantengrammatiken von Berman und Shannon in [2] fort. Die Kantensprachen werden durch Grammatiken mit Bewertung, die Knotensprachen durch Valenzgrammatiken charakterisiert. Am Ende folgen einige Resultate über endliche Automaten und formale Potenzreihen, die später von Nutzen sein werden.

Zusätzlich zu den bereits genannten Knoten- und Kantensprachen betrachten wir die *Startknotensprache* $V1(\Gamma)$ bzw. die *Zielknotensprache* $V2(\Gamma)$ einer Kantengrammatik Γ. Diese sind definiert als $V1(\Gamma) := \{v : \exists w((v,w) \in E(\Gamma)\}$ bzw. $V2(\Gamma) := \{w : \exists v((v,w) \in E(\Gamma)\}$. Die Familien der Startknotensprachen, die durch Kantengrammatiken vom Typ Y erzeugbar sind, werden als $\mathcal{V}1(Y)$ notiert.

Satz 3.2.1 *Es seien X ein Alphabet, $T \subseteq X^* \times X^*$ eine endliche Menge, $\varphi : T^* \to \mathbb{Z}$ die Bewertung mit $\varphi((v,w)) = |v| - |w|$ für $(v,w) \in T$. Eine Sprache $L \subseteq T^*$ wird genau dann von einer kontextfreien (linearen, regulären) Grammatik $G = (N,T,P,S)$ mit der oben definierten Bewertung φ erzeugt, wenn sie von der kontextfreien (linearen, regulären) Kantengrammatik $\Gamma = (N,X,T,P,S)$ erzeugt wird.*

Beweis. Für $\alpha \in T^*$ gilt $\varphi(\alpha) = |\mathrm{pr}_1(\alpha)| - |\mathrm{pr}_2(\alpha)|$ und damit $\alpha \in L(G,\varphi) \iff \alpha \in L(\Gamma)$. □

Satz 3.2.2 *Für $Y \in \{CF, LIN, REG\}$ gilt:*

1. $\mathcal{V}1(\mathrm{SYN} - Y) = \mathcal{V}(\mathrm{SYN} - Y) = \mathcal{L}(Y)$,
2. $\mathcal{V}(Y) \subsetneq \mathcal{V}1(Y) = \mathcal{L}(Val, Y, \mathbf{Z})$.

Beweis. Die erste Aussage wurde bereits in Lemma 3.1.2 gezeigt. Wir zeigen die zweite Aussage für den kontextfreien Fall.

Ist $\Gamma = (N, X, T, P, S)$ eine kontextfreie Kantengrammatik, so erzeugt die kontextfreie $\mathbf{Z}$-Valenzgrammatik $G = (N, X, P', S)$ mit

$$P' = \{(A \to \mathrm{pr}_1(\alpha), |\mathrm{pr}_1(\alpha)| - |\mathrm{pr}_2(\alpha)|) : A \to \alpha \in P\}$$

die Sprache $V1(\Gamma)$. Analog konstruiert man eine kontextfreie Grammatik H mit $L(H) = V2(\Gamma)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z})$ unter Vereinigung folgt $V(\Gamma) \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Z})$.

Sei schließlich $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie $\mathbf{Z}$-Valenzgrammatik mit Valenzregeln der Form $(A \to BC, 0)$, $(A \to a, r), r \in \{-1, 0, 1\}$ (nach Satz 2.4.1 kann man dies o.B.d.A. voraussetzen). Man konstruiert die kontextfreie Kantengrammatik $\Gamma = (N, X, X^2, P', S)$ mit

$$\begin{aligned} P' \;=\; & \{A \to BC : (A \to BC, 0) \in P\} \cup \{A \to (a, \#) : (A \to a, 0) \in P\} \cup \\ & \{A \to (a, \#\#) : (A \to a, -1) \in P\} \cup \{A \to (a, \lambda) : (A \to a, 1) \in P\}\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $L(G) = V1(\Gamma)$. Die Echtheit der ersten Inklusion ergibt sich aus der folgenden Behauptung. □

Behauptung 3.2.3 *1.* $L_1 = \{a^n b^n : n \geq 1\} \in \mathcal{L}(Val, REG, \mathbf{Z}) \setminus \mathcal{V}(REG)$

2. $L_2 = \{a^n b^n c^n d^n : n \geq 1\} \in \mathcal{L}(Val, LIN, \mathbf{Z}) \setminus \mathcal{V}(CF)$

Beweis. Daß die oben genannten Sprachen in den entsprechenden Familien von Valenzsprachen liegen, ist klar. Wir zeigen mit Hilfe des Iterationslemmas für kontextfreie Grammatiken mit bewertetem Alphabet (Lemma 2.6.5), daß L_2 nicht die Knotensprache einer kontextfreien Kantengrammatik sein kann.

Anderenfalls wäre die zugehörige Kantensprache $E_2 = \{(v, v) : v \in L_2\}$ wegen $s_{L_2}(n) \leq 1$ für alle $n \geq 0$. Sei nun Γ eine kontextfreie Kantengrammatik mit $E(\Gamma) = E_2$. O.B.d.A. sei $T = (\{a, b, c, d\} \times \{\lambda\}) \cup (\{\lambda\} \times \{a, b, c, d\})$ das Terminalalphabet von Γ. Seien n die zu $L(\Gamma)$ gehörige Konstante aus dem Iterationslemma und I bzw. I' die iterativen Quadrupel bzw. Paare. Dann ist z mit $\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z) = (a^n b^n c^n d^n, a^n b^n c^n d^n)$ in $L(\Gamma)$ enthalten.

Seien nun $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ein iteratives Quadrupel aus I und $z = uvwxy$ eine Zerlegung mit $z' = u\alpha^2 v\beta^2 w\gamma^2 x\delta^2 y \in E_2$. Um $\mathrm{pr}_1(z') \in a^* b^* c^* d^*$ zu gewährleisten, müssen die Projektionen auf die erste Komponente von α, β, γ und δ in $a^* \cup b^* \cup c^* \cup d^*$ enthalten sein. Damit $\mathrm{pr}_1(z')$ in L_2 ist, muß sogar $\mathrm{pr}_1(\alpha) = a^r, \mathrm{pr}_1(\beta) = b^r, \mathrm{pr}_1(\gamma) = c^r, \mathrm{pr}_1(\delta) = d^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$ gelten. Analog muß $\mathrm{pr}_2(\alpha) = a^s, \mathrm{pr}_2(\beta) = b^s, \mathrm{pr}_2(\gamma) = c^s, \mathrm{pr}_2(\delta) = d^s$ für ein $s \in \mathbb{N}$ erfüllt sein. Um $|\mathrm{pr}_1(z')| = |\mathrm{pr}_2(z')|$ zu erfüllen, muß $r = s$ gelten. Daraus folgt, daß α, β, γ, δ jeweils die Bewertung 0 besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Aussage des Iterationslemma, daß wenigstens eines dieser Wörter eine von 0 verschiedene Bewertung hat.

Für ein iteratives Paar (α, β) aus I' und jede Zerlegung $z = uvw$ kann man gleichfalls zeigen, daß das zu $u\alpha^2 v\beta^2 w$ gehörige Wortpaar nicht in E_2 ist. □

Im Falle synchroner und regulärer Kantengrammatiken lassen sich außerdem Verbindungen zwischen dem Knotengrad und dem Grad der Mehrdeutigkeit eines endlichen Automaten herstellen.

Lemma 3.2.4 *Es sei* $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$ *eine synchrone und reguläre Kantengrammatik. Es existiert ein endlicher Automat* $\mathcal{A}$ *mit* $L(\mathcal{A}) = V(\Gamma)$ *und* $d_{\mathcal{A}}(w) = d_{out}(w|\Gamma) + 1$ *für alle* $w \in V1(\Gamma)$.

Beweis. Es sei $\mathcal{A}_1 = (Z, X^2, z_0, \delta, F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit $L(\mathcal{A}_1) = E' = E(\Gamma) \cup \{(v, v) : v \in V1(\Gamma)\}$. Dann ergibt sich $\mathcal{A}$ als $\mathcal{A} = (Z', X, z_0, \delta', F')$ mit

$$\begin{aligned}
Z' &= Z \times X \cup \{z_0\}, \\
\delta' &= \{(z_0, a, (z, b)) : a, b \in X, z \in Z, \delta(z_0, (a, b)) = z\} \cup \\
&\quad \{((z_1, c), a, (z_2, b)) : a, b, c \in X, z_1, z_2 \in Z, \delta(z_1, (a, b)) = z_2\}, \\
F' &= F \times X \cup S \text{ mit } S = \emptyset, \text{ falls } z_0 \notin F,\ S = \{z_0\}, \text{ falls } z_0 \in F.
\end{aligned}$$

Wie man leicht durch vollständige Induktion über die Wortlänge sieht, gibt es für das Wort $a_1 \cdots a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in X$ für $1 \le i \le n$, genau dann einen Lauf des Automaten $\mathcal{A}$ mit der Zustandsfolge $z_0, (z_1, b_1), \ldots, (z_n, b_n)$, wenn es für das Wort $(a_1, b_1) \cdots (a_n, b_n)$ einen Lauf des Automaten $\mathcal{A}_1$ mit der Zustandsfolge $z_0, z_1, \ldots, z_n$ gibt. Damit ist für ein Wort $v \in X^*$ der Grad der Mehrdeutigkeit von v bezüglich $\mathcal{A}$ gleich der Zahl der Wörter w mit $(v, w) \in E'$. Wegen $(v, v) \in E'$ ist dies gerade $d_{out}(v|\Gamma) + 1$. □

3.3 Erzeugungskraft von Kantengrammatiken

Wesentliche Aussagen über strukturelle Eigenschaften der von synchronen regulären Kantengrammatiken erzeugten Graphenfamilien lassen sich leicht aus Resultaten über die Strukturfunktion regulärer Sprachen gewinnen.

Lemma 3.3.1 *Es sei* L *eine reguläre Sprache.*

1. *Es gibt Konstanten* c_0, k_0*, so daß* $\mathrm{card}\ s_L^{-1}(k) \le c_0$ *für alle* $k \ge k_0$ *gilt.*

2. *Es gibt Konstanten n_0, p, α mit $s_L(n+p) \leq \alpha s_L(n)$ für alle $n \geq n_0$.*

Beweis. Nach [35, Lemma III.7.4] existieren eine Zahl p und eine Zahl n_0 mit

$$s_L(n_0 + i + np) = g_i(n), \ (i = 0, \ldots, p-1), n \geq 0,$$

wobei $g_0, \ldots, g_{p-1}$ D0L-Wachstumsfunktionen sind.

Wir betrachten jetzt eine D0L-Wachstumsfunktion g. Ist g beschränkt, so gibt es eine Konstante $m_0(g)$ mit card $g^{-1}(m) = 0$ für alle $m \geq m_0(g)$. Ist g unbeschränkt, so ist die von einem D0L-System G mit $g_G = g$ erzeugte Sprache M unendlich. In diesem Falle sind alle Glieder der Folge $S(G)$ verschieden, und card $g^{-1}(m) =$ card $\{w \in M : |w| = m\} = s_M(m)$ für alle $m \geq 0$. Zusammenfassend gilt für beliebige D0L-Wachstumsfunktionen g: Es gibt ein $m_0(g)$, so daß card $g^{-1}(m) = s_M(m)$ für alle $m \geq m_0(g)$ erfüllt ist. Da D0L-Sprachen schlank sind [7], gibt es eine Konstante $c_0(g)$ mit card $g^{-1}(m) \leq c_0(g)$ für alle $m \geq m_0(g)$.

Setzt man jetzt $k_0 = \max\{m_0(g_i) : i = 0, \ldots, p-1\}$ und $c_0 = \max\{c_0(g_i) : i = 0, \ldots, p-1\}$, so erhält man die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß für jede D0L - Wachstumsfunktion g ein α mit $g(n+1) \leq \alpha g(n)$ existiert, siehe [35, Theorem III.7.6]. □

Satz 3.3.2 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik.*

1. *Es gibt eine Zahl k, so daß $\mathcal{G}(\Gamma)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ höchstens k paarweise nichtisomorphe Graphen mit n Knoten enthält.*

2. *Es gibt eine Zahl $\alpha > 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß es für jeden Graphen $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ mit $n > n_0$ Knoten einen Graphen $H \in \mathcal{G}(\Gamma)$ mit mindestens n/α und weniger als n Knoten gibt.*

Beweis.

1. Nach Lemma 3.3.1 gibt es Konstanten c_0, n_0 mit $s^{-1}_{V(\Gamma)}(n) \leq c_0$ für alle $n \geq n_0$. Da $s_{V(\Gamma)}(m)$ gleich der Zahl der Knoten von $G_m(\Gamma)$ ist, gibt es in $\mathcal{G}(\Gamma)$ für $n \geq n_0$ höchstens c_0 Graphen mit n Knoten. Die Anzahl c_1 der paarweise nichtisomorphen mit höchstens n_0 Knoten ist endlich. Mit $k = \max\{c_0, c_1\}$ ist die erste Behauptung gezeigt.

2. Dies folgt unmittelbar aus der zweiten Aussage von Lemma 3.3.1. □

Damit ist gezeigt, daß synchrone reguläre Kantengrammatiken zum einen nur „schlanke“ Graphensprachen erzeugen können, die Zahl der nichtisomorphen Graphen mit gleicher Knotenzahl also beschränkt ist, und andererseits das Wachstum der Knotenzahl innerhalb der Graphenfolge höchstens exponentiell ist. Analoge Resultate gelten auch für die Kantenzahlen. Als eine erste Anwendung zeigen wir:

Satz 3.3.3 *Es gibt eine Graphensprache $[\mathcal{G}]$, die durch reguläre bzw. synchrone lineare, jedoch nicht durch synchrone reguläre Kantengrammatiken erzeugt werden kann.*

Beweis. Es sei $L = \{a,b\}^* \setminus \{(a^k b)^{k+1} : k \geq 0\}$. L ist sowohl in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Z})$ als auch in $\mathcal{L}(\mathrm{LIN})$ enthalten, siehe Beispiel 2.2.1. Es gibt eine reguläre bzw. eine synchrone lineare Kantengrammatik Γ mit

$$E(\Gamma) = \{(v,w) : v,w \in \{a,b\}^*, |v| = |w|\} \cup \{(c^{|w|}, w) : w \in L\} \cup \{(w, c^{|w|}) : w \in L\}.$$

Der Graph $G_n(\Gamma)$, $n \geq 1$, enthält $2^n + 1$ Knoten. Er ist genau dann vollständig, wenn n keine Quadratzahl ist. Gäbe es nun eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $[\mathcal{G}](\Theta) = [\mathcal{G}](\Gamma)$, so würde nach Satz 3.5.12 auch eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ' derart existieren, daß $[\mathcal{G}](\Theta')$ die nicht vollständigen Graphen aus $[\mathcal{G}](\Theta)$ enthält. Die Menge der Knotenzahlen der Graphen aus $[\mathcal{G}](\Theta')$ wäre $\{2^{k^2} + 1 : k \geq 1\}$, im Widerspruch zur zweiten Aussage von Satz 3.3.2. □

3.4 Kantengrammatiken mit kürzbarer Graphenfolge

Kantengrammatiken mit kürzbarer Graphenfolge besitzen eine besondere Bedeutung, da die Kontraktion von großen auf kleine Graphen der Folge in diesem Fall besonders einfach realisiert werden kann. In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, daß man eine beliebige von einer synchronen regulären Kantengrammatik erzeugte Graphenfolge $\mathcal{G}$ in eine kürzbare Graphenfolge $\mathcal{H}$ gleichen Typs „einbetten“ kann (d.h., die n-ten Graphen von $\mathcal{G}$ sind Untergraphen der n-ten Graphen von $\mathcal{H}$), ohne die Größe der Graphen sowie den Knotengrad übermäßig zu erhöhen. Anschließend wird gezeigt, daß synchrone reguläre Kantengrammatiken mit im strengen Sinne 1-kürzbaren Graphenfolgen äquivalent zu einer speziellen Art von parallelen Knotenersetzungsgrammatiken sind.

Als erstes zeigen wir einige einfache Fakten über kürzbare Kantengrammatiken. Dabei wird die Eigenschaft der Kürzbarkeit von Graphenfolgen auf eine analoge Eigenschaft für Sprachen zurückgeführt.

Definition 3.4.1 *Es sei X ein Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq X^*$ heißt*

- k-kürzbar *für $k \geq 1$, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $w \in L$ mit $|w| \geq n_0 + k$ auch* $\mathrm{pref}_{|w|-k}(w)$ *in L enthalten ist.*
- im strengen Sinne k-kürzbar *für $k \geq 1$, wenn in der obigen Aussage zusätzlich $n_0 = 0$ gilt,*
- kürzbar, *wenn ein $k \geq 1$ existiert, so daß L k-kürzbar ist.*

Aus den Definitionen der Kürzbarkeit von Graphenfolgen bzw. Sprachen folgt unmittelbar:

Lemma 3.4.1 *Es sei $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$ eine Kantengrammatik mit $Id_{V(\Gamma)} \subseteq E(\Gamma)$. Für $k \geq 1$ ist $\mathcal{G}(\Gamma)$ genau dann (als Graphenfolge) k-kürzbar bzw. im strengen Sinne k-kürzbar, wenn $L(\Gamma)$ (als Sprache) k-kürzbar bzw. im strengen Sinne k-kürzbar ist.*

Bemerkung: Nach Lemma 3.1.1 und Lemma 3.1.2 kann man für synchrone Kantengrammatiken immer eine äquivalente synchrone Kantengrammatik gleichen Typs finden, welche die Voraussetzung des Lemmas erfüllt.

Lemma 3.4.2 *Gegeben sei eine reguläre Sprache $L \subseteq X^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *L ist präfixabgeschlossen (d.h., aus $vw \in L$ folgt $v \in L$ für alle $v, w \in X^*$).*
2. *L ist im strengen Sinne 1-kürzbar.*
3. *L wird durch einen partiellen deterministischen endlichen Automaten akzeptiert, der nur Endzustände besitzt.*
4. *L wird durch einen nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptiert, der nur Endzustände besitzt.*

Beweis. Die Implikationen (1) $\to$ (2), (3) $\to$ (4) und (4) $\to$ (1) sind trivial.

Um (2) $\to$ (3) zu beweisen, betrachten wir für eine im strengen Sinne 1-kürzbare Sprache L einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Z, X, z_0, \delta, F)$ mit $L(\mathcal{A}) = L$. Für alle $z \in Z \setminus F$ und alle $a \in X$ gilt $\delta(z, a) \in Z \setminus F$. Der partielle deterministische endliche Automat $\mathcal{A}' = (F, X, z_0, \delta', F)$ mit $\delta' = \delta \cap F \times X \times F$ akzeptiert ebenfalls L und besteht nur aus Endzuständen.

Satz 3.4.3 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Dann existiert eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ, so daß $G_n(\Gamma)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Teilgraph von $G_n(\Theta)$ ist und $\mathcal{G}(\Theta)$ im strengen Sinne 1-kürzbar ist. Wächst außerdem die Zahl der Knoten, die Zahl der Kanten bzw. der maximale Knotengrad von $G_n(\Gamma)$ polynomiell, so wachsen die entsprechenden Parameter von $G_n(\Gamma)$ mit dem gleichen Grad polynomiell.*

Beweis. Es sei $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$ eine synchrone reguläre Kantengrammatik mit $\mathrm{Id}_{V(\Gamma)} \subseteq E(\Gamma)$. Da die Familie der regulären Sprachen abgeschlossen unter Präfixbildung ist, gibt es eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $L(\Theta) = \mathrm{pref}(L(\Gamma))$. Es gilt $L(\Gamma) \subseteq L(\Theta)$, und folglich ist $G_n(\Gamma)$ ein Teilgraph von $G_n(\Theta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist $L(\Theta)$ präfixabgeschlossen, und damit ist $\mathcal{G}(\Theta)$ im strengen Sinne 1-kürzbar.

Da $L(\Gamma)$ eine reguläre Sprache ist, gibt es eine Konstante k derart, daß zu jedem $z \in \mathrm{pref}(L(\Gamma))$ ein $z' \in L(\Gamma)$ mit $z \sqsubseteq z'$ und $|z'| \leq |z| + k$ existiert. Damit gibt es zu jedem Paar

$(v, w) \in E(\Theta)$ ein Paar $(v', w') \in E(\Gamma)$ mit $v \sqsubseteq v'$, $w \sqsubseteq w'$ und $|v'| = |w'| \leq |v|+k = |w|+k$. Die Zahl der Kanten von $G_n(\Theta)$ kann somit wie folgt abgeschätzt werden:

$$\text{card } E_n(\Gamma) \leq \text{card } E_n(\Theta) \leq \sum_{i=n}^{n+k} E_i(\Gamma) \leq (k+1) \max\{E_i(\Gamma) : n \leq i \leq n+k\}\,.$$

Eine analoge Abschätzung ergibt sich für die Zahl der Knoten. Für den Ausgangsgrad von v gilt:

$$\begin{aligned} d_{out}(v|\Gamma) &\leq d_{out}(v|\Theta) \leq \sum_{v' : v \sqsubseteq v' \wedge |v'| \leq |v|+k} d_{out}(v'|\Gamma) \\ &\leq (\text{card } X)^{k+1} \max\{d_{out}(v'|\Gamma) : v \sqsubseteq v' \wedge |v'| \leq |v|+k\}\,. \end{aligned}$$

□

Im Rest dieses Abschnittes beschäftigen wir uns mit der Beziehung zwischen Kantengrammatiken und Knotenersetzungsgrammatiken. Als erstes führen wir den Begriff des knoten- und kantenmarkierten Graphen ein.

Es seien X (die Menge der Knotenmarken) und Y (die Menge der Kantenmarken) zwei endliche Mengen. Ein *gerichteter knoten- und kantenmarkierter Graph über* (X, Y) ist ein Tripel $G = (V, E, \varphi)$. Dabei ist V eine endliche Menge von Knoten, $E \subseteq V \times Y \times V$ eine Menge gerichteter und markierter Kanten und $\varphi : V \to X$ die Knotenmarkierung. Der Graph $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v, w) : \exists \alpha((v, \alpha, w) \in E)\}$ wird als der G zugrundeliegende Graph bezeichnet. Ist Y einelementig, so nennt man einen knoten- und kantenmarkierten Graphen über (X, Y) einfach einen knotenmarkierten Graphen über X und gibt nur das Tripel (V, E', φ) an.

Wortgrammatiken werden zu Graphgrammatiken erweitert, indem Regeln zu Graphersetzungsregeln verallgemeinert werden. Eine Graphersetzungsregel $(M \to D, E)$ besteht aus dem markierten Muttergraphen M, dem markierten Tochtergraphen D und der Einbettungsvorschrift E. In einem Ableitungsschritt wird ein zu M isomorpher Untergraph M' (einschließlich seiner Kanten zum Rest des Graphen) durch einen zu D isomorphen Graphen D' ersetzt. Anschließend wird D' mit den Nachbarknoten von M' entsprechend der Einbettungsvorschrift durch Kanten verbunden.

Von besonderem Interesse sind „kontextfreie“ Graphgrammatiken, bei denen die Muttergraphen markierte Knoten bzw. markierte Kanten sind. Die entsprechenden *Knoten-* bzw. *Kantenersetzungsgrammatiken* sowie die allgemeineren *Hyperkantenersetzungsgrammatiken* wurden in den letzten Jahren ausführlich untersucht. Überblicke zu den Ergebnissen findet man für Knotenersetzungsgrammatiken in [13, 14] und für Hyperkantenersetzungsgrammatiken in [10, 17].

