Zur Endlichkeit von Bildsprachen zu tabellierten Ketten-Code-Bild-Systemen

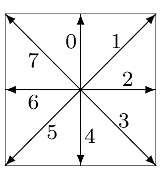
Bianca Truthe
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
FIN/ISG
Postfach 4120
39016 Magdeburg
e-mail: truthe@isg.cs.uni-magdeburg.de

KURZFASSUNG

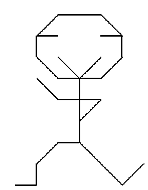
Es werden synchrone, tabellierte, kontextfreie Ketten-Code-Bild-Systeme (*sT0L*-Systeme) in Hinsicht auf die Endlichkeit der von ihnen erzeugten Bildsprachen untersucht. Dabei wird gezeigt, daß es entscheidbar ist, ob ein solches System eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht, und eine Methode angegeben, mit der zu jedem *sT0L*-System entschieden werden kann, ob es eine endliche Bildsprache erzeugt oder nicht.

Ketten-Code-Bild-Sprachen sind ein grammatikalischer Ansatz zur Beschreibung von Bildern (Strichgraphiken). Sie basieren auf der Erzeugung von Wörtern über einem speziellen Alphabet und der Interpretation dieser Wörter als Bilder. Sie können als eine formale Beschreibung der Arbeitsweise gewisser Plotter aufgefaßt werden.

Ketten-Code-Bild-Sprachen wurden von H. Freeman eingeführt. Bei Ketten-Codes entsteht ein Bild durch eine Folge von Zeichenbewegungen, die durch Symbole repräsentiert sind. Ein Wort beschreibt ein Bild, das durch Nacheinanderausführung der Zeichenschritte seiner Buchstaben entsteht. Freeman benutzt ein achtelementiges Alphabet $\{ 0, \ldots, 7 \}$, dessen Elemente entsprechend folgender Skizze interpretiert werden:



Das rechte Bild wird beispielsweise durch das Wort 2012 331 577 00 250 67 32 0 670 26 1223 62 456 73 1 beschrieben:



Der Zusammenhang von Wörtern und Bildern legt es nahe, Beziehungen zwischen formalen Sprachen und Bildsprachen zu suchen. In den 80er Jahren wurden Ketten-Code-Bild-Sprachen untersucht, bei denen die zugrunde liegenden Wortsprachen zur Chomsky-Hierarchie gehören.

Bei den biologisch motivierten Lindenmayer-Systemen wird eine Variante der Ketten-Codes verwendet, die auf der Schildkrötengeometrie basiert. Dabei werden nur die vier Richtungen 0, 2, 4, 6 betrachtet, für die – in Anlehnung an Plotter-Befehle – u, r, d, l (up, right, down, left) geschrieben wird.

Kontextfreie Lindenmayer-Systeme werden in folgende Klassen eingeteilt: $D0L$ (deterministisches Ersetzen von Buchstaben), $0L$ (nichtdeterministisches Ersetzen), $DT0L$ (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der deterministisch ersetzt wird) und $T0L$ (nichtdeterministische Auswahl einer Ersetzungstabelle, nach der nichtdeterministisch ersetzt wird).

Hier werden spezielle *T0L*-Systeme, die synchronen *T0L*-Systeme (*sT0L*-Systeme) betrachtet. Es sei $\mathcal{A} = \{ r, u, l, d \}$ das Alphabet mit den vier Richtungen. Die Wörter über diesem Alphabet lassen sich als Abbildungen auf dem $\mathbb{Z}^2$ ansehen. Dabei ordnet jede der vier Richtungen einem Punkt $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ seinen entsprechenden Nachbarn $x(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} + \mathfrak{v}_x$ zu, wobei

$$\mathfrak{v}_r = (1,0), \quad \mathfrak{v}_l = -(1,0), \quad \mathfrak{v}_u = (0,1), \quad \mathfrak{v}_d = -(0,1)$$

gilt. Dem Leerwort λ entspricht die identische Abbildung. Ein zusammengesetztes Wort $\mathsf{vw} \in \mathcal{A}^*$ symbolisiert die verkettete Abbildung $\mathsf{v} \circ \mathsf{w}$:

$$\mathsf{v} \circ \mathsf{w} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit } \mathfrak{q} \mapsto \mathsf{w}(\mathsf{v}(\mathfrak{q})).$$

Eine Abbildung, die zusammen mit einer Abbildung x einen Diagonalnachbarn liefert, wird durch $^{\perp}$ gekennzeichnet. Die Inversen zweier Abbildungen x und $x^{\perp}$ werden durch $\bar{x}$ bzw. $\bar{x}^{\perp}$ symbolisiert. Die nebenstehende Tabelle zeigt die entsprechenden Funktionen.