Für 1-kürzbare Kantengrammatiken bietet sich der Vergleich mit deterministischen parallelen Knotenersetzungsgrammatiken an. Enthält der Graph G_n einen Knoten $v \in X^{[n]}$ und enthält G_{n+1} die Knoten $va_1, \ldots, va_k$, $a_1, \ldots, a_k \in X$, so kann dies als Ersetzung des Knoten v durch den von $va_1, \ldots, va_k$ induzierten Teilgraphen interpretiert werden.

Diese Feststellung wird im folgenden formal bewiesen, indem die Äquivalenz von im strengen Sinne 1-kürzbaren synchronen regulären Kantengrammatiken und einer parallelen deterministischen Variante von Knotenersetzungsgrammatiken gezeigt wird.

Zunächst definieren wir die passende parallele Variante von Knotenersetzungsgrammatiken. Es handelt sich um eine spezielle *NLC-Grammatik*. NLC-Grammatiken (*node label controlled graph grammars*) sind Knotenersetzungsgrammatiken, bei denen die Einbettungsvorschrift eine zweistellige Relation über dem Knotenalphabet ist. Jeder Knoten des eingesetzten Graphen wird mit einem Nachbar des ersetzten Knotens genau dann verbunden, wenn ihre Knotenmarkierungen in der Einbettungsrelation enthalten sind. NLC-Grammatiken gehören zu den ältesten und am meisten erforschten Varianten von Graphgrammatiken.

In einem Ableitungsschritt einer *parallelen NLC-Grammatik* werden alle Knoten des Graphen gleichzeitig durch paarweise disjunkte Graphen ersetzt. Anschließend werden die aus benachbarten Knoten hervorgegangenen Teilgraphen entsprechend der Einbettungsrelation miteinander verbunden. Verschiedene Versionen paralleler NLC-Grammatiken werden in [24, 25] sowie in [31] untersucht. Die hier verwendete Variante arbeitet mit gerichteten, knoten- und kantenmarkierten Graphen und ist deterministisch (zu jeder Knotenmarkierung gibt es genau eine Ableitungsregel).

Die Definition erfolgt derart, daß die Knoten eines in n parallelen Schritten erzeugten Graphen Wörter der Länge n sind. Dadurch lassen sich leichter Beziehungen zu Kantengrammatiken herstellen; es bedeutet jedoch keine Einschränkung gegenüber den in [24, 25] betrachteten parallelen NLC-Grammatiken.

Definition 3.4.2 *Eine* parallele deterministische NLC-Grammatik (PDNLC-Grammatik) *ist ein Tupel $\Gamma = (\Sigma, \Delta, P, \mathcal{C}, S)$, bestehend aus den Alphabeten der Knotenmarkierungen bzw. der Kantenmarkierungen Σ bzw. Δ, der Regelmenge P, die eine Abbildung von Σ in die Menge der (Σ, Δ)-markierten gerichteten Graphen ist, dem Startsymbol $S \in \Sigma$ und der Einbettungsrelation $\mathcal{C} \subseteq \Delta \times \Sigma \times \Delta \times \Sigma$.*

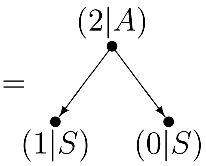
Für $A \in \Sigma$ wird der markierte Graph $P(A)$ auch mit G_A, seine Knotenmenge mit V_A, seine Kantenmenge mit E_A und die Knotenmarkierung mit φ_A bezeichnet. Das Knotenalphabet X_Γ von Γ ist definiert als $X_\Gamma = \bigcup_{A \in \Sigma} V_A$.

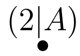
Für $n \geq 0$ wird der n-te von Γ erzeugte markierte Graph $G_n(\Gamma) = (V_n, E_n, \varphi_n)$ wie folgt induktiv definiert:

1. $V_0 = \{\lambda\}$, $E_0 = \emptyset$, $\varphi_0(\lambda) = S$.
2. *Gilt $V_n \subseteq X_\Gamma^{[n]}$, so ergibt sich $G_{n+1}(\Gamma)$ folgendermaßen:*
   - *Jeder Knoten $v \in V_n$ wird durch den markierten Graphen H_v ersetzt; H_v ist isomorph zu $G_{\varphi_n}(v)$, wobei ein Knoten $a \in V_{\varphi_n(v)}$ auf den Knoten va in H_v abgebildet wird.*
   - *Eine Kante (v', β, w'), wobei v' bzw. w' Knoten in H_v bzw. H_w mit $v \neq w$ sind, existiert genau dann, wenn es in $G_n(\Gamma)$ eine Kante (v, α, w) mit $(\alpha, \varphi_{n+1}(v'), \beta, \varphi_{n+1}(w')) \in \mathcal{C}$ gibt.*

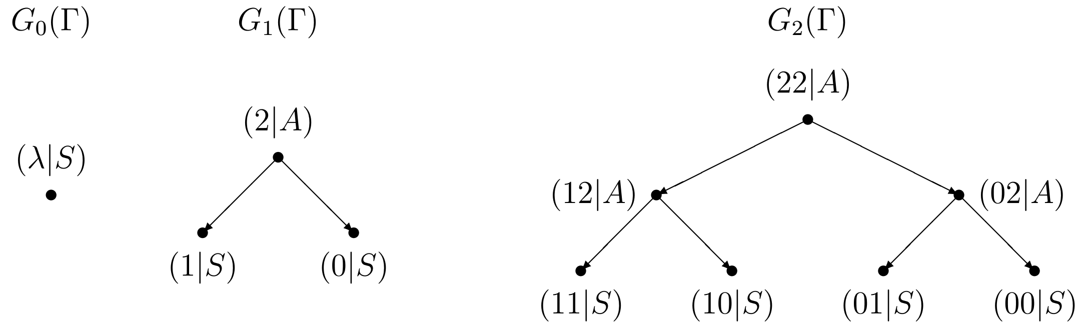
Der zu $G_n(\Gamma)$ gehörige unmarkierte Graph wird mit $G'_n(\Gamma)$ bezeichnet.

Beispiel 3.4.1 Es sei $\Gamma = (\{S, A\}, \{\alpha\}, P, \mathcal{C}, S)$ mit $\mathcal{C} = \{(\alpha, A, \alpha, A)\}$ und

$P(S) =$ 

$P(A) =$ 

(Die Schreibweise $(v|C)$ bedeutet, daß der Knoten v die Markierung C besitzt.) Die Graphen $G_0(\Gamma)$, $G_1(\Gamma)$, $G_2(\Gamma)$ sehen folgendermaßen aus:



Wie man leicht sieht, ist der zugehörige unmarkierte Graph für $G_n(\Gamma)$ identisch mit $G_n(\Gamma_1)$ aus Beispiel 3.1.2.

Satz 3.4.4 *Zu jeder PDNLC-Grammatik Γ gibt es eine im strengen Sinne 1-kürzbare Kantengrammatik Θ, so daß für alle $n \geq 0$ die (unmarkierten) Graphen $G'_n(\Gamma)$ und $G_n(\Theta)$ identisch sind.*

Beweis. Es sei die PDNLC-Grammatik $\Gamma = (\Sigma, \Delta, P, \mathcal{C}, S)$ gegeben. Von Γ ausgehend konstruieren wir den nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (Z, X_\Gamma \times X_\Gamma, S, \delta, Z)$ mit

$$\begin{aligned}
Z &= \Sigma \cup (\Sigma \times \Delta \times \Sigma) \\
\delta &= \{(A, (x, x), B) : A \in \Sigma, x \in V_A, \varphi_A(x) = B\} \cup \\
&\quad \{(A, (x, y), (\varphi_A(x), \alpha, \varphi_A(y))) : A \in \Sigma, (x, \alpha, y) \in E_A\} \cup \\
&\quad \{((A, \alpha, B), (x, y), (\varphi_A(x), \beta, \varphi_B(y))) : \\
&\quad A, B \in \Sigma, \alpha \in \Delta, x \in V_A, y \in V_B, (\alpha, \varphi_A(x), \beta, \varphi_B(y)) \in \mathcal{C}\}
\end{aligned}$$

Offenbar gibt es für alle $A \in \Sigma$ und alle $a \in X$ höchstens ein B mit $(A, (a, a), B) \in \delta$ (und dieses B ist aus Σ). Folglich gibt es auch für alle $w \in X^*$ und alle $A \in \Sigma$ höchstens ein B mit $(A, (w, w), B) \in \delta$. Im folgenden schreiben wir deshalb $\delta(A, (w, w)) = B$ statt $(A, (w, w), B) \in \delta$.

Durch vollständige Induktion über n zeigen wir jetzt:

1. $G_n(\Gamma)$ enthält genau dann den Knoten $w \in X_\Gamma^{[n]}$ mit der Markierung $A \in \Sigma$, wenn $\delta(S,(w,w)) = A$ gilt.

2. $G_n(\Gamma)$ enthält genau dann die Kante (v,α,w), $v,w \in X_\Gamma^{[n]}, \alpha \in \Delta$, wenn $v,w \in V_n(\Gamma)$ und $(\varphi_n(v),\alpha,\varphi_n(w)) \in \delta\,(S,(v,w))$.

Für $n = 0$ gelten die Behauptungen offenbar. Seien nun für $n \in \mathbb{N}$ beide Behauptungen bewiesen.

1. Für $w \in X_\Gamma^{[n]}$, $a \in X_\Gamma$ und $B \in \Sigma$ gilt:

$$\begin{array}{rl} & wa \in V_{n+1}(\Gamma) \wedge \varphi_{n+1}(wa) = B \\ \iff & w \in V_n(\Gamma) \wedge \exists A\,(\varphi_n(w) = A \wedge a \in V_A \wedge \varphi_A(a) = B) \\ & \text{nach Definition der PDNLC-Grammatik} \\ \iff & \exists A\,(\delta\,(S,(w,w)) = A \wedge \delta\,(A,(a,a)) = B) \\ & \text{nach Induktionsvoraussetzung und Definition von } \mathcal{A} \\ \iff & \delta\,(S,(wa,wa)) = B \\ & \text{nach Definition der Transitionsrelation.} \end{array}$$

2. Für $w \in X_\Gamma^{[n]}$, $a,b \in X_\Gamma$, $a \neq b$, und $\beta \in \Delta$ gilt:

$$\begin{array}{rl} & (wa,\beta,wb) \in E_{n+1}(\Gamma) \\ \iff & w \in V_n(\Gamma) \wedge \exists C\,(\varphi_n(w) = C \wedge a \in V_C \wedge b \in V_C \wedge (a,\beta,b) \in E_C) \\ & \text{nach Definition der PDNLC-Grammatik} \\ \iff & \exists C \exists A \exists B\,\Big(\delta\,(S,(w,w)) = C \wedge \delta\,(C,(a,a)) = A \wedge \delta\,(C,(b,b)) = B \\ & \qquad\qquad \wedge (A,\beta,B) \in \delta\,(C,(a,b))\Big) \\ & \text{nach Induktionsvoraussetzung und Definition von } \mathcal{A} \\ \iff & \exists A \exists B \Big(\delta\,(S,(wa,wa)) = A \wedge \delta\,(S,(wb,wb)) = B \\ & \qquad \wedge (A,\beta,B) \in \delta\,(S,(wa,wb))\Big) \\ & \text{nach Definition der Transitionsrelation} \\ \iff & wa, wb \in V_{n+1}(\Gamma) \wedge (\varphi_{n+1}(wa),\beta,\varphi_{n+1}(wb)) \in \delta\,(S,(wa,wb)) \\ & \text{wegen (1).} \end{array}$$

3. Für $v,w \in X_\Gamma^{[n]}$, $v \neq w$, $a,b \in X_\Gamma$, und $\beta \in \Delta$ gilt:

$$\begin{array}{rl} & (va,\beta,wb) \in E_{n+1}(\Gamma) \\ \iff & \exists \alpha \Big((v,\alpha,w) \in E_n(\Gamma) \wedge a \in V_{\varphi_n(v)} \wedge b \in V_{\varphi_n(w)} \end{array}$$

$$\wedge \left(\alpha, \varphi_{\varphi_n(v)}(a), \beta, \varphi_{\varphi_n(w)}(b)\right) \in \mathcal{C}\Big)$$

nach Definition der PDNLC-Grammatik

$$\iff \exists\alpha\Big((\varphi_n(v), \alpha, \varphi_n(w)) \in \delta\,(S, (v, w)) \wedge$$
$$(\varphi_{\varphi_n(v)}(a), \beta, \varphi_{\varphi_n(w)}(b)) \in \delta((\varphi_n(v), \alpha, \varphi_n(w)), (a, b))\Big)$$

nach Induktionsvoraussetzung und Definition von $\mathcal{A}$

$$\iff (\varphi_{n+1}(va), \beta, \varphi_{n+1}(wb)) \in \delta(S, (va, wb))$$

wegen Definition der Transitionsrelation und $\delta(S, (v, w)) \in \Sigma \times \Delta \times \Sigma$.

Nun kann man die im strengen Sinne 1-kürzbare Kantengrammatik Θ mit $E(\Theta) = L(\mathcal{A})$ konstruieren. Offenbar gilt $(v, v) \in E(\Theta)$ für $v \in X_\Gamma^{[n]}$ genau dann, wenn $v \in V_n(\Gamma)$ und gilt und $(v, w) \in E(\Theta)$ mit $|v| = |w| = n$, $v \neq w$ genau dann, wenn $(v, \alpha, w) \in E_n(\Gamma)$ für ein $\alpha \in \Delta$ erfüllt ist. Damit sind $G_n(\Theta)$ und der zu $G_n(\Gamma)$ gehörige unmarkierte Graph gleich. □

Satz 3.4.5 *Zu jeder streng* 1*-kürzbaren Kantengrammatik* Θ *gibt es eine PDNLC-Grammatik* Γ*, so daß für alle* $n \geq 0$ *die (unmarkierten) Graphen* $G'_n(\Gamma)$ *und* $G_n(\Theta)$ *isomorph sind.*

Beweis. Es sei X das Knotenalphabet von Θ, und $\mathcal{A} = (Z, X \times X, z_0, \delta, Z)$ sei ein partieller deterministischer endlicher Automat, der $E(\Theta) \cup \{(v, v) : v \in V(\Theta)\}$ akzeptiert. Wir konstruieren jetzt die PDNLC-Grammatik $\Gamma = (\Sigma, \Delta, P, \mathcal{C}, (\lambda, z_0))$ mit $X_\Gamma = X$, $\Sigma = X \times Z \cup \{(\lambda, z_0)\}$, $\Delta = Z$, sowie P und $\mathcal{C}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
V_{(a,z)} &= \{b \in X : \delta\,(z, (b, b)) \neq \emptyset\}\,, \text{ für } (a, z) \in (X \times Z) \cup \{(\lambda, z_0)\} \\
\varphi_{(a,z)}(b) &= (b, \delta\,(z, (b, b))) \text{ für } b \in V_{(a,z)}, (a, z) \in X \times Z \cup \{(\lambda, z_0)\} \\
E_{(a,z)} &= \{(b, z', c) \in X \times Z \times X : \delta\,(z, (b, c)) = z', b \neq c\} \text{ für } (a, z) \in X \times Z \cup \{(\lambda, z_0)\} \\
\mathcal{C} &= \{(z, (a, z_1), z', (b, z_2)) : z, z', z_1, z_2 \in Z, a, b \in X, \delta\,(z, (a, b)) = z'\}
\end{aligned}$$

Der Graph $G_0(\Gamma)$ besteht aus dem Knoten λ mit der Markierung S. Durch vollständige Induktion zeigen wir jetzt für $n \geq 1$:

1. $G_n(\Gamma)$ enthält genau dann den Knoten wa mit $w \in X^{[n-1]}, a \in X$ mit der Markierung $A \in X \times Z$, wenn $\delta\,(z_0, (wa, wa)) = z$ und $A = (a, z)$ gilt.

2. $G_n(\Gamma)$ enthält genau dann die markierte Kante $(v, z, w) \in V_n(\Gamma) \times Z \times V_n(\Gamma)$, wenn $\delta(z_0, (v, w)) = z$ gilt.

Für $n = 1$ sind die Behauptungen wegen der Definition von $G_{(\lambda,z_0)}$ erfüllt. Seien nun die Induktionsbehauptungen für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Daraus folgt

1. Für wab, $w \in X^{[n-1]}, a, b \in X,\ z \in Z$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& wab \in V_{n+1}(\Gamma) \wedge \varphi_{n+1}(wab) = (b, z) \\
\Longleftrightarrow\ & wa \in V_n(\Gamma) \wedge b \in V_{\varphi_n(wa)} \wedge \varphi_{\varphi_n(wa)}(b) = (b, z) \\
& \text{nach Definition der PDNLC-Grammatik} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y \left(y \in Z \wedge wa \in V_n(\Gamma) \wedge \varphi_n(wa) = (a, y) \wedge b \in V_{(a,y)} \wedge \varphi_{(a,y)}(b) = (b, z) \right) \\
& \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y \left(y \in Z \wedge \delta\left(z_0, (wa, wa)\right) = y \wedge \delta\left(y, (b, b)\right) = z \right) \\
& \text{nach Induktionsvoraussetzung und Definition von } \Gamma \\
\Longleftrightarrow\ & \delta(z_0, (wab, wab)) = z \\
& \text{nach Definition der Transitionsrelation.}
\end{aligned}
$$

2. Für wab, wac mit $w \in X^{[n-1]}, a, b, c \in X, b \neq c, z \in Z$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& (wab, z, wac) \in E_{n+1}(\Gamma) \\
\Longleftrightarrow\ & wa \in V_n(\Gamma) \wedge (b, z, c) \in E_{\varphi_n(wa)} \\
& \text{nach Definition der PDNLC-Grammatik} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y \left(y \in Z \wedge \delta\left(z_0, (wa, wa)\right) = y \wedge \delta\left(y, (b, c)\right) = z \right) \\
& \text{wegen (1) und nach Definition von } \Gamma \\
\Longleftrightarrow\ & \delta(z_0, (wab, wac)) = z \\
& \text{nach Definition der Transitionsrelation .}
\end{aligned}
$$

3. Für vb, wc mit $v, w \in X^n, b, c \in X, v \neq w, z \in Z$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& (vb, z, wc) \in E_{n+1}(\Gamma) \\
\Longleftrightarrow\ & vb, wc \in V_{n+1}(\Gamma) \wedge \\
& \exists y \Big(y \in Z \wedge (v, y, w) \in E_n(\Gamma) \wedge (y, \varphi_{n+1}(vb), z, \varphi_{n+1}(wc)) \in \mathcal{C} \Big) \\
& \text{nach Definition der PDNLC-Grammatik} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y \exists y_1 \exists y_2 \Big(y, y_1, y_2 \in Z \wedge \delta(z_0, (v, w)) = y \wedge \delta(z_0, (vb, vb)) = y_1 \wedge \\
& \qquad \delta(z_0, (wc, wc)) = y_2 \wedge \delta(y, (b, c)) = z \Big) \\
& \text{nach (1), Induktionsvoraussetzung und Definition von } \Gamma \\
\Longleftrightarrow\ & \delta(z_0, (vb, wc)) = z \\
& \text{wegen 1. und nach Definition der Transitionsrelation.}
\end{aligned}
$$

Damit ist durch vollständige Induktion gezeigt, daß der Graph $G_n(\Gamma)$ genau dann einen Knoten $v \in X^{[n]}$ enthält, wenn es ein $z \in Z$ mit $\delta(z_0, (v, v)) = z$ gibt, d.h. wenn v ein Knoten von $G_n(\Theta)$ ist, und daß $G_n(\Gamma)$ genau dann eine (markierte) Kante (v, z, w) mit

$v, w \in X^{[n]}, v \neq w$, $z \in Z$, enthält, wenn $\delta(z_0, (v, w)) = z$ gilt, d.h. wenn (v, w) eine Kante von $G_n(\Theta)$ ist. Damit sind der zu $G_n(\Gamma)$ gehörende unmarkierte Graph und $G_n(\Theta)$ gleich. □

3.5 Abschlußeigenschaften

Analog zur Theorie der formalen Sprachen untersucht man für Familien von Graphensprachen das Abschlußverhalten unter mengentheoretischen Operationen, wie z.B. Vereinigung oder Durchschnitt, wobei sich diese Operationen auf die Äquivalenzklassen isomorpher Graphen beziehen. Darüber hinaus ist es für Graphensprachen interessant, den Abschluß unter graphentheoretischen Operationen (z.B. Bildung des Komplementärgraphen) bzw. graphentheoretischen Eigenschaften (z.B. Zusammenhang) zu untersuchen.

Abschluß unter Mengenoperationen

Satz 3.5.1 *Es seien Γ_1 und Γ_2 synchrone reguläre Kantengrammatiken. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ derart konstruieren, daß $[\mathcal{G}](\Theta) = [\mathcal{G}](\Gamma_1) \cup [\mathcal{G}](\Gamma_2)$ gilt.*

Beweis. Es seien Γ_1 und Γ_2 mit dem gemeinsamen Knotenalphabet X gegeben. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $E(\Theta) = h(E(\Gamma_1)) \cup (a, a)h(E(\Gamma_2))$ konstruieren, wobei $h : (X \times X)^* \to (X \times X)^*$ der Homomorphismus mit $h(x) = xx$ für $x \in (X \times X)$ und a ein Symbol aus X sind.

Für alle $n \geq 0$ ist $G_{2n}(\Theta)$ isomorph zu $G_n(\Gamma_1)$, wobei ein Knoten $v = a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n \in V_n(\Gamma_1)$ auf den Knoten $v' = a_1a_1a_2a_2 \ldots a_{n-1}a_{n-1}a_na_n \in V_n(\Gamma_1)$ abgebildet wird. Analog ist der Graph $G_{2n+1}(\Theta)$ für beliebiges $n \geq 0$ zum Graphen $G_n(\Gamma_2)$ isomorph. Damit gilt $[\mathcal{G}](\Theta) = [\mathcal{G}](\Gamma_1) \cup [\mathcal{G}](\Gamma_2)$.

Als nächstes werden wir zeigen, daß die Familie der von synchronen regulären Kantengrammatiken erzeugten abstrakten Graphensprachen nicht unter Durchschnitt abgeschlossen ist.

Zunächst zeigen wir einige Hilfsresultate, die auch bei Unentscheidbarkeitsbeweisen von Nutzen sein werden. Es seien X ein Alphabet und $\# \notin X$ ein Symbol. Für ein Wort $w \in X^*\#X^*$ mit $w = w_1\#w_2$ sei $\mathrm{word}(w)$ das Wort $w_1w_2 \in X^*$ und $\mathrm{num}(w)$ die Position, an der das Symbol # auftritt, also $|w_1| + 1$. Für eine Relation $R \subseteq X^* \times X^*$ sei

$$R \amalg \# := \{(v, w) : v, w \in X^*\#X^* \wedge (\mathrm{word}(v), \mathrm{word}(w)) \in R \wedge \mathrm{num}(v) + 1 = \mathrm{num}(w)\}.$$

Lemma 3.5.2 *Ist $R \subseteq X^* \times X^*$ eine synchrone reguläre Relation, so ist auch $R \amalg \#$ eine synchrone reguläre Relation.*

Beweis. Es sei $\mathcal{A} = (Z, X \times X, z_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit $L(\mathcal{A}) = R$. Dann wird die Relation $R\amalg\#$ von dem endlichen (Wort-)Automaten $\mathcal{A}' = (Z \cup Z', X' \times X', z_0, \delta \cup \delta', F')$

mit $Z' = Z \times \{1\}$, $X' = X \cup \{\#\}$, $F' = F \times \{1\}$ und

$\delta' = \{((z_1, 1), (a, b), (z_2, 1)) : (z_1, (a, b), z_2) \in \delta\} \cup \{(z_1, (\#, b)(a, \#), (z_2, 1)) : (z_1, a, b, z_2) \in \delta\}$

akzeptiert.

Lemma 3.5.3 *Es seien X ein Alphabet, $\# \notin X$ ein Symbol, $R \subseteq X^* \times X^*$ eine synchrone Relation und $E = R \amalg \#$. Es gelten folgende Aussagen:*

1. *Für $n \geq 2$ existiert in $G_n(E)$ ein gerichteter Weg der Länge $j \geq 1$ von $v \in V_n(E)$ nach $w \in V_n(E)$ genau dann, wenn $\mathrm{num}(w) - \mathrm{num}(v) = j$ und $(v, w) \in R^j$ gelten.*

2. *Ist R eine partielle Funktion, so ist $G_n(E)$ für alle $n \geq 2$ ein umgekehrt gerichteter Wald.*

3. *Ist R eine bijektive Funktion, so besteht $G_n(E)$ für alle $n \geq 2$ aus $(\mathrm{card}\ X)^{n-1}$ Komponenten, die jeweils gerichtete Wege der Länge $n-1$ sind. Dabei gilt $\mathrm{num}(s) = 1$ für jeden Startknoten s und $\mathrm{num}(t) = |t|$ für jeden Endknoten t.*

Beweis.

1. Ein gerichteter Weg der Länge 1 existiert von $v \in V_n(E)$ nach $w \in V_n(E)$ genau dann, wenn $(v, w) \in E$ gilt, d.h., wenn $\mathrm{num}(w) - \mathrm{num}(v) = 1$ und $(\mathrm{word}(v), \mathrm{word}(w)) \in R$ erfüllt sind.

   Sei nun für $j \geq 1$ gezeigt, daß ein gerichteter Weg der Länge j von v nach w genau dann existiert, wenn $\mathrm{num}(w) - \mathrm{num}(v) = j$ und $(\mathrm{word}(v), \mathrm{word}(w)) \in R^j$ gelten. Ein gerichteter Weg der Länge $j+1$ von v nach w existiert genau dann, wenn es einen gerichteten Weg der Länge j von v nach w' und einen gerichteten Weg der Länge 1 von w' nach w für einen Knoten $w' \in V_n(E)$ gibt. Nach Induktionsannahme und Induktionsanfang ist das genau dann der Fall, wenn es ein w' gibt, so daß

   $$\begin{aligned} &\mathrm{num}(w') - \mathrm{num}(v) = j,\ \mathrm{num}(w) - \mathrm{num}(w') = 1, \\ &(\mathrm{word}(v), \mathrm{word}(w')) \in R^j,\ (\mathrm{word}(w'), \mathrm{word}(w)) \in R. \end{aligned}$$

   Dies ist äquivalent zu $\mathrm{num}(w) - \mathrm{num}(v) = j + 1$ und $(\mathrm{word}(v), \mathrm{word}(w)) \in R^{j+1}$.

2. Nach (1) ist $G_n(E)$ für $n \geq 2$ azyklisch. Ist R eine partielle Funktion, so hat außerdem jeder Knoten $v \in V_n(E)$ mit $\mathrm{num}(v) < n$ den Ausgangsgrad 1 und jeder Knoten $v \in V_n(E)$ mit $\mathrm{num}(v) = n$ den Ausgangsgrad 0, womit $G_n(E)$ ein umgekehrt gerichteter Wald ist.

3. Ist R eine bijektive Funktion, so hat zusätzlich zu (2) jeder Knoten $v \in V_n(E)$ mit $\mathrm{num}(v) > 1$ den Eingangsgrad 1 und jeder Knoten $v \in V_n(E)$ mit $\mathrm{num}(v) = 1$ den Eingangsgrad 0. Wegen (1) sind die Komponenten von $G_n(E)$ gerichtete Wege der Länge $n - 1$ mit $\mathrm{num}(s) = 1$ für jeden Startknoten s und $\mathrm{num}(t) = n$ für jeden Endknoten t. Da $G_n(E)$ genau $(\mathrm{card}\ X)^{n-1}$ Knoten s mit $\mathrm{num}(s) = 1$ besitzt, ist die Anzahl der Komponenten $(\mathrm{card}\ X)^{n-1}$.

Beispiel 3.5.1 Es sei $X = \{a, b, c, d\}$ und $R_A \subseteq X^* \times X^*$ die synchrone Relation mit

$$\begin{aligned}
R_A &= R_B \cup R_C \cup R_D \cup R_E \cup R_F \ \textit{mit} \\
R_B &= \{(a^k ca^m b^n, a^{k+1} ca^{m-1} b^n) : k, n \geq 0, m \geq 1\}, \\
R_C &= \{(a^m cb^n, a^{m+1} db^{n-1}) : m \geq 0, n \geq 1\}, \\
R_D &= \{(a^k da^m b^n, a^{k-1} da^{m+1} b^n) : m, n \geq 0, k \geq 1\}, \\
R_E &= \{(da^m b^n, ca^m b^n) : n \geq 0, m \geq 1\}, \\
R_F &= \{(a^m c, cb^m) : m \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Da R_B, R_C,R_D, R_E, R_F jeweils synchrone reguläre Relationen sind, ist auch R_A synchron und regulär. Wie man leicht sieht, ist R_A außerdem eine bijektive Abbildung von

$$S = \{a^k ca^m b^n : k + m + n \geq 1\} \cup \{a^k da^m b^n : k + m \geq 1, n \geq 0\}$$

auf sich. Damit ist die synchrone reguläre Relation $R_2 = R_A \cup \{(v, v) : v \in X^* \setminus S\}$ eine Bijektion von X^* auf X^*. Dabei gilt für ein Wort $w = ca^i b^k$ mit $i \geq 0, k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
R_2^j(w) &= a^j ca^{i-j} b^k \ \textit{für} \ 0 \leq j \leq i, \\
R_2^{i+1}(w) &= a^{i+1} db^{k-1}, \\
R_2^{i+1+j}(w) &= a^{i+1-j} da^j b^{k-1} \ \textit{für} \ 0 \leq j \leq i+1, \\
R_2^{2i+3}(w) &= ca^{i+1} b^{k-1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere: $(cb^k, ca^m b^{k-m}) \in R_2^{k+1} \iff k = \sum_{j=0}^{m-1}(2j+3) = (m+1)^2 - 1$. Ist Θ eine Kantengrammatik mit $E(\Theta) = R_2 \amalg \#$, so besteht der Graph $G_n(\Theta)$ aus 4^{n-1} disjunkten Wegen der Länge n. Unter anderem enthält $G_n(\Theta)$ für $n = 3, 4, 5$ die folgenden Wege:

$$\begin{aligned}
n = 3: &\quad \#cb \to a\#d \to da\#, \\
n = 4: &\quad \#cbb \to a\#db \to da\#b \to cab\#, \\
n = 5: &\quad \#cbbb \to a\#dbb \to da\#bb \to cab\#b \to acbb\#.
\end{aligned}$$

Satz 3.5.4 *Sind Γ_1 und Γ_2 synchrone reguläre Kantengrammatiken, so ist $[\mathcal{G}](\Gamma_1) \cap [\mathcal{G}](\Gamma_2)$ im allgemeinen nicht durch eine synchrone reguläre Kantengrammatik erzeugbar.*

Beweis. Es sei $X = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \mathrm{Id}_{X^*}$ und R_2 wie in Beispiel 3.5.1. R_1 und R_2 sind synchrone reguläre Relationen und außerdem bijektive Funktionen auf X^*. Nach Lemma 3.5.2 gibt es für $i = 1, 2$ synchrone reguläre Kantengrammatiken Θ_i mit $E(\Theta_i) = R_i \amalg \#$. Die Graphen $G_n(\Theta_1)$ und $G_n(\Theta_2)$ bestehen nach Lemma 3.5.3 jeweils aus 4^{n-1} disjunkten gerichteten Wegen der Länge n, sind also isomorph. Im folgenden werden Θ_1 und Θ_2 so zu synchronen regulären Kantengrammatiken Γ_1, Γ_2 umgeformt, daß $G_n(\Gamma_1)$ und $G_n(\Gamma_2)$ genau dann isomorph sind, wenn n eine Quadratzahl ist. Mit Hilfe von Satz 3.3.3 folgt, daß $[\mathcal{G}](\Gamma_1) \cap [\mathcal{G}](\Gamma_2)$ nicht von einer synchronen regulären Kantengrammatik erzeugt werden kann.

Wir betrachten für $n \geq 3$ in $G_n(\Theta_1)$ und $G_n(\Theta_2)$ jeweils den Weg mit dem Startknoten $C_n = \#cb^{n-2}$. In $G_n(\Theta_1)$ endet der Weg von C_n im Knoten $cb^{n-2}\#$. In $G_n(\Theta_2)$ endet dieser Weg genau dann in dem Knoten $ca^ib^{n-i-3}\#$, wenn $R_2^{n-1}(cb^{n-2}) = ca^ib^{n-i-3}$ gilt. Nach den Betrachtungen aus Beispiel 3.5.1 gilt dies genau dann, wenn $n = (i+1)^2$.

Da die Sprache $L = \{ca^ib^j\# : i + j \geq 1\}$ regulär ist, ist die Relation

$$R_G = \{(v, a^n) : v \in L, |v| = n\} \cup \{(v, b^n) : v \in X^*\# \setminus L, |v| = n\}$$

synchron und regulär. Es gibt somit synchrone reguläre Kantengrammatiken Γ_1' und Γ_2' mit $E(\Gamma_i') = E(\Theta_i) \cup R_G$, $i = 1, 2$. Die Graphen $G_n(\Gamma_i')$, $i = 1, 2$, $n \geq 3$, bestehen aus zwei umgekehrt gerichteten Bäumen, deren Wurzeln die Knoten a^n bzw. b^n sind. Die Komponente mit dem Knoten a^n besteht in beiden Graphen aus $(n-1)$ gerichteten Wegen der Länge n, die nur a^n als gemeinsamen Knoten haben; die Komponente mit dem Knoten b^n besteht aus $4^{n-1} - (n-1)$ Pfaden der Länge n, deren einziger gemeinsamer Knoten b^n ist. Der Knoten C_n liegt in $G_n(\Gamma_1')$ für alle $n \geq 3$ in der Komponente von a^n, während C_n in $G_n(\Gamma_2')$ in der Komponente von a^n genau dann liegt, wenn n eine Quadratzahl ist.

Da auch die Sprache $L' = \{\#cb^{n-2} : n \geq 3\}$ regulär ist, lassen sich synchrone reguläre Kantengrammatiken Γ_1 und Γ_2 mit $E(\Gamma_i) = E(\Gamma_i') \cup \{(b^n, w) : w \in L'|w| = n \geq 3\}$ konstruieren. Die Graphen $G_n(\Gamma_i)$ entstehen aus den Graphen $G_n(\Gamma_i')$, indem eine Kante von b^n nach C_n eingefügt wird. $G_n(\Gamma_1)$ und $G_n(\Gamma_2)$ sind genau dann isomorph, wenn a^n und C_n in $G_n(\Gamma_2)$ in der gleichen Komponente liegen, d.h., wenn $n = k^2$ gilt. Da $G_n(\Gamma_1)$ und $G_m(\Gamma_2)$ für $m \neq n$ wegen unterschiedlicher Knotenzahl nicht isomorph sind, gilt $[\mathcal{G}](\Gamma_1) \cap [\mathcal{G}](\Gamma_2) = \{[G_{k^2}(\Gamma_1)] : k \geq 2\}$. Die Anzahl der Knoten des Graphen $G_{k^2}(\Gamma_1)$ ist $k^2 4^{k^2-1} + 2, k \geq 2$. Nach Satz 3.3.3 kann die Graphenmenge $[\mathcal{G}](\Gamma_1) \cap [\mathcal{G}](\Gamma_2)$ nicht von einer synchronen regulären Kantengrammatik erzeugt werden.

Abschluß unter Graphenoperationen

Eine k-stellige Graphenoperation ist eine Abbildung von einem k-Tupel von Graphen auf einen Graphen, wobei die Bilder isomorpher Graphen wieder isomorph sind. Man kann diese Operationen zu Abbildungen von Graphenfolgen in Graphenfolgen erweitern, indem man sie auf die einzelnen Graphen anwendet. Sind k Kantengrammatiken $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ sowie eine k-stellige Graphenoperation f gegeben, so stellt sich die Frage, ob die Graphenfolge $\{G_i\}_{i=1}^n$ mit $G_i = f(G_i(\Gamma_1), \ldots, G_i(\Gamma_k))$ auch durch eine Kantengrammatik erzeugt werden kann. Im folgenden betrachten wir die Abschlußeigenschaften der Familie der von synchronen regulären Kantengrammatiken erzeugten Graphensprachen unter verschiedenen Graphenoperationen.

Definition 3.5.1 *$G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ seien schlichte Graphen.*

- *Der* Komplementärgraph *$\overline{G}$ von G ist definiert als $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = (V \times V) \setminus (E \cup Id_V)$.*

- *Für eine natürliche Zahl p ist der p-te* Potenzgraph G^p *von G definiert als* $G^p = (V, E^{\leq p} \setminus Id_V)$
- *Der* Hüllengraph G^* *von G ist definiert als $G^* = (V, E^* \setminus Id_V)$.*
- *Der* Kantengraph *oder* Line-Graph $\mathcal{L}$ *von G ist definiert als $\mathcal{L}(G) = (E, \mathcal{L}(E))$, wobei die Kantenmenge von $\mathcal{L}(G)$ definiert ist als*

$$\mathcal{L}(E) \quad = \quad \{(k, l) \mid k, l \in E, k = (v, w), l = (w, x)\}.$$

Die Knotenmenge des kartesischen Produkts $G_1 \times G_2$, *des* lexikographischen Produkts $G_1[G_2]$, *der* Konjunktion $G_1 \wedge G_2$ *sowie der Disjunktion $G_1 \vee G_2$ ist jeweils $V_1 \times V_2$. Die jeweiligen Kantenmengen sind wie folgt definiert:*

- $((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in E(G_1 \times G_2) :\iff \begin{array}{l}(v_1 = w_1 \wedge (v_2, w_2) \in E_2) \vee \\ (v_2 = w_2 \wedge (v_1, w_1) \in E_1)\end{array}$
- $((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in E(G_1[G_2]) :\iff (v_1 = w_1 \wedge (v_2, w_2) \in E_2) \vee (v_1, w_1) \in E_1$
- $((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in E(G_1 \wedge G_2) :\iff ((v_1, w_1) \in E_1 \wedge (v_2, w_2) \in E_2)$
- $((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in E(G_1 \vee G_2) :\iff ((v_1, w_1) \in E_1 \vee (v_2, w_2) \in E_2)$

Satz 3.5.5 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ konstruieren, so daß $G_n(\Theta)$ für alle $n \geq 0$ der von $G_n(\Gamma)$ induzierte ungerichtete Graph ist.*

Beweis. Ist $E = E(\Gamma) \subseteq X^* \times X^*$ synchron und regulär, so ist auch E^{-1} synchron und regulär. Folglich kann man eine synchrone und reguläre Kantengrammatik Θ mit $E(\Theta) = E \cup E^{-1}$ konstruieren. $G_n(\Theta)$ ist dann der von $G_n(\Gamma)$ induzierte ungerichtete Graph. $\square$

Satz 3.5.6 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ konstruieren, so daß $G_n(\Theta)$ für alle $n \geq 0$ der Komplementärgraph von $G_n(\Gamma)$ ist.*

Beweis. Das Knotenalphabet von Γ sei X. Da die Sprachen $V(\Gamma) \subseteq X^*$ und $L(\Gamma) \subseteq (X \times X)^*$ regulär sind, ist $E' = \mathrm{Id}_{V(\Gamma)} \cup \mathrm{Syn}(V(\Gamma) \times V(\Gamma)) \setminus E(\Gamma)$ eine synchrone reguläre Relation. Es gibt eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $E(\Theta) = E'$. Wegen $\mathrm{Id}_{V(\Gamma)} \subseteq E' \subseteq \mathrm{Syn}(V(\Gamma) \times V(\Gamma))$ ist $V(\Theta) = V(\Gamma)$. Weiterhin gilt für alle $(v, w) \in \mathrm{Syn}(V(\Gamma) \times V(\Gamma))$ mit $v \neq w$: $(v, w) \in E(\Gamma) \iff (v, w) \notin E(\Theta)$. Folglich ist $G_n(\Theta)$ der Komplementärgraph von $G_n(\Gamma)$ für alle $n \geq 0$. $\square$

Satz 3.5.7 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik und $p \in \mathbb{N}$. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ konstruieren, so daß $G_n(\Theta) = (G_n(\Gamma))^p$ für alle $n \geq 1$ gilt.*

Beweis. Sind $R, S \subseteq \mathrm{Syn}(X^* \times X^*)$ synchrone und reguläre Relationen, so ist auch $R \circ S = \{(u,w) : \exists v((u,v) \in R \wedge (v,w) \in S)\}$ synchron und regulär. Daraus folgt durch vollständige Induktion über p, daß für jede synchrone reguläre Relation $E \subseteq X^* \times X^*$ und jedes $p \in \mathbb{N}$ auch die Relation E^p synchron und regulär ist. Wegen des Abschlusses synchroner regulärer Relationen unter Vereinigung ist auch $E^{\leq p}$ synchron und regulär. □

Satz 3.5.8 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Man kann im allgemeinen keine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $[\mathcal{G}](\Theta) = [\mathcal{G}^*](\Gamma) = \{[G^*] : G \in \mathcal{G}(\Gamma)\}$ konstruieren.*

Beweis. Ein Graph G ist genau dann stark zusammenhängend, wenn G^* vollständig ist. In Satz 3.5.12 wird ferner gezeigt, daß mit $[\mathcal{G}]$ auch die Menge der vollständigen Graphen $[\mathcal{G}_{vollst}]$ durch eine synchrone reguläre Kantengrammatik erzeugt werden kann. Kann man also $[\mathcal{G}^*_{vollst}](\Gamma)$ nicht durch eine synchrone reguläre Kantengrammatik, so ist dies auch nicht für $[\mathcal{G}^*](\Gamma)$ möglich.

Ausgehend von der Kantengrammatik Γ_2 aus Beispiel 3.5.1 wird später (Satz 3.5.13) eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ derart konstruiert, daß der Graph $G_n(\Gamma)$ genau dann stark zusammenhängend ist, wenn n eine Quadratzahl ist. Dabei ist die Knotenzahl des Graphen $G_n(\Gamma)$ gleich $n4^{n-1} + 2$ ist. Analog zum Beweis von Satz 3.5.4 folgt, daß die Graphensprache $[\mathcal{G}^*_{vollst}](\Gamma)$ nicht durch eine synchrone reguläre Kantengrammatik erzeugt werden kann. □

Satz 3.5.9 *Es sei $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Man kann eine Kantengrammatik Θ konstruieren, so daß $G_n(\Theta)$ isomorph zu $\mathcal{L}(G_n(\Gamma))$ für $n \geq 1$ ist.*

Beweis. Es seien $E_1, E_2, E_3 \subseteq \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*)$ die synchronen Relationen mit

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{1,2}(x), \mathrm{pr}_{3,4}(x) \in E(\Gamma) \setminus \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}\},\\
E_2 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{2,3}(x) \in \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}\},\\
E_3 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{1,3}(x), \mathrm{pr}_{2,4}(x) \in \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}\}.
\end{aligned}$$

E_1, E_2, E_3 sind synchron regulär. Damit ist auch $E^\ell = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$ synchron regulär. Im folgenden fassen wir E^ℓ als synchrone binäre Relation $E^\ell \subseteq \mathrm{Syn}((X \times X)^* \times (X \times X)^*)$ auf. Es gibt eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit dem Knotenalphabet $X \times X$ und $E(\Theta) = E^\ell$. Nach Definition von E^ℓ ist ein Paar (e_1, e_2) mit $e_1, e_2 \in (X \times X)^{[n]}$ genau dann in $E(\Theta)$, wenn e_1 und e_2 Kanten des Graphen G_n sind und entweder der Zielknoten von e_1 und der Startknoten von e_2 gleich sind oder e_1 und e_2 gleich sind. Damit ist gezeigt, daß der Graph $G_n(\Theta)$ gleich dem Kantengraphen von $G_n(\Gamma)$ ist.

Satz 3.5.10 *Sind* Γ *und* Θ *synchrone reguläre Kantengrammatiken mit dem gemeinsamen Knotenalphabet* X*, so gibt es synchrone reguläre Kantengrammatiken, die* $\{G_i(\Gamma) \times G_i(\Theta) : i \geq 0\}$*,* $\{G_i(\Gamma)[G_i(\Theta)] : i \geq 0\}$*,* $\{G_i(\Gamma) \wedge G_i(\Theta) : i \geq 0\}$ *bzw.* $\{G_i(\Gamma) \vee G_i(\Theta) : i \geq 0\}$ *erzeugen.*

Beweis. Es seien $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 \subseteq \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*)$ die synchronen Relationen mit

$$\begin{aligned}
E_0 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_3(x) \in V(\Gamma), \mathrm{pr}_2(x), \mathrm{pr}_4(x) \in V(\Theta)\},\\
E_1 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{1,3}(x) \in E(\Gamma) \setminus \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}\},\\
E_2 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{2,4}(x) \in E(\Theta) \setminus \mathrm{Id}_{V(\Theta)}\},\\
E_3 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{1,3}(x) \in \mathrm{Id}_{V(\Gamma)}\},\\
E_4 &= \{x \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^* \times X^* \times X^*) : \mathrm{pr}_{2,4}(x) \in \mathrm{Id}_{V(\Theta)}\}.
\end{aligned}$$

Diese Relationen sind synchron und regulär, wie auch die mit ihrer Hilfe definierten Relationen

$$\begin{aligned}
E^{\times} &= E_0 \cap ((E_3 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_4) \cup (E_3 \cap E_4))\,,\\
E^{[\,]} &= E_0 \cap ((E_3 \cap E_2) \cup E_1 \cup (E_3 \cap E_4))\,,\\
E^{\wedge} &= E_0 \cap (E_1 \cap E_2 \cup (E_3 \cap E_4))\,,\\
E^{\vee} &= E_0 \cap (E_1 \cup E_2 \cup (E_3 \cap E_4))\,.
\end{aligned}$$

Die zuletzt definierten Relationen werden im folgenden als synchrone binäre Relationen über dem Alphabet $X \times X$ aufgefaßt. Es gibt synchrone reguläre Kantengrammatiken mit dem Knotenalphabet $X \times X$, die $E^{\times}, E^{[\,]}, E^{\wedge}$ bzw. $E^{\vee}$ erzeugen.

Ein Paar (e_1, e_2) mit $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (w_1, w_2)$ ist genau dann in $E^{\times}$ enthalten, wenn $|v_1| = |v_2| = |w_1| = |w_2| = n$, $v_1, w_1 \in V_n(\Gamma), v_2, w_2 \in V_n(\Theta)$ erfüllt ist und außerdem $[v_1 = w_1$ und $(v_2, w_2) \in E_n(\Theta)]$ oder $[v_2 = w_2$ und $(v_1, w_1) \in E_n(\Gamma)]$ oder $[e_1 = e_2]$ gilt. Damit ist gezeigt, daß der Graph $G_n(E^{\times})$ als Knotenmenge genau die Knoten aus $G_n(\Gamma) \times G_n(\Theta)$ besitzt und genau die Kanten von $G_n(\Gamma) \times G_n(\Theta)$ enthält. Analog zeigt man, daß die Relationen $E^{[\,]}, E^{\wedge}, E^{\vee}$ die lexikographischen Produkte, die Konjunktionen bzw. die Disjunktionen beschreiben. $\square$

Abschluß unter graphentheoretischen Eigenschaften

Häufig ist man daran interessiert, aus einer gegebenen Graphenmenge die Graphen mit einer bestimmten Eigenschaft herauszufiltern. Formal ist eine graphentheoretische Eigenschaft eine unter Isomorphismus abgeschlossene Menge von Graphen.

Für eine graphentheoretische Eigenschaft P und eine Kantengrammatik Γ sei $\mathcal{G}_P(\Gamma)$ die Graphenfolge $\mathcal{G}_P(\Gamma) := \{G_{P,i}(\Gamma)\}_{i \geq 0}$ mit $G_{P,i}(\Gamma) = G_i(\Gamma)$, falls $G_i(\Gamma) \in P$, und $G_{P,i}(\Gamma) = (\emptyset, \emptyset)$, sonst. Außerdem sei $[\mathcal{G}_P](\Gamma) = \{[G] : G \in \mathcal{G}_P(\Gamma) \wedge G \neq (\emptyset, \emptyset)\}$. Wir untersuchen für verschiedene graphentheoretische Eigenschaften P die Frage, ob für jede synchrone reguläre Kantengrammatik Γ auch $[\mathcal{G}_P](\Gamma)$ durch eine synchrone reguläre Kantengrammatik erzeugt werden kann.

Zunächst zeigen wir, daß dies möglich ist, sofern P mittels der Prädikatenlogik erster Stufe definiert werden kann. Danach wird die Nichtabgeschlossenheit unter einigen anderen graphentheoretischen Eigenschaften, wie z.B. Zusammenhang, nachgewiesen. Schließlich zeigen wir einige positive Resultate mit Hilfe von formalen Potenzreihen.

Der Vollständigkeit halber geben wir zunächst die hier benötigten Definitionen der Syntax und der Semantik der Prädikatenlogik 1. Stufe an. Für eine umfassende Einführung in die mathematische Logik verweisen wir auf [11].

Definition 3.5.2 *Es sei* $A_{\mathbf{edge}} = \{(,), \equiv, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow\ \} \cup \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{edge}\}$. *Die Symbole* $x_i, i \in \mathbb{N}$, *heißen Variablen, das Symbol* **edge** *ist ein zweistelliges Relationssymbol. Die Menge der* prädikatenlogischen Formeln 1. Stufe über $A_{\mathbf{edge}}$, *im folgenden kurz Formeln genannt, ist wie folgt induktiv definiert:*

1. $x_i \equiv x_j$ *und* $\mathbf{edge}(x_i, x_j)$ *mit* $i, j \in \mathbb{N}$ *sind Formeln.*
2. *Sind* φ *und* ψ *Formeln, so sind auch* $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ *und* $(\varphi \rightarrow \psi)$ *Formeln.*
3. *Ist* φ *eine Formel und* $i \in \mathbb{N}$, *so sind auch* $\exists x_i \varphi$ *und* $\forall x_i \varphi$ *Formeln.*

Definition 3.5.3 *Die Menge der in einer Formel* φ *vorkommenden Variablen wird mit* $var(\varphi)$ *bezeichnet. Die Menge der in einer Formel* φ *frei vorkommenden Variablen* $free(\varphi)$ *ist wie folgt induktiv definiert:*

1. $free(x_i \equiv x_j) = free(\mathbf{edge}(x_i, x_j)) = \{x_i, x_j\}$
2. $free(\neg\varphi) = free(\varphi)$
3. $free((\varphi \wedge \psi)) = free((\varphi \vee \psi)) = free((\varphi \rightarrow \psi)) = free(\varphi) \cup free(\psi)$
4. $free(\exists x_i \varphi) = free(\forall x_i \varphi) = free(\varphi) \setminus \{x_i\}$

Ist $free(\varphi) = \emptyset$, *so wird* φ *ein* Satz *genannt.*

Definition 3.5.4 *Für einen Graphen* $G = (V, E)$ *und eine Formel* φ *ist eine* Belegung von φ in G *definiert als eine Abbildung von der Menge der Variablen nach* V. *Für eine Belegung* β *und* $v \in V$ *ist* $\beta\frac{v}{x_i}$ *die Belegung*

$$\beta\frac{v}{x_i}(x_j) = \begin{cases} v, & \textit{falls } i = j, \\ \beta(x_j), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Definition 3.5.5 *Für einen Graphen $G = (V, E)$, eine Formel φ und eine Belegung β von φ in G definieren wir die Beziehung $(G, \beta) \models \varphi$ induktiv wie folgt:*

$$\begin{array}{lcl}
(G,\beta) \models x_i \equiv x_j & :\Longleftrightarrow & \beta(x_i) = \beta(x_j) \\
(G,\beta) \models \mathbf{edge}(x_i, x_j) & :\Longleftrightarrow & (\beta(x_i), \beta(x_j)) \in E \\
(G,\beta) \models \neg\varphi & :\Longleftrightarrow & (G,\beta) \models \varphi \textit{ gilt nicht} \\
(G,\beta) \models (\varphi \wedge \psi) & :\Longleftrightarrow & (G,\beta) \models \varphi \textit{ und } (G,\beta) \models \psi \\
(G,\beta) \models (\varphi \vee \psi) & :\Longleftrightarrow & (G,\beta) \models \varphi \textit{ oder } (G,\beta) \models \psi \\
(G,\beta) \models (\varphi \to \psi) & :\Longleftrightarrow & \textit{aus } (G,\beta) \models \varphi \textit{ folgt } (G,\beta) \models \psi \\
(G,\beta) \models \exists x_i \varphi & :\Longleftrightarrow & (G, \beta\frac{v}{x_i}) \models \varphi \textit{ für ein } v \in V \\
(G,\beta) \models \forall x_i \varphi & :\Longleftrightarrow & (G, \beta\frac{v}{x_i}) \models \varphi \textit{ für alle } v \in V
\end{array}$$

Gilt $(G, \beta) \models \varphi$ so heißt (G, β) ein Modell *für φ.*

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph, φ eine Formel mit $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und β eine Belegung von φ in G mit $\beta(x_i) = v_i$. Nach dem *Koinzidenzlemma*, siehe [11, III.4.6], gilt $(G, \beta) \models \varphi$ genau dann, wenn $(G, \beta') \models \varphi$ für alle β' mit $\beta'(x_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$. Aus diesem Grunde schreiben wir statt $(G, \beta) \models \varphi$ künftig häufig $G \models \varphi[v_1, \ldots, v_n]$. Ist insbesondere φ ein Satz, so schreiben wir $G \models \varphi$, falls $(G, \beta) \models \varphi$ für eine Belegung β gilt.

Nach dem *Isomorphielemma* [11, III.5.2] gilt für isomorphe Graphen G, G': $G \models \varphi \iff G' \models \varphi$. Folglich wird durch einen Satz φ eine graphentheoretische Eigenschaft definiert.

Beispiel 3.5.2 Es folgen die Definitionen einiger graphentheoretischer Eigenschaften mit Hilfe von Sätzen 1. Stufe.

1. Ein Graph G ist genau dann schlicht, wenn $G \models \varphi_s$ mit $\varphi_s = \neg\exists x_1 \mathbf{edge}(x_1, x_1)$.

2. Der Graph G ist genau dann diskret (d.h., er enthält keine Kanten), wenn $G \models \varphi$ mit
$$\varphi = \neg\exists x_1 \exists x_2 \mathbf{edge}(x_1, x_2).$$

3. Der Graph G ist genau dann schlicht und vollständig, wenn $G \models \varphi$ mit
$$\varphi = (\varphi_s \wedge \forall x_1 \forall x_2 \, (x_1 \equiv x_2 \vee \mathbf{edge}(x_1, x_2)))\,.$$

4. Der Graph G ist genau dann ungerichtet, wenn $G \models \varphi_u$ mit
$$\varphi_u = \forall x_1 \forall x_2 \, (\mathbf{edge}(x_1, x_2) \to \mathbf{edge}(x_2, x_1))\,.$$

Für eine Formel φ mit $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und einen Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir mit $B(G, \varphi, n)$ die Menge aller n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ mit $G \models \varphi[v_1, \ldots, v_n]$. Für eine Kantengrammatik Γ mit dem Knotenalphabet X sei $L(\Gamma, \varphi, n) \subseteq \mathrm{Syn}((X^*)^n)$ die synchrone Relation mit $L(\Gamma, \varphi, n) = \{B(G_k(\Gamma), \varphi, n) : k \geq 0\}$.

Satz 3.5.11 *Es seien* Γ *eine synchrone und reguläre Kantengrammatik und* φ *eine Formel mit* $var(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$*. Dann ist* $L(\Gamma, \varphi, n) = \{B(G_k(\Gamma), \varphi, n) : k \geq 0\}$ *synchron regulär.*

Beweis. Der Satz wird durch Induktion über den Formelaufbau bewiesen. Dabei ist es im Induktionsschritt ausreichend, sich auf Formeln zu beschränken, die nur den Disjunktionsoperator $\vee$, den Negationsoperator $\neg$ sowie den Existenzquantor $\exists$ enthalten. Als Induktionsanfang zeigen wir:

- $\varphi = x_i \equiv x_j$, $1 \leq i, j \leq n$:
  Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V_k(\Gamma)^n$ ist genau dann in $B(G_k(\Gamma), \varphi, n)$, wenn $v_i = v_j$ gilt, d.h.,
  $$L(\Gamma, \varphi, n) = \mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n) \cap \{x \in \mathrm{Syn}((X^*)^n) : \mathrm{pr}_{i,j}(x) \in \mathrm{Id}_{X^*}\}.$$
  Aus der Regularität von $V(\Gamma)$ und Id_{X^*} folgt, daß $L(\Gamma, \varphi, n)$ synchron regulär ist.

- $\varphi = \mathbf{edge}(x_i, x_j)$, $1 \leq i, j \leq n$:
  Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V_k(\Gamma)^n$ ist genau dann in $B(G_k(\Gamma), \varphi, n)$, wenn $(v_i, v_j) \in E_k(\Gamma)$ gilt, d.h.,
  $$L(\Gamma, \varphi, n) = \mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n) \cap \{x \in \mathrm{Syn}((X^*)^n) : \mathrm{pr}_{i,j}(x) \in E(\Gamma) \setminus \mathrm{Id}_{X^*}\}.$$
  Da $V(\Gamma), E(\Gamma)$ und Id_{X^*} synchron regulär sind , ist $L(\Gamma, \varphi, n)$ synchron regulär.

Sei nun für die Formeln ψ_1, ψ_2 mit $\mathrm{var}(\psi_1), \mathrm{var}(\psi_2) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ bereits gezeigt, daß $L(\Gamma, \psi_1, n)$ und $L(\Gamma, \psi_2, n)$ synchron regulär sind.

- $\varphi = \neg\psi_1$:
  Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V_k(\Gamma)^n$ ist genau dann in $B(G_k(\Gamma), \varphi, n)$, wenn es nicht in $B(G_k(\Gamma), \psi_1, n)$ enthalten ist, d.h.
  $$L(\Gamma, \varphi, n) = \mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n) \setminus L(\Gamma, \psi_1, n).$$
  Da $\mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n)$ und $L(\Gamma, \psi_1, n)$ synchron regulär sind und die Familie der synchron regulären Relationen unter Differenz abgeschlossen ist, ist $L(\Gamma, \varphi, n)$ synchron regulär.

- $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$:
  Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V_k(\Gamma)^n$ ist genau dann in $B(G_k(\Gamma), \varphi, n)$, wenn es in $B(G_k(\Gamma), \psi_1, n)$ oder $B(G_k(\Gamma), \psi_2, n)$ enthalten ist, d.h.
  $$L(\Gamma, \varphi, n) = L(\Gamma, \psi_1, n) \cup L(\Gamma, \psi_2, n).$$
  Da $L(\Gamma, \psi_1, n)$ und $L(\Gamma, \psi_2, n)$ synchron regulär sind und die Familie der synchron regulären Relationen unter Vereinigung abgeschlossen ist, ist $L(\Gamma, \varphi, n)$ synchron regulär.

- $\varphi = \exists x_i \psi_1$, $1 \leq i \leq n$:
  Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V_k(\Gamma)^n$ ist genau dann in $B(G_k(\Gamma), \varphi, n)$, wenn es ein $w \in V_k(\Gamma)$ gibt, so daß $(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ in $B(G_k(\Gamma), \psi_1, n)$ enthalten ist, d.h.

  $$\begin{aligned} L(\Gamma, \varphi, n) \quad = \quad & \mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n) \cap \\ & \{x \in \mathrm{Syn}((X^*)^n) : \mathrm{pr}_{1,i-1,i+1,\ldots,n}(x) \in \mathrm{pr}_{1,i-1,i+1,\ldots,n}(L(\Gamma, \psi_1, n))\}. \end{aligned}$$

  Da $L(\Gamma, \psi_1, n)$ und $\mathrm{Syn}(V(\Gamma)^n)$ synchron regulär sind und die Familie der synchron regulären Relationen unter endlicher Substitution und Durchschnitt abgeschlossen ist, ist $L(\Gamma, \varphi, n)$ synchron regulär. □

Satz 3.5.12 *Zu jedem Satz 1. Stufe φ und zu jeder synchronen regulären Kantengrammatik Γ gibt es eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_φ mit $\mathcal{G}(\Gamma_\varphi) = \{G \in \mathcal{G}(\Gamma) : G \models \varphi\}$.*

Beweis. Es sei X das Knotenalphabet von Γ und φ ein Satz 1. Stufe mit $\mathrm{var}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es sei $L(\Gamma, \varphi, n)$ die in Satz 3.5.11 konstruierte Sprache. Da φ keine freien Variablen enthält, ist ein n-Tupel $(w_1, \ldots, w_n) \in V(\Gamma)^{[n]}$ genau dann in $L(\Gamma, \varphi, n)$, wenn $w_i \in V_k(\Gamma)$, $1 \leq i \leq n$, und $G_k(\Gamma) \models \varphi$. Die Relation

$$E_\varphi = E(\Gamma) \cap \{(v, w) \in \mathrm{Syn}(X^* \times X^*) : v, w \in \mathrm{pr}_1(L(\Gamma, \varphi, n))\}$$

ist synchron und regulär. Ist Γ_φ eine synchrone reguläre Kantengrammatik mit $E(\Gamma_\varphi) = E_\varphi$, so ist der Graph $G_k(\Gamma_\varphi)$ gleich $G_k(\Gamma)$, falls $G_k(\Gamma) \models \varphi$, und anderenfalls leer. □

Durch Sätze 1. Stufe lassen sich nur „lokale" Eigenschaften definieren (siehe [6]). Deshalb sind viele wichtige graphentheoretische Eigenschaften nicht mit den Mitteln der Prädikatenlogik 1. Stufe definierbar. Für einige dieser Eigenschaften beweisen wir im folgenden, daß bezüglich ihnen keine Abgeschlossenheit der Familie der durch synchrone reguläre Kantengrammatiken erzeugten Graphensprachen besteht. Zunächst seien der Vollständigkeit halber die Definitionen dieser graphentheoretischen Eigenschaften angegeben:

Definition 3.5.6 *Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter schlichter Graph.*

- *Eine* Knotenfärbung mit k Farben *von G ist eine Abbildung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Eine Knotenfärbung c heißt* zulässig, *wenn $c(v) \neq c(w)$ für alle $v, w \in V$ mit $(v, w) \in E$ gilt. G heißt* k-knotenfärbbar, *falls eine zulässige Knotenfärbung mit k Farben existiert.*

- *G heißt* planar, *wenn es eine Einbettung in den zweidimensionalen euklidischen Raum gibt, so daß keine zwei Kanten einen inneren Schnittpunkt haben. (Für eine exakte Definition siehe [40, Definitionen 11.1,11.2].)*

- *Ein Kantenzug* $v_0, v_1, \ldots, v_k$ *in* G *heißt* gerichteter Eulerweg*, wenn für alle* $(v, w) \in E$ *genau ein* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *mit* $(v_{i-1}, v_i) \in (v, w)$ *existiert. Ist zusätzlich* $v_k = v_0$*, so ist* $v_0, \ldots, v_{k-1}, v_0$ *ein* Eulerzyklus*.* G *heißt* Eulerscher Graph*, wenn* G *einen Eulerzyklus enthält. Ein ungerichteter Graph heißt* ungerichtet Eulersch*, wenn er durch einen gerichteten Eulerschen Graphen mit antisymmetrischer Kantenrelation induziert wird.*

- *Ein Weg* $v_1, \ldots, v_k$ *in* G *heißt* Hamiltonweg*, wenn für alle* $v \in V$ *genau ein* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *mit* $v_i = v$ *existiert. Ist* $v_1, \ldots, v_k$ *ein Hamiltonweg und* $(v_k, v_1) \in E$*, so heißt* $v_1, \ldots, v_k, v_1$ Hamiltonkreis*.* G *heißt* Hamiltonsch*, wenn* G *einen Hamiltonkreis enthält.*

Satz 3.5.13 *Es sei* Γ *eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Die folgenden Graphenmengen lassen sich im allgemeinen nicht durch synchrone reguläre Kantengrammatiken erzeugen:*

1. *die Menge aller zusammenhängenden Graphen aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*,*
2. *die Menge aller azyklischen Graphen aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*,*
3. *die Menge aller* k*-knotenfärbbaren Graphen mit* $k \geq 2$ *aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*,*
4. *die Menge aller planaren Graphen aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*,*
5. *die Menge aller Eulerschen Graphen aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*,*
6. *die Menge aller Hamiltonschen Graphen aus* $[\mathcal{G}](\Gamma)$*.*

Beweis. Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik mit Knotenalphabet X, so daß $G_n(\Gamma)$ für $n \geq n_0$ folgende Eigenschaften besitzt:

- $G_n(\Gamma)$ besteht aus zwei Komponenten, die jeweils umgekehrt gerichtete Bäume sind.
- In $G_n(\Gamma)$ gibt es drei paarweise verschiedene Knoten a_n, b_n, c_n derart, daß a_n und b_n die Wurzeln der umgekehrt gerichteten Bäume sind, c_n ein Blatt ist und die Sprachen $A = \{a_n : n \geq n_0\}$, $B = \{b_n : n \geq n_0\}$ und $C = \{c_n : n \geq n_0\}$ jeweils regulär sind.

(Diese Bedingungen werden beispielsweise von der Kantengrammatik Γ'_2 aus dem Beweis von Satz 3.5.4 mit $n_0 = 2$, $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $c_n = \#cb^{n-2}$ erfüllt.) Ausgehend von Γ konstruieren wir im folgenden synchrone reguläre Kantengrammatiken Γ_i, $i = 1, \ldots, 5$, so daß $G_n(\Gamma_i)$ genau dann eine der oben genannten Eigenschaften besitzt, wenn a_n und c_n in einer Komponente liegen.

1. Die Relation $E_1 = E(\Gamma) \cup \{(b_n, c_n) : n \geq 1\}$ ist synchron und regulär. Folglich gibt es eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_1 mit $E(\Gamma_1) = E_1$ sowie eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ'_1 mit $E(\Gamma'_1) = E_1 \cup E_1^{-1}$. $G_n(\Gamma_1)$ bzw. $G_n(\Gamma'_1)$ ist genau dann schwach bzw. stark zusammenhängend, wenn b_n und c_n in verschiedenen Komponenten von $G_n(\Gamma)$ liegen.

2. $G_n(\Gamma_1)$ ist genau dann azyklisch, wenn b_n und c_n in verschiedenen Komponenten von $G_n(\Gamma)$ liegen.

3. Es sei $X' = X \cup \{1, \ldots, k\}$. Die Relation

$$E_2' = \{(vi, vj) : v \in V(\Gamma), 1 \leq i, j \leq k\} \cup \{(vi, w1) : (v, w) \in E(\Gamma), 2 \leq i \leq k\}$$

ist synchron regulär. Es gibt daher eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_2' mit $E(\Gamma_2') = E_2'$. Der Graph $G_{n+1}(\Gamma_2')$ entsteht, indem man in $G_n(\Gamma)$ einen Knoten v durch den vollständigen Graphen mit den Knoten $v1, \ldots, vk$ ersetzt und für eine Kante (v, w) die Kanten $(v2, w1), \ldots, (vk, w1)$ einfügt. $G_{n+1}(\Gamma_2')$ besteht aus zwei Komponenten. Sind v und w in $G_n(\Gamma)$ in derselben Komponente, so befinden sich vi und wj für $1 \leq i, j \leq k$ in derselben Komponente von $G_{n+1}(\Gamma_2')$. Offenbar ist $G_{n+1}(\Gamma_2')$ mit k Farben knotenfärbbar. Eine zulässige k-Färbung erhält man, indem man in der Komponente mit dem Knoten a_n1 allen Knoten der Form vi mit $1 \leq i \leq k$ die Farbe i gibt und in der Komponente mit dem Knoten b_n1 allen Knoten der Form vi mit $1 \leq i \leq k$ die Farbe $(i + 1) \operatorname{rest} k$ gibt.

Ferner gilt für jede zulässige k-Färbung c_{n+1} des Graphen $G_{n+1}(\Gamma_2')$ und alle $v, w \in V_n(\Gamma)$: Sind v, w in derselben Komponente von $G_n(\Gamma)$, so ist $c_{n+1}(v1) = c_{n+1}(w1)$. Dies ist sehr leicht durch vollständige Induktion über den Abstand von v und w zu zeigen.

Schließlich konstruieren wir eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_2 mit

$$E(\Gamma_2) = E(\Gamma_2') \cup \{(b_n1, c_n1) : n \geq 1\}.$$

Sind in $G_n(\Gamma)$ die Knoten b_n und c_n in unterschiedlichen Komponenten, so bleibt die oben angegebene Knotenmarkierung für $G_{n+1}(\Gamma_2')$ eine gültige Markierung für $G_{n+1}(\Gamma_2)$. Sind in $G_n(\Gamma)$ die Knoten b_n und c_n in der gleichen Komponente, so wird jede gültige Knotenmarkierung c_{n+1} von $G_{n+1}(\Gamma_2')$ wegen $c_{n+1}(b_n1) = c_{n+1}(c_n1)$ zu einer ungültigen Markierung für $G_{n+1}(\Gamma_2)$. Folglich ist $G_{n+1}(\Gamma_2)$ genau dann mit k Farben knotenfärbbar, wenn c_n und a_n in der gleichen Komponente von $G_n(\Gamma)$ sind.

4. Wir wählen als Alphabet $X \cup \{1, 2, 3\}$, $1, 2, 3 \notin X$. Es gibt eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_3 mit

$$\begin{aligned} E(\Gamma_3) &= E(\Gamma) \cup \{(b_n, x^n) : n \geq 1, x \in \{1, 2, 3\}\} \cup \\ &\quad \{(x^n, y^n) : n \geq 1, x, y \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{(x^n, c_n) : n \geq 1, x \in \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Der von den Knoten $b_n, c_n, 1^n, 2^n, 3^n$ induzierte ungerichtete Teilgraph ist bis auf die Kante zwischen b_n und c_n vollständig. Liegen c_n und b_n in $G_n(\Gamma)$ in der gleichen Komponente, so ist dieser Graph mit dem Weg von c_n nach b_n eine Unterteilung des vollständigen Graphen mit 5 Knoten, und damit ist $G_n(\Gamma)$ nicht planar.

Sind dagegen c_n und b_n in verschiedenen Komponenten, so ist $G_n(\Gamma_3)$ planar. Man bettet die Komponenten von c_n bzw. b_n innerhalb bzw. außerhalb des Dreiecks ein, welches durch $1^n, 2^n, 3^n$ definiert ist.

5. Zunächst sei daran erinnert, daß ein Graph genau dann Eulersch ist, wenn er stark zusammenhängend ist und für jeden seiner Knoten der Eingangsgrad und Ausgangsgrad gleich sind.

   Wir wählen als Alphabet $X \cup \{1,2\}$, $1,2 \notin X$ und setzen

   $E_4 = \{(v1, v2) : v \in V1(\Gamma_1)\} \cup \{(v2, w1) : (v, w) \in E(\Gamma_1)\} \cup \{(w1, v1) : (v, w) \in E(\Gamma_1)\}$.

   Es gibt eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_4 mit $E(\Gamma_4) = E_4$. Der Graph $G_{n+1}(\Gamma_4)$ entsteht, indem in $G_n(\Gamma_1)$ ein Knoten v durch die Knoten $v1, v2$ ersetzt wird, falls eine Kante von v ausgeht, und sonst durch $v1$ ersetzt wird, und eine Kante (v, w) durch den Zyklus $(v1, v2, w1, v1)$ ersetzt wird. Für jeden Knoten $v1$ ist der Eingangsgrad offensichtlich gleich dem Ausgangsgrad. Da von jedem Knoten $v \in V1(\Gamma_1)$ genau eine Kante ausgeht, hat jeder Knoten $v2$ Eingangsgrad und Ausgangsgrad 1. Weiterhin folgt durch vollständige Induktion, daß vi, wj, $i, j \in \{1, 2\}$, genau dann in der gleichen starken Zusammenhangskomponente von $G_{n+1}(\Gamma_4)$ liegen, wenn v und w in der gleichen schwachen Zusammenhangskomponente von $G_n(\Gamma_1)$ liegen. Damit ist $G_{n+1}(\Gamma_4)$ genau dann Eulersch, wenn $G_n(\Gamma_1)$ schwach zusammenhängend ist.

6. Zunächst stellen wir fest, daß für einen Eulerschen Graphen G mit antisymmetrischer Kantenrelation der Kantengraph $\mathcal{L}(G)$ Hamiltonsch ist, denn einem Eulerkreis $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1$ in G entspricht der Hamiltonkreis
   $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1), (v_1, v_2)$ in $\mathcal{L}(G)$.

   Nun konstruieren wir nach Satz 3.5.9 die synchrone reguläre Kantengrammatik Γ_5, so daß $G_{n+1}(\Gamma_5)$ für $n \geq 1$ der Kantengraph von $G_{n+1}(\Gamma_4)$ ist. Ist $G_{n+1}(\Gamma_4)$ nicht zusammenhängend, so ist auch $G_{n+1}(\Gamma_5)$ nicht zusammenhängend und folglich nicht Hamiltonsch. Ist $G_{n+1}(\Gamma_4)$ zusammenhängend, so ist $G_{n+1}(\Gamma_4)$ Eulersch, und wegen der Antisymmetrie von $E_{n+1}(\Gamma_4)$ ist $G_{n+1}(\Gamma_5)$ Hamiltonsch. Somit ist $G_{n+1}(\Gamma_5)$ genau dann Hamiltonsch, wenn $G_{n+1}(\Gamma_4)$ zusammenhängend ist, also genau dann, wenn a_n und c_n in $G_n(\Gamma)$ in der gleichen Komponente liegen.

Nach den Konstruktionen ist
$\text{card } V_n(\Gamma_1) = \text{card } V_n(\Gamma)$, $\text{card } V_{n+1}(\Gamma_2) = k \text{ card } V_n(\Gamma)$, $\text{card } V_n(\Gamma_3) = \text{card } V_n(\Gamma) + 3$,
$\text{card } V_{n+1}(\Gamma_4) = \text{card } V_n(\Gamma_1) + \text{card } E_n(\Gamma_1) = \text{card } V_n(\Gamma) + \text{card } E_n(\Gamma) + 1 = 2 \text{ card } V_n(\Gamma) - 1$,
$\text{card } V_n(\Gamma_5) = \text{card } E_n(\Gamma_4) = 3 \text{ card } (E_n(\Gamma_1)) = 3 \text{ card } (V_n(\Gamma)) - 3$.

Wählt man für Γ die Kantengrammatik Γ_2' aus dem Beweis von Satz 3.5.4 $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $c_n = \#cb^{n-2}$, so ist $\text{card } V_n(\Gamma) = n4^{n-1} + 2$, und c_n und a_n sind genau dann in der gleichen Komponente, wenn n eine Quadratzahl ist. Mit den Argumenten aus dem Beweis von Satz 3.5.4 läßt sich zeigen, daß die Menge aller zusammenhängenden Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_1)$, die Menge aller azyklischen Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_1)$, die Menge aller k-knotenfärbbaren Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_2)$, die Menge aller planaren Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_3)$, die Menge aller Eulerschen Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_4)$ und die Menge aller Hamiltonschen Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma_5)$ nicht durch synchrone reguläre Kantengrammatiken erzeugbar sind.

□

Als letztes zeigen wir zwei positive Abschlußresultate mit Hilfe rationaler Potenzreihen. Ein ungerichteter Graph heißt *regulär vom Grad k*, wenn alle Knoten den Grad k besitzen und *regulär*, wenn er regulär von beliebigem Grad k ist.

Satz 3.5.14 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Es existiert eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ, so daß $\mathcal{G}(\Theta)$ die Menge aller regulären Graphen aus $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ ist.*

Beweis. Es sei X das Knotenalphabet von Γ und $x \in X$. Ferner setzen wir $V = V(\Gamma)$. Zunächst läßt sich ein nichtdeterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$ derart konstruieren, daß $L(\mathcal{A}) = V$ gilt und $d_{\mathcal{A}}(v) = d(v|\Gamma) + 1$ für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Weiter sei auf X eine Ordnungsrelation $\leq$ gegeben, die auf X^* zur quasilexikographischen Ordnung $\leq_{\text{qlex}}$ erweitert wird. Es sei

$$M = \{w \in V : \forall v((v \in V \wedge |v| = |w|) \to w \leq_{\text{qlex}} v)\}.$$

Wie man leicht sieht, ist mit V auch M regulär. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir m_n als das (einzige) Wort aus M mit der Länge n bzw. als x^n, falls ein solches Wort nicht existiert.

Da V und M regulär sind, sind die Potenzreihen

$$D_{\mathcal{A}} = \sum_{w \in X^*} d_{\mathcal{A}}(w)w = \sum_{w \in V} d_{\mathcal{A}}(w)w, \; C_V = \sum_{w \in V} w \text{ und } C_M = \sum_{w \in M} w$$

$\mathbb{N}$-rational. Es sei ferner $h_0 : X^* \to \{x\}^*$ der Homomorphismus mit $h_0(a) = x$ für alle $a \in X$. Wir konstruieren jetzt die Potenzreihen $r_1, \ldots, r_5$:

$$\begin{aligned}
r_1 &= D_{\mathcal{A}} \odot C_M = \sum_{w \in M} d_{\mathcal{A}}(w)w = \sum_{n=0}^{\infty} d_{\mathcal{A}}(m_n)m_n \\
r_2 &= h_0 r_1 = \sum_{n=0}^{\infty} d_{\mathcal{A}}(m_n)x^n \\
r_3 &= (h_0^{-1} r_2) \odot C_V = \sum_{w \in V} d_{\mathcal{A}}(m_{|w|})w \\
r_4 &= (r_3 - D_{\mathcal{A}}) \odot (r_3 - D_{\mathcal{A}}) = \sum_{w \in V} (d_{\mathcal{A}}(m_{|w|}) - d_{\mathcal{A}}(w))^2 w \\
r_5 &= h_0 r_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{w \in V \cap X^{[n]}} (r_4, w) \right) x^n
\end{aligned}$$

Wegen der Abschlußeigenschaften rationaler Potenzreihen sind die Reihen r_1, r_2, r_3 $\mathbb{N}$-rational und r_4, r_5 $\mathbb{Z}$-rational. Offenbar ist $(r_5, x^n) = 0$ genau dann, wenn $d_{\mathcal{A}}(w) = d_{\mathcal{A}}(m_n)$ für alle $w \in V \cap X^{[n]}$ gilt, d.h. genau dann, wenn $G_n(\Gamma)$ regulär oder leer ist.

Für eine $\mathbb{Z}$-rationale Potenzreihe $r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist die Sprache $\{x^n : a_n = 0\}$ regulär [5, Theorem IV.4.1]. Folglich gibt es eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ mit $G_n(\Theta) = G_n(\Gamma)$, falls $(r_5, x^n) = 0$, und $G_n(\Theta) = (\emptyset, \emptyset)$, sonst. $\square$

Satz 3.5.15 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Es existieren synchrone reguläre Kantengrammatiken Θ_1, Θ_2, so daß $\mathcal{G}(\Theta_1)$ bzw. $\mathcal{G}(\Theta_2)$ die Mengen aller Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma)$ bzw. $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ mit ausschließlich Eulerschen bzw. ungerichtet Eulerschen Komponenten sind.*

Beweis. Es sei X das Knotenalphabet von Γ und $x \in X$. Sei Γ_u eine synchrone reguläre Kantengrammatik mit $\mathcal{G}(\Gamma_u) = \mathcal{G}^u(\Gamma)$. Ferner setzen wir $V = V(\Gamma) = V(\Gamma_u)$.

Aus Γ bzw. Γ_u kann man nichtdeterministische endliche Automaten $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ bzw. $\mathcal{A}$ derart konstruieren, daß $L(\mathcal{A}_i) = V(\Gamma_i)$ für $i = 1, 2$ bzw. $L(\mathcal{A}) = V(\Gamma_u)$ gilt und $d_{\mathcal{A}_1}(v) = d_{out}(v|\Gamma) + 1$ für alle $v \in V1(\Gamma)$, $d_{\mathcal{A}_2}(v) = d_{in}(v|\Gamma) + 1$ für alle $v \in V2(\Gamma)$ sowie $d_{\mathcal{A}}(v) = d(v|\Gamma_u) + 1$ für alle $v \in V(\Gamma)$ erfüllt ist.

Es seien D_1, D_2, D, C die rationalen Potenzreihen mit

$$D_i = \sum_{w \in X^*} d_{\mathcal{A}_i}(w)w, i = 1, 2,\ D = \sum_{w \in X^*} d_{\mathcal{A}}(w)w,\ C = \sum_{w \in V(\Gamma)} w.$$

Es sei $h : X^* \to \{x\}^*$ der Homomorphismus mit $h(a) = x$ für alle $a \in X$, und H sei der natürliche Halbringhomomorphismus von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}_2$ mit $H(n) = n \operatorname{rest} 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Potenzreihe $R = h\left((D_1 - D_2) \odot (D_1 - D_2)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{w \in X^{[n]}} (D_1 - D_2, w)^2\right) x^n$ ist in $\mathbb{Z}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x \rangle\rangle$. Es gilt $(R, x^n) = 0$ genau dann, wenn $d_{\mathcal{A}_1}(v) = d_{\mathcal{A}_2}(v)$ für alle $v \in X^{[n]}$, d.h., wenn alle Komponenten von $G_n(\Gamma)$ gerichtet Eulersch sind.

Die Potenzreihe $E = H(D + C) = \sum_{w \in X^*} ((C + D, w) \operatorname{rest} 2)\, w$ ist $\mathbb{N}_2$-rational. Es gilt $(E, w) = 1$ genau dann, wenn $d(w|\Gamma_u)$ ungerade ist. Das heißt, alle Komponenten von $G_n(\Gamma)$ sind genau dann ungerichtet Eulersch, wenn $(E, w) = 0$ für alle $w \in X^{[n]}$.

Die Sprachen $L_1 = \{x^n : (R, x^n) = 0\}$ sowie $L_2 = \{x^n : (E, w) = 0 \text{ für alle } w \in X^{[n]}\}$ sind regulär. Es gibt demzufolge synchrone reguläre Kantengrammatiken Θ_1, Θ_2 mit
$G_n(\Theta_1) = \begin{cases} G_n(\Gamma), & \text{falls } x^n \in L_1 \\ (\emptyset, \emptyset), & \text{sonst} \end{cases}$ bzw. $G_n(\Theta_2) = \begin{cases} G_n(\Gamma_u), & \text{falls } x^n \in L_2 \\ (\emptyset, \emptyset), & \text{sonst} \end{cases}$. $\square$

3.6 Entscheidungsprobleme

Für eine gegebene Kantengrammatik stellen sich zum einen die aus der klassischen Theorie der formalen Sprachen bekannten Entscheidungsprobleme, wie z.B. das Leerheitsproblem, das Elementproblem oder das Äquivalenzproblem. Außerdem ergeben sich Entscheidungsprobleme bezüglich graphentheoretischer Eigenschaften. Im folgenden werden die Probleme und die Resultate kurz genannt. Danach werden zuerst die positiven und anschließend die negativen Ergebnisse bewiesen.

Klassische Entscheidungsprobleme. Da Graphensprachen Verallgemeinerungen von Sprachen darstellen, lassen sich die Entscheidungsprobleme aus der Theorie formaler Sprachen auf Graphensprachen übertragen. Im einzelnen betrachten wir folgende Probleme für gegebene Kantengrammatiken $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ und Graphen G..

- *Leerheitsproblem*: Ist $\mathcal{G}(\Gamma)$ leer?
- *Endlichkeitsproblem*: Ist $[\mathcal{G}](\Gamma)$ endlich?
- *Elementproblem*: Ist $[G]$ in $[\mathcal{G}](\Gamma)$ enthalten?
- *Teilgraphproblem*: Enthält ein Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu G isomorphen Teilgraphen?
- *universelles Teilgraphproblem*: Enthält jeder Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu G isomorphen Teilgraphen?
- *Äquivalenzproblem*: Gilt $[\mathcal{G}](\Gamma_1) = [\mathcal{G}](\Gamma_2)$?
- *Disjunktheitsproblem*: Ist der Durchschnitt von $[\mathcal{G}](\Gamma_1)$ und $[\mathcal{G}](\Gamma_2)$ leer?
- *Kürzbarkeitsproblem*: Ist die Graphenfolge $\mathcal{G}(\Gamma)$ kürzbar?

In [3] wurden die meisten dieser Fragen bereits untersucht. Dabei wurde für alle genannten Probleme die Unentscheidbarkeit für den Fall gezeigt, daß die gegebenen Kantengrammatiken monoton sind. Außerdem wurden die Entscheidbarkeit des Leerheitsproblems sowie die Unentscheidbarkeit des Teilgraphproblems für den (nichtsynchronen) regulären Fall bewiesen.

Wir zeigen im folgenden die Entscheidbarkeit des Leerheitsproblems und des Elementproblems für kontextfreie Kantengrammatiken sowie die Entscheidbarkeit des Endlichkeitsproblems für synchrone kontextfreie und für reguläre Kantengrammatiken. Das Teilgraphproblem, das universelle Teilgraphproblem und das Kürzbarkeitsproblem sind für synchrone reguläre Kantengrammatiken entscheidbar. Schließlich sind das Äquivalenzproblem sowie das Disjunktheitsproblem für synchrone reguläre Kantengrammatiken unentscheidbar.

Graphentheoretische Entscheidungsprobleme. Für eine Kantengrammatik Γ und eine graphentheoretische Eigenschaft P stellen sich die Entscheidungsprobleme, ob die Familie $[\mathcal{G}_P](\Gamma)$ aller von Γ erzeugten Graphen mit der Eigenschaft P endlich, leer bzw. gleich $[\mathcal{G}](\Gamma)$ ist. Entscheidungsprobleme dieser Art wurden von Berman und Shannon [3] bzw. von Dassow [8] betrachtet. In [3] wurde die Unentscheidbarkeit der entsprechenden Fragestellungen für einige Eigenschaften und monotone Kantengrammatiken gezeigt; in [8] wurden Unentscheidbarkeitsresultate für lineare Kantengrammatiken und einige Eigenschaften gezeigt.

Wir konzentrieren uns im folgenden auf synchrone reguläre Kantengrammatiken. Positive Resultate lassen sich als Folge der Resultate aus Abschnitt 3.5 für solche Eigenschaften erzielen, die durch prädikatenlogische Sätze 1. Stufe beschreibbar sind. Negative Entscheidbarkeitsresultate erhält man dagegen für die in Satz 3.5.13 genannten Eigenschaften, also insbesondere die Eigenschaften, zusammenhängend, azyklisch oder ein Baum zu sein. Eine weitere Art von Entscheidungsproblemen ist die Frage, ob ein graphentheoretischer Parameter (z.B. der maximale Knotengrad) für alle Graphen einer Graphenfamilie beschränkt bzw. durch eine gegebene Konstante beschränkt ist. Wir zeigen unter anderem, daß das Problem der Beschränktheit des maximalen Knotengrades (*bounded degree problem*) für synchrone reguläre Kantengrammatiken entscheidbar ist; bei vorgegebener Schranke ist dieses Problem auch für beliebige reguläre Kantengrammatiken entscheidbar; für synchrone lineare Kantengrammatiken sind beide Varianten unentscheidbar.

Positive Entscheidbarkeitsresultate

Die Entscheidbarkeit der Probleme der Leerheit, der Endlichkeit sowie der Kürzbarkeit läßt sich direkt aus analogen Entscheidbarkeitsresultaten für gewöhnliche Sprachen ableiten.

Satz 3.6.1 *Das Leerheitsproblem ist für kontextfreie Kantengrammatiken entscheidbar; das Endlichkeitsproblem ist für synchrone kontextfreie sowie für reguläre Kantengrammatiken entscheidbar.*

Beweis. Es sei Γ eine Kantengrammatik. Dann ist $[\mathcal{G}](\Gamma)$ genau dann leer bzw. endlich, wenn $V(\Gamma)$ leer bzw. schlank ist. Das Problem der Leerheit ist für $\mathbf{Z}$-Valenzgrammatiken, das Problem der Schlankheit ist für kontextfreie Grammatiken entscheidbar. □

Offen ist die Entscheidbarkeit des Problems der Schlankheit für $\mathbf{Z}$-Valenzgrammatiken und damit das Endlichkeitsproblem für kontextfreie Kantengrammatiken. Entscheidbar ist für Valenzgrammatiken das Problem der k-Schlankheit bei gegebenem k (Satz 2.7.3) und damit für kontextfreie Kantengrammatiken die Frage, ob für gegebenes k die Knotenzahl jedes erzeugten Graphen durch k beschränkt ist.

Lemma 3.6.2 *Es sei $\mathcal{A} = (Z, X, z_0, \delta, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$*

1. *k-kürzbar (im strengen Sinne k-kürzbar) für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ ist,*

2. *kürzbar ist.*

Beweis. Für $q \in F$ sei $\mathcal{A}'_q$ der endliche Automat $\mathcal{A}'_q = (Z, \{a\}, q, \delta', F')$ mit

$$\begin{aligned} \delta' &= \{(z_2, a, z_1) : \delta(z_1, x) = z_2 \text{ für ein } x \in X\}, \\ F' &= \{z \in Z \setminus F : \delta(z_0, w) = z \text{ für unendlich viele } w \in X^*\}. \end{aligned}$$

Die Menge F' ist effektiv berechenbar. Offensichtlich gilt $z \in \delta'(q, a^k)$ genau dann, wenn $\delta(z, w) = q$ für ein $w \in X^{[k]}$ erfüllt ist. Man kann effektiv einen deterministischen endlichen

Automaten $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}') = \bigcup_{q \in F} L(\mathcal{A}'_q)$ konstruieren. Ist $a^k \in L(\mathcal{A}')$ für $k \geq 1$, so gibt es einen Zustand $z \in F'$, einen Zustand $q \in F$ und ein Wort $w \in X^{[k]}$ mit $\delta(z, w) = q$. Nach Definition von F' gibt es dann unendliche viele Wörter v mit $v \notin L(\mathcal{A})$ und $vw \in L(\mathcal{A})$, d.h., $L(\mathcal{A})$ ist nicht k-kürzbar.

Ist umgekehrt $L(\mathcal{A})$ nicht k-kürzbar, so gibt es unendlich viele Wörter $v \notin L(\mathcal{A})$, für die ein $u \in X^{[k]}$ mit $vu \in L(\mathcal{A})$ existiert. Wegen der Endlichkeit von Z und $X^{[k]}$ gibt es einen Zustand $z \in Z \setminus F$, einen Zustand $q \in F$ und ein Wort $w \in X^{[k]}$, so daß $\delta(z_0, v) = z$ und $\delta(z, w) = q$ für unendlich viele v gilt, d.h. $a^k \in L(\mathcal{A}'_q)$.

Damit ist $L(\mathcal{A})$ genau dann k-kürzbar, wenn a^k nicht in $L(\mathcal{A}')$ ist; $L(\mathcal{A})$ ist genau dann kürzbar, wenn $\{a\}^+ \setminus L(\mathcal{A}')$ nicht leer ist. Die Frage der k-Kürzbarkeit bzw. der Kürzbarkeit von $L(\mathcal{A})$ ist damit auf das Elementproblem für $\mathcal{A}'$ und a^k bzw. das Leerheitsproblem für $L(\mathcal{A}')$ zurückgeführt.

Analog läßt sich das Problem der strengen k-Kürzbarkeit von $L(\mathcal{A})$ auf das Elementproblem für a^k und $\mathcal{A}''$ zurückführen, wobei $\mathcal{A}''$ aus $\mathcal{A}'$ entsteht, wenn man als Menge der Endzustände $F'' = \{z \in Z \setminus F : \delta(z_0, w) = z$ für ein $w \in X^*\}$ statt F' verwendet. □

Satz 3.6.3 *Für eine gegebene synchrone reguläre Kantengrammatik* Γ *und eine natürliche Zahl* k *ist es entscheidbar, ob* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *kürzbar bzw. (streng)* k*-kürzbar ist.*

Beweis. Es sei $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$. Man kann eine synchrone reguläre Kantengrammatik Θ derart konstruieren, daß die Graphenfolge $\mathcal{G}(\Gamma)$ genau dann (streng) k-kürzbar ist, wenn die reguläre Sprache $E(\Theta) \subseteq (X^2)^*$ (streng) k-kürzbar ist. Mit Lemma 3.6.2 ist der Satz bewiesen.

Satz 3.6.4 *Es sei* φ *ein prädikatenlogischer Satz 1. Stufe. Für eine synchrone reguläre Kantengrammatik* Γ *ist es entscheidbar,*

1. *ob* $G \models \varphi$ *für ein* $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ *gilt,*
2. *ob* $G \models \varphi$ *für alle* $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ *gilt,*
3. *ob* $G \models \varphi$ *für höchstens endlich viele paarweise nichtisomorphe* $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ *gilt,*
4. *ob* $G \models \varphi$ *für alle bis auf endlich viele paarweise nichtisomorphe* $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ *gilt.*

Beweis. Die Grammatik Γ_φ im Beweis von Satz 3.5.12 kann effektiv konstruiert werden. Es gilt $G \models \varphi$ für ein $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ bzw. für alle $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ genau dann, wenn $E(\Gamma_\varphi)$ bzw. $E(\Gamma_{\neg\varphi})$ nicht leer ist. Es gilt $G \models \varphi$ für höchstens endlich viele nichtisomorphe $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ bzw. für alle bis auf endlich viele nichtisomorphe $G \in \mathcal{G}(\Gamma)$ genau dann, wenn $E(\Gamma_\varphi)$ bzw. $E(\Gamma_{\neg\varphi})$ schlank ist. Damit sind die Probleme auf das Leerheitsproblem bzw. das Schlankheitsproblem für reguläre Sprachen zurückgeführt. □

Als Folgerung ergeben sich die Entscheidbarkeit des Elementproblems, des Teilgraphproblems und des universellen Teilgraphproblems:

Satz 3.6.5 *Es seien Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik und H ein Graph. Es ist entscheidbar,*

- *ob ein Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu H isomorphen Teilgraphen enthält,*
- *ob jeder Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu H isomorphen Teilgraphen enthält,*
- *ob höchstens endlich viele Graphen aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu H isomorphen Teilgraphen enthalten,*
- *ob alle bis auf endlich viele Graphen aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen zu H isomorphen Teilgraphen enthalten,*
- *ob ein Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ zu H isomorph ist.*

Positive Resultate gelten auch für die analogen Probleme bezüglich induzierter *Teilgraphen.*

Beweis. Es sei $H = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ein Graph G enthält einen zu H isomorphen Teilgraphen genau dann, wenn $G \models \varphi$ mit

$$\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le k} \neg x_i \equiv x_j \wedge \bigwedge_{(i,j) \in E} \mathbf{edge}(x_i, x_j) \right) .$$

G enthält einen zu H isomorphen induzierten Teilgraph genau dann, wenn $G \models \psi$ mit

$$\psi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le k} \neg x_i \equiv x_j \wedge \bigwedge_{(v_i, v_j) \in E} \mathbf{edge}(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{(v_i, v_j) \notin E} \neg \mathbf{edge}(x_i, x_j) \right) .$$

G ist genau dann isomorph zu H, wenn $G \models \chi$ mit

$$\chi = \psi \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_{n+1} \bigvee_{1 \le i < j \le n+1} x_i \equiv x_j \, .$$

Die Behauptungen des Satzes folgen nun unmittelbar aus Satz 3.6.4. □

Auch die Beschränktheit einiger graphentheoretischer Parameter durch eine gegebene Konstante kann mit den Mitteln der Logik erster Stufe beschrieben werden. Der Vollständigkeit halber geben wir die Definitionen dieser Parameter hier an.

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Der *Durchmesser* von G ist das Supremum der Knotenabstände in G. Die Taillenweite von G ist die Länge des kleinsten Kreises. Falls G keinen Kreis enthält, so wird sie auf ∞ gesetzt. Eine Clique ist ein vollständiger Untergraph; die *Cliquenzahl* von G ist die maximale Knotenzahl einer Clique in G.

Satz 3.6.6 *Für eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ und eine gegebene Zahl k ist es entscheidbar, ob für alle $G \in \mathcal{G}^u(\Gamma)$ der maximale Knotengrad, der minimale Knotengrad, der Durchmesser, der maximale Komponentendurchmesser, die Taillenweite und die Cliquenzahl von G durch k beschränkt sind.*

Beweis. Es sei G ein Graph. Die Taillenweite von G ist genau dann durch k beschränkt, wenn G einen Kreis der Länge i mit $3 \leq i \leq k$ enthält; die Cliquenzahl ist genau dann durch k beschränkt, wenn der vollständige Graph mit $(k+1)$ Knoten nicht als Teilgraph enthalten ist. Der Durchmesser von G bzw. der maximale Durchmesser der Komponenten von G ist durch k beschränkt, wenn der k-te Potenzgraph G^k vollständig ist bzw. vollständige Graphen als Komponenten besitzt. Der minimale Knotengrad von G ist durch k beschränkt, falls $G \models \psi$ mit

$$\psi \quad = \quad \exists x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{k+1} \left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} \mathbf{edge}(x_0, x_i) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i < j \leq k+1} x_i \equiv x_j \right) .$$

□

Einige positive Entscheidbarkeitsresultate lassen sich mit Hilfe von formalen Potenzreihen zeigen.

Satz 3.6.7 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Es ist entscheidbar, ob es eine Zahl K gibt, so daß für alle Graphen in $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ der maximale Knotengrad durch K beschränkt ist.*

Beweis. Wie bereits gezeigt, kann man aus Γ einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ konstruieren, so daß $L(\mathcal{A}) = V(\Gamma)$ und $d_{\mathcal{A}}(v) = d(v|\Gamma)$ gilt. Die Frage, ob der maximale Knotengrad beschränkt ist, kann damit auf das Problem der Endlichkeit des Grades der Mehrdeutigkeit für endliche Automaten und damit auf das Problem der Endlichkeit des Wertebereichs einer $\mathbb{N}$-rationalen Potenzreihe zurückgeführt werden (Satz 1.4.2 und Satz 1.4.5). □

Satz 3.6.8 *Für eine gegebene synchrone reguläre Kantengrammatik Γ sind folgende Fragen entscheidbar:*

1. *Gibt es in $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ einen ungerichteten Graphen, dessen Komponenten ungerichtet Eulersch sind?*

2. *Bestehen alle ungerichteten Graphen in $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ aus ungerichtet Eulerschen Komponenten?*

3. *Bestehen alle Graphen in $\mathcal{G}(\Gamma)$ aus Eulerschen Komponenten?*

4. *Sind alle ungerichteten Graphen in $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ regulär?*

Beweis. Im Beweis von Satz 3.5.15 wurde eine formale Potenzreihe aus $\mathbb{N}_2^{\mathrm{rat}}\langle\langle x\rangle\rangle$ konstruiert, deren Koeffizient für x^n genau dann 0 ist, wenn die Komponenten von $G_n^u(\Gamma)$ ungerichtet Eulersch sind. In den Beweisen der Sätze 3.5.15, 3.5.14 wurden Potenzreihen aus $\mathbb{Z}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x\rangle\rangle$ konstruiert, so daß der Koeffizient von x^n genau dann 0 ist, wenn der Graph $G_n(\Gamma)$ bzw. der ungerichtete Graph $G_n^u(\Gamma)$ aus Eulerschen Komponenten besteht bzw. regulär ist. Mit Satz 1.4.4 folgen die Behauptungen.

Schließlich wollen wir das Elementproblem und das Teilgraphproblem für allgemeinere Kantengrammatiken betrachten. Bislang war lediglich bekannt, daß das Teilgraphproblem für reguläre Kantengrammatiken unentscheidbar ist [3]. Wir werden die Entscheidbarkeit des Elementproblems für kontextfreie Kantengrammatiken sowie die Entscheidbarkeit des Teilgraphproblems für gerichtete Bäume und reguläre Kantengrammatiken zeigen. Dabei werden die Resultate und Methoden aus Abschnitt 2.7 über schlanke Valenzsprachen benötigt.

Für den Rest dieses Unterabschnittes betrachten wir Kantengrammatiken mit dem Knotenalphabet X und dem Terminalalphabet $T = (X \times \{\lambda\}) \cup (\{\lambda\} \times X)$. Es seien $\# \notin X$ ein Symbol, $Y = X \cup \{\#\}$ und $g : T^* \to (Y^2)^*$ der Homomorphismus mit $g((a,\lambda)) = (a,\#)$, $g((\lambda,a)) = (\#,a)$ für $a \in X$. Mit $\#_n$ bezeichnen wir das Symbol $(\#,\ldots,\#) \in Y^n$. Die Homomorphismen $h_{n,i} : (Y^n)^* \to X^*$ seien durch $h_{n,i}(a) = \pi_X(\mathrm{pr}_i(a))$ für $a \in Y^n$ definiert.

Ist Γ eine kontextfreie bzw. reguläre Kantengrammatik, so ist $g(L(\Gamma))$ eine Sprache aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val},\mathrm{CF},\mathbf{Z})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathrm{Val},\mathrm{REG},\mathbf{Z})$. Ein Paar (v,w) ist genau dann in $E(\Gamma)$, wenn es in $g(L(\Gamma))$ ein Wort α mit $\mathrm{pr}_1(\alpha) = v$, $\mathrm{pr}_2(\alpha) = w$ gibt.

Satz 3.6.9 *Das Elementproblem ist entscheidbar für kontextfreie Kantengrammatiken.*

Beweis. Es sei $\Gamma = (N,X,T,P,S)$ eine kontextfreie Kantengrammatik. Wir betrachten zunächst die Sprache $L = g(L(\Gamma)) \cap D$ mit $D = \{\alpha \in (Y^2)^* : h_{2,1}(\alpha) \neq h_{2,2}(\alpha)\}$. Analog zum Vorgehen für die Sprache A_2 aus Behauptung 2.7.1 zeigt man $D \in \mathcal{L}(\mathrm{Val},\mathrm{REG},\mathbf{Z})$. Wegen $L(\Gamma) \in \mathcal{L}(\mathrm{Val},\mathrm{CF},\mathbf{Z})$ ist L in $\mathcal{L}(\mathrm{Val},\mathrm{CF},\mathbf{Q}_+)$.

Zwei Wörter $\alpha,\beta \in (Y^2)^*$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $\alpha \equiv \beta$, wenn $h_{2,i}(\alpha) = h_{2,i}(\beta)$ für $1 \le i \le 2$ erfüllt ist. Die Äquivalenzklasse von $\alpha \in (Y^2)^*$ bezüglich $\equiv$ wird mit $[\alpha]$ bezeichnet. Die Strukturfunktion modulo $\equiv$ für L definieren wir als

$$s_{\{L\}}(k) := \mathrm{card}\ \{[w] : w \in L \wedge |w| = k\}\ .$$

Offensichtlich ist ein Paar $(v,w) \in X^* \times X^*$, genau dann in $E(\Gamma) \setminus \mathrm{Id}_{X^*}$, wenn es ein $\alpha \in L$ mit $\mathrm{pr}_1(\alpha) = v, \mathrm{pr}_2(\alpha) = w$ gibt. Dabei gilt $|\alpha| = 2|v| = 2|w|$. Da äquivalente Wörter aus $(Y^2)^*$ zum gleichen Wortpaar aus $X^* \times X^*$ gehören, ist die Zahl der Kanten des Graphen $G_k(\Gamma)$ gleich $s_{\{L\}}(2k)$.

Sei nun $G = (V,E)$ ein Graph mit $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ und $E = \{e_1,\ldots,e_m\}$. $\$ \notin X$ sei ein weiteres Symbol Wir konstruieren im folgenden eine Sprache $L(G,\Gamma)$, die alle Wörter $w_1\$w_2\$\cdots w_n\$y_1\$\cdots y_m\$: w_i \in X^*, y_j \in (Y^2)^*$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, mit den folgenden Eigenschaften enthält:

(0) $w_i \in V(\Gamma)$, $y_j \in L$ für alle $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

(1) $|y_j| = 2|w_i|$ für alle $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

(2) $s_{V(\Gamma)}(w_i) = n$, $s_{\{L\}}(y_j) = m$ für alle $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

(3) $w_i \neq w_j$ für $1 \leq i < j \leq n$.

(4) $h_{2,1}(y_j) = w_r$, $h_{2,2}(y_j) = w_s$, falls $e_j = (v_r, v_s)$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$, für alle $1 \leq j \leq m$.

Nach Definition enthält $L(G, \Gamma)$ genau dann ein Wort der Form $w_1\$ \cdots w_n\$y_1\$ \cdots y_m\$$, wenn der Graph $G_k(\Gamma)$, $k = |w_1|$, isomorph zu G ist wobei $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, durch den Isomorphismus auf $w_i \in V_k(\Gamma)$ abgebildet wird.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $L(G, \Gamma)$ (effektiv) eine Sprache aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ ist. Wegen $V(\Gamma), L \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ und der Abgeschlossenheit dieser Sprachfamilie unter Konkatenation ist auch die Menge aller Wörter, die Bedingung (0) erfüllen, in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.7 zeigt man, daß die Mengen der Wörter, die Bedingung (1),(2) bzw. (3) erfüllen, in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$ sind. Da durch Bedingung (2) garantiert ist, daß $V_k(\Gamma)$ mit $k = |w_1|$ genau n Wörter enthält, kann man die Bedingung (4) durch

(4') $h_{2,1}(y_j) \neq w_p$, $h_{2,2}(y_j) \neq w_q$, mit $e_j = (v_r, v_s)$, $p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq r, q \neq s$ (für alle $1 \leq j \leq m$)

ersetzen. Erneut kann man zeigen, daß die Menge aller (4') erfüllenden Wörter eine Sprache aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$ ist. Damit ergibt sich $L(G, \Gamma)$ als Durchschnitt einer Sprache aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{CF}, \mathbf{Q}_+)$ mit Sprachen aus $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$. □

Es folgen einige weitere technische Definitionen und Resultate, um das Teilgraphproblem für reguläre Kantengrammatiken und Bäume zu entscheiden. Auf $(Y^n)^*$ definieren wir die binäre Relation $\leq_n$ wie folgt:

$$v \leq_n w :\Longleftrightarrow \exists v_1 \cdots \exists v_r \exists \ell_1 \cdots \exists \ell_r \exists \ell_{r+1} \left(v = v_1 \cdots v_r \wedge w = \#_n^{\ell_1} v_1 \cdots \#_n^{\ell_r} v_r \#_n^{\ell_{r+1}} \right) .$$

Offensichtlich ist $\leq_n$ eine Halbordnung, und aus $v \leq_n w$ folgt $\mathrm{pr}_{i_1,\ldots,i_k}(v) \leq_k \mathrm{pr}_{i_1,\ldots,i_k}(w)$ sowie $h_{n,i}(v) = h_{n,i}(w)$.

Als Wortrelation ist $\leq_n$ eine reguläre Transduktion. Für eine Sprache $L \subseteq (Y^n)^*$ notieren wir das Bild von L unter $\leq_n$ als $L_\leq$. Wegen der Reflexivität und Transitivität von $\leq_n$ gilt $L_\leq = (L_\leq)_\leq$.

Behauptung 3.6.10 *Für $w \in (Y^n)^*$ und $y \in Y^*$ mit $\mathrm{pr}_1(w) \leq_1 y$ existiert ein $v \in (Y^n)^*$ mit $w \leq_1 v$ und $\mathrm{pr}_1(v) = y$.*

Beweis. Es seien

- $w = w_1a_1w_2a_2 \cdots w_ra_rw_{r+1}$ mit $\mathrm{pr}_1(w_j) = \#^{|w_j|}$ für $1 \leq j \leq r+1$, $\mathrm{pr}_1(a_j) = x_j$, $x_j \in X$, für $1 \leq j \leq r$,
- $y = \#^{m_1}x_1 \cdots \#^{m_r}x_r\#^{m_{r+1}}$ mit $m_j \geq |w_j|$ für $1 \leq j \leq r+1$ und
- $\ell_j = m_j - |w_j|$ für $1 \leq j \leq r+1$.

Das gesuchte Wort v ergibt sich als $v = \#_n^{\ell_1}w_1a_1 \cdots \#_n^{\ell_r}w_ra_r\#_n^{\ell_{r+1}}w_{r+1}$. □

Behauptung 3.6.11 *Für $w \in (Y^n)^*$, $y_1, y_2 \in Y^*$ mit $h_{n,1}(w) = h_{1,1}(y_1)$ und $h_{n,i}(w) = h_{1,1}(y_2)$, $2 \leq i \leq n$, existiert ein $v \in (Y^n)^*$ mit $w \leq_n v$, $y_1 \leq_1 \mathrm{pr}_1(v)$ und $y_2 \leq_1 \mathrm{pr}_i(v)$.*

Beweis. Es seien

- $w = w_1a_1w_2a_2 \cdots w_ra_rw_{r+1}$ mit $\mathrm{pr}_1(w_j) = \#^{|w_j|}$ für $1 \leq j \leq r+1$, $\mathrm{pr}_1(a_j) = x_j$, $x_j \in X$, für $1 \leq j \leq r$ und
- $y = \#^{m_1}x_1 \cdots \#^{m_r}x_r\#^{m_{r+1}}$.

Für $u = \#_n^{m_1}w_1a_1 \cdots \#_n^{m_r}w_ra_r\#_n^{m_{r+1}}w_{r+1}$ gilt $w \leq_2 u$ und $y_1 \leq \mathrm{pr}_1(u)$. Analog konstruiert man ein Wort $v \in (Y^2)^*$ mit $u \leq_2 v$ und $y_2 \leq_1 \mathrm{pr}_i(v)$. Aus den oben angegebenen Eigenschaften von $\leq_n$ (Transitivität, Übertragbarkeit auf Projektionen) folgt $w \leq_2 u \leq_2 v$ und $y_1 \leq_1 \mathrm{pr}_1(u) \leq_1 \mathrm{pr}_1(v)$. □

Satz 3.6.12 *Für eine reguläre Kantengrammatik Γ und einen gerichteten Baum B ist es entscheidbar,*

- *ob in einem Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma)$ ein zu B isomorpher Teilgraph enthalten ist,*
- *ob in jedem Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma)$ ein zu B isomorpher Teilgraph enthalten ist.*

Beweis. Zunächst geben wir eine äquivalente induktive Definition der gerichteten Bäume an, die im wesentlichen dem Vorgehen bei der Tiefensuche entspricht.

(a) Ein Graph mit einem Knoten v und ohne Kanten ist ein gerichteter Baum und hat die Wurzel v.

(b) Sind $B_1 = (V_1, E_1)$ und $B_2 = (V_2, E_2)$ gerichtete Bäume mit den Wurzeln r_1 bzw. r_2 und disjunkten Knotenmengen, so ist der Graph B mit $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(r_1, r_2)\}$ ein gerichteter Baum mit der Wurzel r_1.

(c) Alle gerichteten Bäume lassen sich gemäß (a) und (b) darstellen.

$\Gamma = (N, X, T, P, S)$ sei eine reguläre Kantengrammatik, L' sei die Sprache $L' = g(L(\Gamma))_{\leq}$.
Für einen Baum B mit den Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in DFS-Reihenfolge und eine Kantengrammatik Γ konstruieren wir im folgenden eine Sprache $L(B, \Gamma) \subseteq (Y^n)^*$ mit $w \in L(B, \Gamma)$ genau dann, wenn der Graph $G_k(\Gamma)$, $k = |h_{n,1}(w)|$, einen zu B isomorphen Untergraphen mit den Knoten $h_{n,1}(w), \ldots, h_{n,n}(w)$ enthält, wobei v_i durch den Isomorphismus auf $h_{n,i}(w)$ abgebildet wird.

Induktiv definieren wir $L(B, \Gamma)$ so:

- Besteht B aus einem Knoten, so ist $L(B, \Gamma) = V(\Gamma)_{\leq}$.
- Sind $B_1 = (V_1, E_1)$ und $B_2 = (V_2, E_2)$ Bäume mit den disjunkten Knotenmengen V_1 und V_2, card $V_1 = n_1$, card $V_2 = n_2$, $n_1 + n_2 = n$, mit den Wurzeln r_1 bzw. r_2 und ist $B = (V, E)$ der Baum mit $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(r_1, r_2)\}$ so ist

$$\begin{aligned} L(B, \Gamma) \quad = \quad & \{\alpha \in (Y^n)^* : \mathrm{pr}_{1,\ldots,n_1}(\alpha) \in L(B_1, \Gamma)\} \cap \\ & \{\alpha \in (Y^n)^* : \mathrm{pr}_{n_1+1,\ldots,n_1+n_2}(\alpha) \in L(B_2, \Gamma)\} \cap \\ & \{\alpha \in (Y^n)^* : \mathrm{pr}_{1,n_1+1}(\alpha) \in L'\} \cap \\ & \{\alpha \in (Y^n)^* : h_{n,i}(\alpha) \neq h_{n,j}(\alpha), 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über die Knotenzahl n zeigen wir jetzt:

(1) $L(B, \Gamma) \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$ und $L(B, \Gamma) = L(B, \Gamma)_{\leq}$ für alle gerichteten Bäume B.

(2) Enthält $L(B, \Gamma)$ ein Wort $w \in (Y^n)^*$, so enthält $G_k(\Gamma)$, $k = |h_{n,1}(w)|$, einen zu B isomorphen Untergraphen mit den Knoten $h_{n,1}(w), \ldots, h_{n,n}(w)$ (in DFS-Reihenfolge).

(3) Enthält $G_k(\Gamma)$ einen zu B isomorphen Untergraphen mit den Knoten $y_1, \ldots, y_n$ (in DFS-Reihenfolge), so gibt es ein $w \in L(B, \Gamma)$ mit $h_{n,1}(w) = y_1, \ldots, h_{n,n}(w) = y_n$.

Für $n = 1$ sind alle drei Aussagen korrekt. Sei die Richtigkeit von (1),(2),(3) für alle $1 \leq i < n$ bewiesen.

(1) L' und $\{\alpha \in (Y^n)^* : h_{n,i}(\alpha) \neq h_{n,j}(\alpha), 1 \leq i < j \leq n\}$ sind in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $L(B_1, \Gamma), L(B_2, \Gamma) \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$ unter inversen Homomorphismen und unter Durchschnitt ist auch $L(B, \Gamma)$ in $\mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$. $L(B, \Gamma) = L(B, \Gamma)_{\leq}$ folgt ebenfalls leicht per Induktion.

(2) Es sei $w \in L(B, \Gamma)$ mit $h_{n,i}(w) = y_i$, $1 \leq i \leq n$. Nach Induktionsvoraussetzung und Definition von $L(B, \Gamma)$ enthält $G_k(\Gamma)$ mit $k = |y_1|$ die Kante (y_1, y_{n_1+1}), woraus $|y_{n_1+1}| = k$ und per Induktion $|y_i| = k$, für alle $1 \leq i \leq n$, folgt. Außerdem sind die y_i, $1 \leq i \leq n$, paarweise verschieden, und $G_k(\Gamma)$ besitzt einen zu B_1 isomorphen Teilgraphen mit den Knoten $y_1, \ldots, y_{n_1}$ (in DFS-Reihenfolge) sowie einen zu B_2 isomorphen

Teilgraphen mit den Knoten $y_{n_1+1}, \ldots, y_n$ (in DFS-Reihenfolge). Nach Definition von B gibt es nun in $G_k(\Gamma)$ einen zu B isomorphen Teilgraphen mit den Knoten $y_1, \ldots, y_n$ (in DFS-Reihenfolge).

(3) $G_k(\Gamma)$ enthalte einen zu B isomorphen Teilgraphen mit den Knoten $y_1, \ldots, y_n$ (in DFS-Reihenfolge). Nach Induktionsvoraussetzung enthält $L(B_1, \Gamma)$ ein Wort $w_1 \in (Y^{n_1})^*$ mit $h_{n_1,i}(w_1) = y_i, 1 \leq i \leq n_1$, und $L(B_2, \Gamma)$ ein Wort $w_2 \in (Y^{n_2})^*$ mit $h_{n_2,i}(w_2) = y_{n_1+i}, 1 \leq i \leq n_2$.

Weiterhin gibt es wegen $(y_1, y_{n_1+1}) \in E(\Gamma)$ in L' ein Wort v mit $h_{2,1}(v) = y_1$ und $h_{2,2}(v) = y_{n_1+1}$. Nach Behauptung 3.6.11 existiert ein Wort $v' \in L'$ mit $\mathrm{pr}_1(w_1) \leq_1 \mathrm{pr}_1(v')$, $\mathrm{pr}_1(w_2) \leq_1 \mathrm{pr}_2(v')$ und $v \leq_2 v'$. Nach Behauptung 3.6.10 gibt es Wörter $w_1' \in L(B_1, \Gamma)$, $w_2' \in L(B_2, \Gamma)$ mit $w_1 \leq_{n_1} w_1'$ und $\mathrm{pr}_1(w_1') = \mathrm{pr}_1(v')$ sowie $w_2 \leq_{n_2} w_2'$ und $\mathrm{pr}_1(w_2') = \mathrm{pr}_2(v')$. Das Wort $w \in (Y^n)^*$ mit $\mathrm{pr}_{1,\ldots,n_1}(w) = w_1'$ und $\mathrm{pr}_{n_1+1,\ldots,n}(w) = w_2'$ gehört damit zu $L(B, \Gamma)$ und erfüllt die Bedingung $h_{n,i}(w) = y_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Ist B ein gerichteter Baum mit n Knoten so ergibt sich die Menge

$$M(B) = \{k : G_k(\Gamma) \text{ enthält einen zu } B \text{ isomorphen Teilgraphen}\}$$

als die Längenmenge von $h_{n,1}(L(B, \Gamma))$. Es gibt in $[\mathcal{G}](\Gamma)$ einen Graphen mit einem zu B isomorphen Teilgraphen genau dann, wenn $M(B)$ nicht leer ist; alle Graphen in $[\mathcal{G}](\Gamma)$ besitzen einem zu B isomorphen Teilgraphen genau dann, wenn $M(B)$ und die Längenmenge $\Lambda(V(\Gamma))$ gleich sind. Wegen $h_{n,1}(L(B, \Gamma)), V(\Gamma) \in \mathcal{L}(\mathrm{Val}, \mathrm{REG}, \mathbf{Q}_+)$ sind $M(B)$ und $\Lambda(V(\Gamma))$ effektiv semilinear. Die Leerheit von $M(B)$ bzw. die Gleichheit von $M(B)$ und $\Lambda(V(\Gamma))$ sind damit entscheidbar. □

Unentscheidbarkeitsresultate

Zunächst zeigen wir die Unentscheidbarkeit einiger Probleme für synchrone reguläre Kantengrammatiken. Dies betrifft das Äquivalenzproblem, das Disjunktheitsproblem sowie die Entscheidungsfragen bezüglich der Leerheit und Endlichkeit von $[\mathcal{G}_P](\Gamma)$, wobei P eine der in Satz 3.5.13 genannten Eigenschaften bzw. deren Negation ist. Der Beweis der Unentscheidbarkeit erfolgt jeweils durch Reduktion einer Variante des speziellen Halteproblems für Turing-Maschinen. Zu einer gegebenen deterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ konstruieren wir eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ. Jeder Graph $G_n(\Gamma)$, $n \geq 3$, besteht aus zwei umgekehrt gerichteten Bäumen mit den Wurzeln A_n und B_n. Ein spezieller Blattknoten C_n ist in der Komponente von A_n, falls $\mathcal{M}$ das leere Wort in höchstens n Schritten akzeptiert, und in der Komponente von B_n anderenfalls. Aus der Unentscheidbarkeit des Halteproblems für das leere Wort folgt die Unentscheidbarkeit der Frage, ob C_n für alle $n \geq 3$ in der gleichen Komponente wie B_n liegt.

Definition 3.6.1 *Eine* deterministische Turingmaschine mit einseitigem Eingabeband *ist ein Tupel* $\mathcal{M} = (Z, X, z_0, \pounds, \$, \delta, F)$. *Dabei sind* Z *eine endliche, nichtleere Menge von*

Zuständen, X ein Alphabet, $X \cap Z = \emptyset$, $z_0 \in Z$ der Anfangszustand, $\pounds \notin X \cup Z$ das linke Begrenzungssymbol, $\$ \notin X \cup Z$ das Blanksymbol, $F \subseteq Z$ die Menge der Endzustände und $\delta : Z \times (X \cup \{\pounds, \$\}) \to Z \times (X \cup \{\pounds, \$\}) \times \{R, N, L\}$ die Überführungsfunktion, wobei folgende Einschränkungen gelten:

$\delta(z, \pounds) \in Z \times \{\pounds\} \times \{R, N\}$,

$\delta(z, a) \in Z \times (X \cup \{\$\}) \times \{R, N, L\}$ *für* $z \in Z, a \in X \cup \{\$\}$.

Das heißt, das Begrenzungssymbol tritt genau am linken Rand auf und wird nicht nach links überquert.

Eine Konfiguration *von $\mathcal{M}$ ist ein Wort aus $\pounds(X \cup \{\$\})^* Z (X \cup \{\$\})^*$. Eine Konfiguration heißt* Endkonfiguration, *falls sie in $\pounds(X \cup \{\$\})^* F (X \cup \{\$\})^*$ ist. Die Menge aller Konfigurationen bezeichnen wir mit $C(\mathcal{M})$, die Menge aller Endkonfigurationen mit $FC(\mathcal{M})$.*

Die Überführungsfunktion $\hat{\delta} : C(\mathcal{M}) \to C(\mathcal{M})$ ist für $z \in Z, a, b \in (X \cup \{\pounds, \$\}), v, w \in (X \cup \{\pounds, \$\})^*$ definiert als:

$$\begin{array}{lcl} \hat{\delta}(vaz) & = & va'\$z, \text{ falls } \delta(z,a) = (z', a', R) \\ \hat{\delta}(vazbw) & = & va'bzw, \text{ falls } \delta(z,a) = (z', a', R) \\ \hat{\delta}(vazw) & = & \begin{cases} vz'a'w, & \text{falls } \delta(z,a) = (z', a', L) \\ va'z'w, & \text{falls } \delta(z,a) = (z', a', N) \end{cases} \end{array}$$

Die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{M})$ ist definiert als:

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in X^* : \exists n (n \in \mathbb{N} \wedge \hat{\delta}^n(\pounds z_0 w) \in FC(\mathcal{M}))\}.$$

Zwei Konfigurationen $c_1, c_2 \in C(\mathcal{M})$ heißen *äquivalent*, falls $c_1\$^* = c_2\$^*$ gilt. Sind c_1 und c_2 äquivalent, so sind auch $\hat{\delta}(c_1)$ und $\hat{\delta}(c_2)$ äquivalent.

Die Interpretation der Turingmaschine erfolgt wie üblich: Entsprechend der Übergangstabelle wird das aktuelle Symbol (links vom Zustand) umgewandelt und der Lese-Schreib-Kopf verschoben.

Wie man leicht sieht, gilt $|c| \leq |\hat{\delta}(c)| \leq |c| + 1$ für jede Konfiguration c. Im folgenden wird o.B.d.A. zusätzlich $\delta(z_0, \pounds) = (z_1, \pounds, N)$, $\delta(z_1, \pounds) = (z_2, \pounds, N)$ verlangt. Dadurch ist garantiert, daß $|\hat{\delta}^n(\pounds z_0)| \leq n$ für alle $n \geq 2$ gilt.

Wegen der Äquivalenz von deterministischen Turingmaschinen mit einseitigem Band und allgemeinen Turingmaschinen und nach dem Satz von Rice [18, Satz 8.6] gilt:

Satz 3.6.13 *Für eine deterministische Turingmaschine mit einseitigem Band $\mathcal{M}$ ist es unentscheidbar, ob $\lambda \in L(\mathcal{M})$ gilt.*

Sei nun $\mathcal{M} = (Z, X, z_0, \pounds, \$, \delta, F)$ eine gegebene deterministische Turingmaschine mit einseitigem Band. Wir konstruieren die von $\mathcal{M}$ abhängige binäre Relation

$$U_{\mathcal{M}} = \{(c, \delta(c)) : c \in C(\mathcal{M}) \wedge |\delta(c)| = |c|\} \cup \{(c, c) : c \in C(\mathcal{M}) \wedge |\delta(c)| = |c| + 1\}.$$

Offensichtlich ist $U_{\mathcal{M}}$ eine Abbildung von $C(\mathcal{M})$ auf sich. Es gilt $U^n_{\mathcal{M}}(c) = \hat{\delta}^m(c)$ mit $m = \max\left\{\ell : 0 \leq \ell \leq n \wedge |\hat{\delta}^\ell(c)| = |c|\right\}$. Insbesondere gilt für die Konfigurationen $c_n = \pounds z_0 \$^{n-2}$, $n \geq 2$: $U^n_{\mathcal{M}}(c_n) = \hat{\delta}^n(c_n)$, und damit ist $U^n_{\mathcal{M}}(c_n)$ äquivalent zu $\hat{\delta}^n(\pounds z_0)$. Außerdem ist $U_{\mathcal{M}}$ eine synchrone reguläre Relation, da sich c und $U_{\mathcal{M}}(c)$ nur an maximal drei aufeinanderfolgenden Stellen unterscheiden.

Die Relation

$$E(\mathcal{M}) = (U_{\mathcal{M}} \amalg \#) \cup \{(c\#, \#^{|c|+1}) : c \in FC(\mathcal{M})\} \cup \{(c\#, \$^{|c|+1}) : c \in C(\mathcal{M}) \setminus FC(\mathcal{M})\}$$

ist synchron und regulär; es existiert eine Kantengrammatik $\Gamma_{\mathcal{M}}$ mit $E(\Gamma_{\mathcal{M}}) = E(\mathcal{M})$. Für $n \geq 3$ besteht der Graph $G_n(\Gamma_{\mathcal{M}})$ aus zwei umgekehrt gerichteten Bäumen mit den Wurzeln $\#^n$ und $\$^n$. Der Knoten $C_n = \#\pounds z_0 \$^{n-3}$ ist ein Blatt und genau dann in der Komponente von $A_n = \#^n$, wenn $\hat{\delta}^{n-1}(\pounds z_0) \in FC(\mathcal{M})$ gilt.

Wegen der Unentscheidbarkeit der Frage, ob λ von $\mathcal{M}$ akzeptiert wird, ist es unentscheidbar, ob es ein n gibt, so daß C_n und A_n in einer Komponente liegen. Setzt man außerdem voraus, daß $\delta(q, a) = (q, a, N)$ für $q \in F$, $a \in X \cup \{\pounds, \$\}$ gilt, so folgt die Unentscheidbarkeit der Frage, ob C_n und A_n für alle bis auf endlich viele n in einer Komponente liegen. Die Anwendung der Konstruktionen aus Satz 3.5.13 liefert jetzt:

Satz 3.6.14 *Es sei Γ eine synchrone reguläre Kantengrammatik und P eine der in Satz 3.5.13 erwähnten graphentheoretischen Eigenschaften. Die folgenden Fragen sind unentscheidbar:*

- *Hat ein Graph aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ die Eigenschaft P?*
- *Haben alle Graphen aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ die Eigenschaft P?*
- *Haben unendlich viele Graphen aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ die Eigenschaft P?*
- *Haben alle bis auf endlich viele Graphen aus $[\mathcal{G}](\Gamma)$ die Eigenschaft P?*

Als weitere Folgerung erhält man

Satz 3.6.15 *Für eine synchrone reguläre Kantengrammatik Γ und eine Konstante k ist es unentscheidbar, ob für alle $G \in \mathcal{G}^u(\Gamma)$ die Komponentenzahl beschränkt bzw. durch k beschränkt ist.*

Beweis. Es sei $\Gamma = (N, X, X^2, P, S)$ eine synchrone reguläre Kantengrammatik. Ferner sei für jedes $n \geq 1$ ein Knoten A_n aus $V_n(\Gamma)$ derart definiert, daß $A = \{A_n : n \geq 1\}$ eine reguläre Sprache ist, und $1 \notin X$ sei ein Symbol. Die Relationen E_1 und E_2 mit

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(v_1 1 w_1, v_2 1 w_2) : (v_1 w_1, v_2 w_2) \in E(\Gamma), |v_1| = |v_2|\}, \\ E_2 &= \mathrm{Id}_A \amalg 1 = \{(v_1 1 a w_1, v_1 a 1 w_1), a \in X, v_1 a w_1 \in A\} \end{aligned}$$

sind synchron und regulär. Es gibt eine Kantengrammatik Θ mit $E(\Theta) = E_1 \cup E_2$. Der Graph $G_{n+1}(\Theta)$ besteht nach der Konstruktion von E_1 aus $(n+1)$ disjunkten Kopien von $G_n(\Gamma)$, wobei dem Knoten v aus $G_n(\Gamma)$ in der i-ten Kopie $(1 \leq i \leq n+1)$ der Knoten $v_1 1 v_2$ mit $v_1 v_2 = v$, $|v_1| = i-1$ zugewiesen ist. Nach der Definition von E_2 gibt es in $G_{n+1}(\Gamma)$ für $1 \leq i \leq n$ eine Kante von der i-ten Kopie von A_n zur $(i+1)$-ten Kopie. Ist $G_n(\Gamma)$ schwach zusammenhängend, so ist auch $G_{n+1}(\Theta)$ schwach zusammenhängend. Anderenfalls besteht $G^u_{n+1}(\Theta)$ aus mindestens $(n+2)$ Komponenten. Die Komponentenzahl der Graphen von $\mathcal{G}^u(\Theta)$ ist genau dann beschränkt, wenn alle bis auf endlich viele Graphen von $\mathcal{G}^u(\Gamma)$ zusammenhängend sind. Aus der Unentscheidbarkeit des letzteren Problems folgt die Behauptung. $\square$

Um die Unentscheidbarkeit des Äquivalenzproblems und des Disjunktheitsproblems zu zeigen, wird die obige Konstruktion verfeinert. Über die Graphen von $U_\mathcal{M} \amalg \#$ weiß man zunächst nur, daß ihre Komponenten umgekehrt gerichtete Bäume sind. Die folgenden Umformungen sorgen dafür, daß die Komponenten der Graphen gerichtete Wege sind. Dies wird erreicht, indem man einem Wort über dem Knotenalphabet nicht nur eine Konfiguration, sondern zusätzlich eine Folge von *lokalen Konfigurationen* zuordnet. Die lokale Konfiguration $loc(c)$ von $c = vazw \in C(\mathcal{M})$, $a \in X \cup \{\pounds, \$\}$, $z \in Z$, ist definiert als

$$loc(c) = \begin{cases} (z, a, 0), & \text{falls } w \neq \lambda, \\ (z, a, 1), & \text{falls } w = \lambda. \end{cases}$$

Es sei I die Menge der lokalen Konfigurationen und $C_t(\mathcal{M}) = \{c \in C(\mathcal{M}) : loc(c) = t\}$ für $t \in I$. Aus $c \neq c'$ und $loc(c) = loc(c')$ folgt $U_\mathcal{M}(c) \neq U_\mathcal{M}(c')$. Damit gibt es für jede Konfiguration c und jedes $t \in I$ höchstens eine Konfiguration $c_t \in C_t(\mathcal{M})$ mit $\delta(c_t) = c$.

Im folgenden sei $Y = X \cup Z \cup \{\pounds, \$, \#\} \cup I$. Ausgehend von $C_t(\mathcal{M})$, $C(\mathcal{M})$ und $U_\mathcal{M}$ definieren wir $\hat{C}_t(\mathcal{M}), \hat{C}(\mathcal{M}) \subseteq (Y^2)^*$ und $\hat{U}_\mathcal{M} \subseteq (Y^4)^*$:

$$\begin{aligned} \hat{C}_t(\mathcal{M}) &= \{w \in (Y^2)^* : \mathrm{pr}_1(w) = v_1\#v_2, v_1v_2 \in C_t(\mathcal{M}), \mathrm{pr}_2(w) \in st\$^*, s \in I^*, |s| = |v_1|\}, \\ \hat{C}(\mathcal{M}) &= \bigcup_{t \in I} \hat{C}_t(\mathcal{M}), \\ \hat{U}_\mathcal{M} &= \{w \in (Y^4)^* : \mathrm{pr}_{1,2}(w), \mathrm{pr}_{3,4}(w) \in \hat{C}(\mathcal{M}), \mathrm{pr}_{1,3}(w) \in U_\mathcal{M} \amalg \#, \\ &\qquad \mathrm{pr}_{2,4}(w) \in \{(t,t) : t \in I\}^*(\$ \times I)(\$, \$)^*\}. \end{aligned}$$

Für $w \in \hat{C}(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{pr}_1(w) = v_1\#v_2$, $\mathrm{pr}_2(w) = s\$^{|w|-|s|}$, $s \in I^+$ setzen wir:

- $\mathrm{conf}(w) := v_1v_2$ (zu w gehörige Konfiguration),
- $\mathrm{seq}(w) := s$ (Folge von lokalen Konfigurationen),
- $\mathrm{num}(w) := |v_1| + 1$ (Position von $\#$ in $\mathrm{pr}_1(w)$).

Man beachte, daß das letzte Glied der Folge $\mathrm{seq}(w)$ die lokale Konfiguration von $\mathrm{conf}(w)$ ist. Als binäre Relation über $(Y^2)^*$ betrachtet, ist $\hat{U}_\mathcal{M}$ eine injektive Abbildung von $\hat{C}1(\mathcal{M}) :=$

$\{\mathrm{pr}_{1,2}(w) : w \in \hat{U}_{\mathcal{M}}\}$ nach $\hat{C}2(\mathcal{M}) := \{\mathrm{pr}_{3,4}(w) : w \in \hat{U}_{\mathcal{M}}\}$. Aus $(v,w) \in \hat{U}_{\mathcal{M}}$ folgt nämlich $\mathrm{conf}(w) = U_{\mathcal{M}}(\mathrm{conf}(v))$ und $\mathrm{seq}(w) = \mathrm{seq}(v)loc(\mathrm{conf}(w))$, womit w durch v eindeutig bestimmt ist. Außerdem gilt $\mathrm{num}(w) = \mathrm{num}(v) + 1$. Umgekehrt ist $\mathrm{seq}(v)$ durch $\mathrm{seq}(w)$ gegeben, und da das letzte Zeichen von $\mathrm{seq}(v)$ die lokale Konfiguration von $\mathrm{conf}(v)$ festlegt, ist $\mathrm{conf}(v)$ durch $\mathrm{conf}(w)$ bestimmt.

Offensichtlich sind die Komponenten der Graphen $G_n(\hat{U}_{\mathcal{M}})$ Wege mit einer Länge von höchstens $(n-1)$. Die folgenden Schritte erweitern $\hat{U}_{\mathcal{M}}$ derart, daß der n-te Graph aus Wegen der Länge $(n-1)$ besteht.

In Anlehnung an $\hat{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned}\hat{C}'_t(\mathcal{M}) &= \{w \in (Y^2)^* : \mathrm{pr}_1(w) = v_1\#v_2, v_1v_2 \in C_t(\mathcal{M}), \mathrm{pr}_2(w) \in st\$^*, s \in I^*, |s| > |v_1|\},\\ \hat{C}'(\mathcal{M}) &= \bigcup_{t\in I} \hat{C}'_t(\mathcal{M}).\end{aligned}$$

Als Sprachen sind $\hat{C}(\mathcal{M})$, $\hat{U}_{\mathcal{M}}$, $\hat{C}1(\mathcal{M})$, $\hat{C}1(\mathcal{M})$ und $\hat{C}'(\mathcal{M})$ regulär. Die Abbildungen conf, seq und num setzen wir auf $\hat{C}'$ fort. Es seien $\tau_0, \tau_1 \subseteq (Y^2)^* \times (Y^2)^*$ die Relationen

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \{(v,w) : v \in \hat{C}(\mathcal{M}), w \in \hat{C}'(\mathcal{M}), \mathrm{conf}(v) = \mathrm{conf}(w), \mathrm{seq}(v) = \mathrm{seq}(w)\},\\ \tau_1 &= \{(v,w) : v \in \hat{C}'(\mathcal{M}), w \in \hat{C}'(\mathcal{M}) \cup \hat{C}(\mathcal{M}),\\ &\qquad \mathrm{conf}(v) = \mathrm{conf}(w), \mathrm{seq}(v) = \mathrm{seq}(w), \mathrm{num}(v) + 1 = \mathrm{num}(w)\}.\end{aligned}$$

Beide Relationen sind synchron und regulär, τ_1 ist außerdem eine injektive Funktion. Weiterhin seien $\hat{C}0(\mathcal{M}) = \hat{C} \setminus \hat{C}2(\mathcal{M})$, $\hat{U}'_{\mathcal{M}} = \{(v,w) : v \in \tau_0(\hat{C}0(\mathcal{M}), w = \tau_1(v)\}$ und $\hat{E}_{\mathcal{M}} = \hat{U}_{\mathcal{M}} \cup \hat{U}'_{\mathcal{M}}$. $\hat{C}0(\mathcal{M})$ ist eine reguläre Sprache, $\hat{U}'_{\mathcal{M}}$ und $\hat{E}_{\mathcal{M}}$ sind synchrone reguläre Relationen.

Durch die Kanten aus $\hat{U}'_{\mathcal{M}}$ wird für jeden Knoten w aus $\hat{C}$, der kein Endknoten einer Kante aus $\hat{U}_{\mathcal{M}}$ ist, ein Weg der Länge $\mathrm{num}(w) - 1$ mit dem Endknoten w eingefügt. Der n-te Graph von $\mathcal{G}(\hat{E}_{\mathcal{M}})$ besteht somit aus paarweise disjunkten Wegen der Länge $(n-1)$. Die Endknoten der Wege sind die Knoten $w \in \hat{C}(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{num}(w) = |w|$. Startknoten sind die Knoten $v \in \hat{C}(\mathcal{M}) \cup \tau_0(\hat{C}0(\mathcal{M}))$ mit $\mathrm{num}(v) = 1$. Der Weg mit dem Startknoten $\hat{c}_n$, $\mathrm{conf}(\hat{c}_n) = \pounds z_0 \$^{n-3}$, $\mathrm{seq}(\hat{c}_n) = (z_0, \pounds, 0)$, $\mathrm{num}(\hat{c}_n) = 1$, endet genau dann in einem Knoten w mit $\mathrm{conf}(w) \in FC(\mathcal{M})$, wenn das leere Wort durch $\mathcal{M}$ in genau $(n-1)$ Schritten akzeptiert wird.

Ist andererseits $E'_{\mathcal{M}} = \{(v,w) \in \tau_1 : |\mathrm{seq}(v)| = |v|\}$, so besteht der n-te Graph von $\mathcal{G}(E'_{\mathcal{M}})$ ebenfalls aus paarweise disjunkten Wegen der Länge $(n-1)$ mit den Endknoten $w \in \hat{C}(\mathcal{M})$, $\mathrm{num}(w) = |w|$. Startknoten sind die Knoten $v \in \hat{C}'(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{num}(v) = 1$ und $|\mathrm{seq}(v)| = |v|$. Der Weg mit dem Startknoten c'_n, $\mathrm{conf}(c'_n) = \pounds z_0 \$^{n-3}$, $\mathrm{seq}(c'_n) = (z_0, \pounds, 0)^n$, $\mathrm{num}(c'_n) = 1$, endet nie in einem Knoten w mit $\mathrm{conf}(w) \in FC(\mathcal{M})$, während der Weg mit dem Startknoten c''_n, $\mathrm{conf}(c''_n) = \pounds q \$^{n-3}$, $\mathrm{seq}(c''_n) = (q, \pounds, 0)^n$, $\mathrm{num}(c''_n) = 1$, immer in einem Knoten w mit $\mathrm{conf}(w) \in FC(\mathcal{M})$ endet.

Schließlich konstruieren wir die synchronen regulären Relationen $\hat{E}1_{\mathcal{M}}, E1'_{\mathcal{M}}, \hat{E}2_{\mathcal{M}}, E2'_{\mathcal{M}} \subseteq (Y^2)^* \times (Y^2)^*$ mit

$$\hat{E}1_{\mathcal{M}} = \hat{E}\mathcal{M} \cup \{(v, \hat{c}_{|v|}) : v \in \hat{C}(\mathcal{M}), \mathrm{num}(v) = |v|, \mathrm{conf}(v) \in FC(\mathcal{M})\},$$

$$\begin{array}{rcl} E1'_{\mathcal{M}} & = & E'_{\mathcal{M}} \cup \{(v, c'_{|v|}) : v \in \hat{C}(\mathcal{M}), \mathrm{num}(v) = |v|, \mathrm{conf}(v) \in FC(\mathcal{M})\}, \\ \hat{E}2_{\mathcal{M}} & = & \hat{E}\mathcal{M} \cup \{(v, \hat{c}_{|v|}) : v \in \hat{C}(\mathcal{M}), \mathrm{num}(v) = |v|, \mathrm{conf}(v) \in FC(\mathcal{M})\}, \\ E2'_{\mathcal{M}} & = & E'_{\mathcal{M}} \cup \{(v, c''_{|v|}) : v \in \hat{C}(\mathcal{M}), \mathrm{num}(v) = |v|, \mathrm{conf}(v) \in FC(\mathcal{M})\}. \end{array}$$

Die Graphen $G_n(\hat{E}1_{\mathcal{M}})$ und $G_n(E1'_{\mathcal{M}})$ sind genau dann isomorph, wenn $\mathcal{M}$ das leere Wort nicht in $(n-1)$ Schritten akzeptiert, $G_n(\hat{E}2_{\mathcal{M}})$ und $G_n(E2'_{\mathcal{M}})$ sind genau dann isomorph, wenn $\mathcal{M}$ das leere Wort in $(n-1)$ Schritten akzeptiert. Damit ist das Problem, ob $\mathcal{M}$ das leere Wort akzeptiert, auf das Äquivalenzproblem für $\hat{E}1_{\mathcal{M}}$ und $E1'_{\mathcal{M}}$ sowie auf das Disjunktheitsproblem für $\hat{E}2_{\mathcal{M}}$ und $E2'_{\mathcal{M}}$ reduziert. Da alle Schritte bei der Definition von $\hat{E}1_{\mathcal{M}}$, $E1'_{\mathcal{M}}$, $\hat{E}2_{\mathcal{M}}$ und $E2'_{\mathcal{M}}$ konstruktiv waren, folgt:

Satz 3.6.16 *Das Äquivalenzproblem und das Disjunktheitsproblem sind unentscheidbar für synchrone reguläre Kantengrammatiken.*

Zum Schluß des Kapitels zeigen wir für einige Probleme, die bezüglich synchronen regulären Kantengrammatiken entscheidbar sind, die Unentscheidbarkeit für umfassendere Familien von Kantengrammatiken. Dazu werden einige Unentscheidbarkeitsresultate für one-turn Zählerautomaten benötigt.

Lemma 3.6.17 *Gegeben sei ein one-turn Zählerautomat $\mathcal{A}$ mit Eingabealphabet X. Die folgenden Fragen sind unentscheidbar:*

1. *Gilt $L(\mathcal{A}) = X^*$?*
2. *Gilt $L(\mathcal{A}) \cap X^{[n]} = X^{[n]}$ für ein $n \geq 0$?*
3. *Ist $L(\mathcal{A})$ kürzbar? Ist $L(\mathcal{A})$ k-kürzbar für ein gegebenes k?*

Beweis.

1. Siehe z.B. den Beweis von Ibarra in [20].
2. Wir modifizieren den Beweis für (1) aus [20]. Es sei $\mathcal{M} = (Z, X, z_0, \pounds, \$, \delta, F)$ eine deterministische Turingmaschine mit einseitigem Eingabeband. Der Lauf von $\mathcal{M}$ auf dem leeren Eingabeband wird durch das unendliche Wort

   $$\xi = c_0\delta(c_0)\delta^2(c_0)\cdots \text{ mit } c_0 = \pounds z_0$$

   beschrieben. Es sei L die Menge aller Wörter, die kein Präfix von ξ sind oder ein Symbol aus F enthalten. Falls $\mathcal{M}$ das leere Wort akzeptiert, so kommt in ξ ein Zeichen aus F vor, und das Komplement von L ist endlich. Anderenfalls ist für alle $n \in \mathbb{N}$ das Präfix der Länge n von ξ nicht in L enthalten.
   Damit gilt: $L \cap X^{[n]} = X^{[n]}$ für ein $n \in \mathbb{N} \iff \lambda \in L(\mathcal{M})$.

   Es bleibt zu zeigen, daß L von einem blinden one-turn Zählerautomaten akzeptiert wird. Dazu stellen wir L wie folgt dar:

(1) L enthält alle Wörter, die nicht mit $\pounds$ beginnen.

(2) L enthält genau dann ein Wort $w = \pounds w_1 \pounds w_2 \cdots \pounds w_n$, $w_i \in (X \cup Z \cup \{\$\})^*$, wenn

   (a) $w_1 \neq z_0$ oder
   (b) $\pounds w_i \notin C(\mathcal{M})$ für ein $1 \leq i \leq n-1$ oder
   (c) $\pounds w_i \in FC(\mathcal{M})$ für ein $1 \leq i \leq n$ oder
   (d) $(\pounds w_i, \pounds w_{i+1}) \notin \delta$ für ein $1 \leq i \leq n-2$ oder
   (e) w_n ist kein Präfix von $\delta(w_{n-1})$.

Die Bedingungen (1) und (2a,2b,2c) kann man leicht durch einen endlichen Automaten überprüfen. Um die Verletzung der Nachfolgebedingung, also die Erfüllung von (2d,2e), zu überprüfen, benötigt man einen Automaten mit one-turn Zähler, siehe [20].

3. Es sei $\mathcal{A}$ ein one-turn Zählerautomat mit Eingabealphabet Y mit der akzeptierten Sprache $L = L(\mathcal{A})$, $a \notin Y$ sei ein Symbol und $X = Y \cup \{a\}$ sei ein Alphabet. Die Sprache $L' = a^*L \cup a^*Y^*a^+$ wird durch einen (effektiv konstruierbaren) one-turn Zählerautomaten akzeptiert. Gilt $L = Y^*$, so ist $L' = a^*Y^*a^*$ und damit im strengen Sinne 1-kürzbar. Gilt hingegen $w \notin L$ für ein $w \in Y^*$, so sind alle Wörter $a^m w a^n$ mit $m \geq 0$ und $n \geq 1$ in L', während $a^m w$ für alle $m \geq 0$ nicht in L' enthalten ist, d.h., L' ist nicht kürzbar. Damit ist das Universalitätsproblem für $\mathcal{A}$ auf das Kürzbarkeitsproblem für L' zurückgeführt. □

Satz 3.6.18 *Es ist unentscheidbar, ob eine reguläre bzw. eine synchrone lineare Kantengrammatik eine kürzbare Graphenfolge erzeugt.*

Beweis. Zu einem one-turn Zählerautomat $\mathcal{A}$ kann man eine reguläre bzw. synchrone lineare Kantengrammatik Γ mit $E(\Gamma) = \{(w, c^{|w|}) : w \in L(\mathcal{A})\}$ konstruieren. Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der letzten Aussage des vorigen Lemmas. □

Satz 3.6.19 *Es ist unentscheidbar, ob für eine gegebene reguläre bzw. synchron lineare Kantengrammatik* Γ

- *ein Graph aus* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *vollständig ist,*
- *alle Graphen aus* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *vollständig sind.*

Beweis. Es seien X ein Alphabet $a \notin X$ ein Symbol und $\mathcal{A}$ ein one-turn Zählerautomat mit dem Eingabealphabet X. Man kann eine synchrone lineare bzw. eine reguläre Kantengrammatik Γ mit dem Knotenalphabet $X \cup \{a\}$ konstruieren, so daß

$$E(\Gamma) = \{(a^{|w|}, w), (w, a^{|w|}) : w \in L(\mathcal{A})\} \cup (X^* \times X^*) \cup (a^* \times a^*) \setminus \{(\lambda, \lambda)\}$$

gilt. Der Graph $G_n(\Gamma)$ hat die Knotenmenge $X^{[n]} \cup \{a^n\}$. Er ist genau dann vollständig, wenn $L(\mathcal{A}) \cap X^{[n]} = X^{[n]}$ erfüllt ist. Damit existiert ein vollständiger Graph in $\mathcal{G}(\Gamma)$ genau dann, wenn $L(\mathcal{A}) \cap X^{[n]} = X^{[n]}$ für ein n gilt; alle Graphen aus $\mathcal{G}(\Gamma)$ sind genau dann vollständig, wenn $L(\mathcal{A}) = X^+$ gilt. □

Zum Schluß soll gezeigt werden, daß die Frage nach der Beschränktheit der Knotengrade für synchrone lineare Kantengrammatiken unentscheidbar ist. Dies steht im Kontrast zu den Sätzen 3.6.7 und 3.6.12. Es besteht erneut ein enger Zusammenhang zwischen Knotengrad und dem Grad der Mehrdeutigkeit für lineare Grammatiken. Für eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ und ein Wort $w \in T^*$ ist der *Grad der Mehrdeutigkeit* $d_G(w)$ von w bezüglich G definiert als die Anzahl der zu w gehörenden Ableitungsbäume, was im Falle linearer Grammatiken mit der Anzahl der verschiedenen Ableitungen von w in G identisch ist. Der Grad der Mehrdeutigkeit d_G von G ist definiert als $d_G = \sup\{d_G(w) : w \in T^*\}$. Außerdem sei $d_G(A, w)$ für $a \in N$ der Grad der Mehrdeutigkeit von w bezüglich $G_A = (N, T, P, A)$. Wir beschränken uns auf lineare Grammatiken $G = (N, T, P, S)$ in der folgenden Normalform:

- $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, $S \in N_1$
- Alle Regeln von G haben eine der Formen $A_1 \to aB$, $A_2 \to Ba$, $B \to a$, jeweils mit $A_1 \in N_1, A_2 \in N_2, a \in T, B \in N$.

Lemma 3.6.20 *Es sei G eine lineare Grammatik in Normalform. Man kann eine synchrone lineare Kantengrammatik Γ konstruieren, so daß $V1(\Gamma) = L(G)$ und $d_{out}(v|\Gamma) = d_G(v)$ für $v \in L(G)$ gilt.*

Beweis. $G = (N, T, P, S)$ habe m paarweise verschiedene Regeln $p_1, \ldots, p_m$. Sei $H = (N, T \times Y, Q, S)$ die lineare Grammatik mit $Y = \{1, \ldots, m\}$ und $Q = \{A \to \alpha^{(j)} : p_j = A \to \alpha, 1 \le j \le m\}$, wobei $\alpha^{(j)}$ aus $\alpha \in (N \cup T)^*$ entsteht, indem man $a \in T$ durch (a, j) und $A \in N$ durch A ersetzt. Wir zeigen durch vollständige Induktion über die Länge von w, daß

$$d_G(A, w) = \text{card } \{\alpha \in (T \times Y)^* : A \Rightarrow_H^* \alpha, \text{pr}_1(\alpha) = w\}$$

für alle $w \in X^*$ und $A \in N$ gilt. Für $a \in T$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} d_G(A, a) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } A \to a \in P \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \text{card } \{\alpha \in (T \times Y) : A \Rightarrow_H \alpha, \text{pr}_1(\alpha) = a\}. \end{aligned}$$

Für $w = av$, $a \in T, v \in T^+$ und $A \in N$ gelten folgende Rekursionen:

$$\begin{aligned} d_G(A, w) &= \sum_{A \to aB \in P} d_G(B, v) \\ &= \text{card } \sum_{A \to aB \in P} \text{card } \{\alpha \in (T \times Y)^* : B \Rightarrow_H^* \alpha, \text{pr}_1(\alpha) = v\} \\ &= \text{card } \{\alpha \in (T \times Y)^* : A \Rightarrow_H^* \alpha, \text{pr}_1(\alpha) = w\}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man das entsprechende Resultat für $A \in N_2$. Interpretiert man jetzt H als synchrone lineare Kantengrammatik, so folgt sofort die Behauptung. □

Lemma 3.6.21 *Es sei G eine lineare Grammatik in Normalform. Es ist unentscheidbar, ob $d_G < \infty$ sowie ob $d_G \leq k$ für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Zu jeder linearen Grammatik $H = (N, T, P, S)$ mit Regeln der Form $A \to uBv$, $A \to w$ mit $A, B \in N$, $uv, w \in T^+$ kann man eine äquivalente lineare Grammatik G in Normalform konstruieren, so daß $d_G(w) = d_H(w)$ für alle $w \in T^*$ gilt. (Für eine Regel $A \to a_1 \dots a_m B b_1 \dots b_n$, $m, n \geq 2$ führt man z.B. die neuen Nichtterminale $A_1, \dots, A_{m-1}, B_1, \dots, B_n$ sowie die Regeln $A \to a_1 A_1, A_1 \to a_2 A_2, \dots, A_{m-1} \to a_m B_n$, $B_n \to B_{n-1} b_n, \dots, B_1 \to B b_1$ ein.) In [18, Satz 8.9] wird durch Reduktion des *Postschen Korrespondenzproblems* gezeigt, daß das Problem der Mehrdeutigkeit einer linearen Grammatik H unentscheidbar ist. Dieser Beweis läßt sich leicht erweitern, um zu zeigen, daß die Frage nach der Beschränktheit von d_H unentscheidbar ist, selbst wenn bekannt ist, daß d_H entweder 1 oder ∞ ist. □

Aus den letzten beiden Lemmata folgt:

Satz 3.6.22 *Es sei Γ eine synchrone lineare Kantengrammatik. Es ist unentscheidbar, ob der Ausgangsgrad der Knoten in $\mathcal{G}(\Gamma)$ beschränkt ist bzw. durch eine gegebene Zahl k beschränkt ist.*

Abschließende Bemerkungen

Die Erzeugung von Graphenfamilien mittels Kantengrammatiken wurde ausführlich untersucht. Die Attraktivität dieses Modells der Erzeugung von Graphen liegt in der engen Verbindung zur klassischen Theorie der formalen Sprachen und in der Möglichkeit, wichtige Graphenfamilien einfach zu beschreiben.

Besonders viele positive Resultate konnten unter Verwendung der Theorie der endlichen Automaten für die Teilfamilie der synchronen regulären Kantengrammatiken nachgewiesen werden. Aussagen zur Struktur der erzeugten Graphen wie auch die Entscheidbarkeit der Beschränktheit des maximalen Knotengrades ergaben sich direkt aus bekannten Resultaten über rationale Potenzreihen. Einige mengentheoretische und graphentheoretische Operationen, wie die Vereinigung, die Bildung des Komplementärgraphen oder des Line-Graphen, konnten auf natürliche Weise in Operationen mit Sprachen umgewandelt werden.

Positive Abschluß- und Entscheidbarkeitsresultate wurden für jene graphentheoretischen Eigenschaften, die mit den Mitteln der Logik erster Stufe definierbar sind, gezeigt. Für andere Eigenschaften, wie z.B. Zusammenhang, wurden negative Ergebnisse bewiesen. Dies ist ein Nachteil gegenüber „konfluenten“ Knotenersetzungsgrammatiken sowie Hyperkantenersetzungsgrammatiken, wo positive Resultate für jene Eigenschaften bekannt sind, die mit Hilfe der monadischen Logik zweiter Stufe definiert werden können [13, 10]. Offen bleibt die Frage, ob die negativen Ergebnisse auf Kantengrammatiken mit kürzbarer Graphenfolge (d.h. auf deterministische parallele NLC-Grammatiken) übertragen werden können. Die Ideen der Unentscheidbarkeitsbeweise für sequentielle NLC-Grammatiken sind hier anscheinend nicht zu verwenden.

Als wichtigste neue Ergebnisse für allgemeine kontextfreie Kantengrammatiken zeigten wir die Charakterisierung der erzeugten Knoten- und Kantensprachen durch Valenzgrammatiken und die Entscheidbarkeit des Elementproblems. Das zweite Resultat bildet einen interessanten Kontrast zur Unentscheidbarkeit des Teilgraphproblems. Es ergibt sich aus den positiven Abschluß- und Entscheidbarkeitseigenschaften für schlanke Valenzsprachen, die ebenfalls in dieser Arbeit gefunden wurden. Einige Varianten und Erweiterungen des Problems der Schlankheit für Grammatiken mit gesteuerter Ersetzung werden in [37] betrachtet. Als wichtiges offenes Problem verbleibt die Charakterisierung schlanker Valenzsprachen etwa in Analogie zu den *paired loops* für kontextfreie schlanke Sprachen.

Außerdem zeigten wir, daß man für Valenzgrammatiken über $(\mathbb{Z}^k, +, \vec{0})$ Normalformen konstruieren kann. Die Frage der Existenz von Normalformen für Valenzgrammatiken mit nichtkommutativen Steuermonoiden bleibt offen. Von Bedeutung ist dieses Problem vor allem für Valenzgrammatiken über endlichen Monoiden, da diese äquivalent zu Matrixgrammatiken sind.

Insgesamt ist das Konzept der Steuerung durch Valenzen sehr attraktiv. Es ist einfach und durch die Verwendung verschiedener Monoide sehr flexibel. Außerdem stellen sich einige Operationen wie die Permutation und der Durchschnitt mit semilinearen Mengen als einfache Valenztransduktionen heraus. Es gibt viele Verallgemeinerungen und Varianten, wie z.B. die Kopplung von Valenzen mit anderen Steuerungsmechanismen oder parallele Systeme mit Valenzen. Einige Untersuchungen in diesen Richtungen wurden bereits in Zusammenarbeit mit Herrn Dr. Fernau unternommen, für eine Zusammenfassung der Ergebnisse siehe [15].

Literaturverzeichnis

[1] Francine Berman. Edge grammars and parallel computation. In *Proceedings of the Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pages 214–223, 1983.

[2] Francine Berman and Gregory Shannon. Edge grammars: Formal languages and decidability issues. In *Proceedings of the Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pages 921–930, 1983.

[3] Francine Berman and Gregory Shannon. Representing graph families with edge grammars. *Information Sciences*, 70:241–269, 1993.

[4] Francine Berman and Lawrence Snyder. On mapping parallel algorithms into parallel architectures. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 4:439–458, 1987.

[5] Jean Berstel and Christophe Reutenauer. *Rational Series and Their Languages.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1988.

[6] Bruno Courcelle. Graph rewriting: An algebraic and logic approach. In Jan van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 5, pages 193–242. Elsevier, 1990.

[7] J. Dassow, G. Păun, and A. Salomaa. On thinness and slenderness of L languages. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 49:152–158, February 1993. Technical Contributions.

[8] Jürgen Dassow. Decision problems for edge grammars. In *Mathematical Foundations of Computer Science 1994 (LNCS 841)*, pages 286–295, 1994.

[9] Jürgen Dassow and Gheorghe Păun. *Regulated Rewriting in Formal Language Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[10] Frank Drewes, Annegret Habel, and Hans-Jörg Kreowski. Hyperedge replacement graph grammars. In Grzegorz Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1, pages 95–162. World Scientific, Singapore, 1997.

[11] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg–Berlin–Oxford, 1996.

[12] Grzegorz Rozenberg (editor). *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, Singapore, 1997.

[13] Joost Engelfriet. Context-free graph grammars. In Grzegorz Rozenberg and Arto Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 3, pages 125–213. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1997.

[14] Joost Engelfriet and Grzegorz Rozenberg. Node replacement graph grammars. In Grzegorz Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1, pages 1–94. World Scientific, Singapore, 1997.

[15] Henning Fernau and Ralf Stiebe. Regulation by valences. In Igor Prívara and Peter Ružička, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 1997*, pages 239–248, 1997.

[16] Sheila A. Greibach. Remarks on blind and partially blind one-way multicounter machines. *Theoretical Computer Science*, 7:311–324, 1978.

[17] Annegret Habel. *Hyperedge Replacement Grammars and Languages.* Number 643 in LNCS. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1992.

[18] John Hopcroft and Jeffrey Ullman. *Einführung in die Automatentheorie, formale Sprachen und Komplexitätstheorie.* Addison Wesley, Bonn–Reading(Mass.), 1979.

[19] O. H. Ibarra, S. K. Sahni, and C. E. Kim. Finite automata with multiplication. *Theoretical Computer Science*, 2:271–296, 1976.

[20] Oscar H. Ibarra. Restricted one-counter machines with undecidable universe problems. *Mathematical Systems Theory*, 13:181–186, 1979.

[21] Lucian Ilie. On a conjecture about slender context-free languages. *Theoretical Computer Science*, 132:427–434, 1994.

[22] Lucian Ilie. On lengths of words in context-free languages. Technical Report 137, TUCS - Turku Centre for Computer Science, 1997.

[23] Dirk Janssens and Grzegorz Rozenberg. On the stucture of node label controlled graph languages. *Information Sciences*, 20:191–216, 1980.

[24] Dirk Janssens, Grzegorz Rozenberg, and R. Verraedt. On sequential and parallel node-rewriting graph grammars I. *Computer Graphics and Image Processing*, 18:279–304, 1982.

[25] Dirk Janssens, Grzegorz Rozenberg, and R. Verraedt. On sequential and parallel node-rewriting graph grammars II. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 23:295–312, 1983.

[26] Victor Mitrana. Valence grammars on a free generated group. *EATCS Bulletin*, 47:174–179, 1992.

[27] Victor Mitrana and Ralf Stiebe. The accepting power of finite automata over groups. In G. Păun and A. Salomaa, editors, *New Trends in Formal Languages*, pages 39–48, 1997.

[28] Gheorghe Păun. A new generative device: Valence grammars. *Rev. Roum. Math. Pures Applic.*, 1980.

[29] D. Raz. Length considerations in context-free languages. *Theoretical Computer Science*, 183(1):21–32, August 1997.

[30] V. Red'ko and L. Lisovik. Regular events in semigroups (in Russian). *Problems of Cybernetics*, 37:155–184, 1980.

[31] Hans-Joachim Röder. *Parallele BNLC-Graphgrammatiken.* Dissertation, Universität Passau, 1992.

[32] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[33] Grzegorz Rozenberg and Arto Salomaa, editors. *Handbook of Formal Languages.* Springer, Berlin, 1997.

[34] Arto Salomaa. *Formale Sprachen.* Springer, Berlin, 1973.

[35] Arto Salomaa and M. Soittola. *Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series.* Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1978.

[36] Giorgio Satta. The membership problem for unordered vector grammars. In J. Dassow, G. Rozenberg, and A. Salomaa, editors, *Developments in Language Theory II*, pages 267–275, 1996.

[37] Ralf Stiebe. Slender matrix languages. In Wolfgang Thomas, editor, *Developments in Language Theory (Preproceedings)*, Aachener Informatik-Berichte 99-5, 1999.

[38] Sorina Vicolov. Hierarchies of valence languages. In J. Dassow and A. Kelemenova, editors, *Developments in Theoretical Computer Science*, pages 191–196, Basel, 1994. Gordon and Breach.

[39] Sorina Vicolov-Dumitrescu. Grammars, grammar systems, and gsm mappings with valences. In Gheorghe Păun, editor, *Mathematical Aspects of Natural and Formal Languages*, pages 473–491, Singapore, 1994. World Scientific.

[40] Lutz Volkmann. *Fundamente der Graphentheorie.* Springer-Verlag, Wien–New York, 1996.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfaßt, andere als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle (Saale), den 13. Januar 2000

Lebenslauf

Name:	Ralf Stiebe
Geburtsdatum:	8. Februar 1968
Geburtsort:	Rostock
Staatsbürgerschaft:	deutsch
Familienstand:	ledig, 1 Kind

Ausbildung:

September 1988 – Mai 1993:	Mathematikstudium an der TU „Otto von Guericke“ Magdeburg
Mai 1993:	Diplom-Mathematiker
Juni 1993 – März 1996 :	Promotionsstudium der Informatik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Tätigkeiten:

seit April 1996:	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Halle (Saale), den 13. Januar 2000