x	$\bar{x}$	$x^{\perp}$	$\bar{x}^{\perp}$
r	l	u	d
l	r	d	u
u	d	r	l
d	u	l	r

Wenn $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_n$ ein aus Buchstaben $w_1, \ldots, w_n$ zusammengesetztes Wort ist, so bezeichne $\overrightarrow{w_i}$ das Teilwort bis zum i-ten Buchstaben: $\overrightarrow{w_i} = w_1 \cdots w_i$. Werden die Buchstaben als Zeichenbefehle aufgefaßt, so sind Wörter Befehlsfolgen. Durch Abarbeiten solcher Befehlsfolgen entstehen Bilder. Diese Bilder sind Polygonzüge, bei denen die Ecken Punkte des $\mathbb{Z}^2$ sind und die Kanten achsenparallel verlaufen. Die Polygonzüge werden durch Gittergraphen beschrieben. Ein Gittergraph ist ein Graph, bei dem die Knotenmenge eine Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$ ist und jede Kante zwei benachbarte Knoten $\mathfrak{q}$, $x(\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}^2$ und $x \in \{ r, l, u, d \}$ verbindet.
Es seien $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}^2$ ein Punkt (Anfangspunkt) und $\mathsf{w} = w_1 \cdots w_n$ ein Wort über dem Alphabet $\mathcal{A}$. Die Knotenmenge $\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ zu w bezüglich $\mathfrak{a}$ sei die Menge aller „angelaufenen“ Punkte:

$$\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \{ \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) \mid i = 0, \ldots n \}.$$

Der gerichtete Gittergraph $g^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ beschreibt den „Zeichenablauf“ (Kanten, die mehrfach gezeichnet werden, treten auch mehrfach in der Kantenfolge auf):

$$g^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \left(\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \}_{i=1,\ldots,n} \right).$$

Abstrahiert man von den Mehrfachkanten, so erhält man den schlichten, gerichteten Gittergraphen $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$

$$s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = (\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})) \mid i = 1, \ldots, n \}).$$

Jede Kante von $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ hat die Form $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}))$. Da $\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}) = w_i(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}))$ und die Abbildungen r, l, u, d bijektiv sind, ist die Kante $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}))$ eindeutig durch $(\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), w_i)$ beschrieben. Es treten keine isolierten Knoten auf; der Graph ist zusammenhängend. Somit entspricht dem schlichten, gerichteten Gittergraphen $s^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ umkehrbar eindeutig die Kantenmenge

$$\|^{\mathfrak{a}}\mathsf{w} = \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), w_i) \mid i = 1, \ldots, n \}.$$

Abstrahiert man schließlich von den Kantenrichtungen, entsteht das Bild

$$p^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = (\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}), \{ (\overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a})), (\overrightarrow{w_i}(\mathfrak{a}), \overrightarrow{w_{i-1}}(\mathfrak{a})) \mid i = 0, \ldots, n \}).$$

Wenn eine Folge von Zeichenbefehlen abgearbeitet ist, interessiert nur noch das entstandene Bild, aber nicht, wie es entstanden ist. Da jedes Wort eine endliche Länge hat, liegt das entsprechende Bild in einem beschränkten Rechteck, der Bildfläche

$$\boxdot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \le x \le \overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \quad \text{und} \\ \underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \le y \le \overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \end{array} \right\},$$

wobei $\underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$, $\underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$, $\overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ und $\overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ die Randkoordinaten der Knoten aus $\odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w})$ darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \min\{\, x \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}\,, & \underline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \min\{\, y \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}\,, \\ \overline{x}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \max\{\, x \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}\,, & \overline{y}^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) &= \max\{\, y \mid (x,y) \in \odot^{\mathfrak{a}}(\mathsf{w}) \,\}\,. \end{aligned}$$

Wenn nichts anderes angegeben wird, liegt der Anfangspunkt im Nullpunkt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Der obere Index an den Funktionsnamen wird dann weggelassen.
Wenn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Rechtecke sind, dann sei die erweiterte Vereinigung $\mathfrak{X} \Cup \mathfrak{Y}$ das kleinste Rechteck, das die Vereinigung $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ enthlt.
Mit $\mathbb{A}$ sei die Menge aller endlichen und nichtleeren Teilmengen von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{A}$ bezeichnet. Das Mengensystem $\mathbb{A}$ bildet mit den Operationen Vereinigung $\cup$ und Konkatenation $\cdot$ einen Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$, da $(\mathbb{A}, \cup)$ und $(\mathbb{A}, \cdot)$ Halbgruppen sind und die bekannten Distributivgesetze gelten.
Es seien κ, μ zwei natürliche Zahlen, $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_0$. Ein Endomorphismus h auf dem Halbring $(\mathbb{A}, \cup, \cdot)$ heißt (κ, μ)-Endomorphismus, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ folgendes erfüllt ist: Wenn $x' \in h(\{\, x \,\})$ ist, so gilt

1. $x'(\mathfrak{o}) = \kappa \mathfrak{v}_x$ und
2. $\boxdot(x') \subseteq \kappa[\mathfrak{o}, \mathfrak{v}_x] \Cup \mu[\mathfrak{v}_{x^\perp}, \mathfrak{v}_{\bar{x}^\perp}]$.

Das Anwenden von h auf eine Wortmenge W wird Ableiten genannt. Die erste Synchronisationsbedingung gibt an, wo die Bild-Endpunkte der ersten Ableitungen des Alphabets liegen; die zweite Bedingung bewirkt, daß das Bild zu jeder Ableitung von $x \in \mathcal{A}$ in einem gewissen Rechteck liegt. Der Parameter κ gibt eine Längenänderung beim Ableiten an; im Falle $\kappa = 0$ heißt der Endomorphismus längenkontrahierend, im Falle $\kappa = 1$ längenkonstant und im Falle $\kappa > 1$ längenexpandierend. Der Parameter μ ist eine obere Schranke für die Breitenänderung beim Ableiten.
Ein synchrones, tabelliertes, kontextfreies Ketten-Code-Bild-System (genannt *sT0L*-System) ist ein Tripel

$$G = (\mathcal{A}, h, \omega)$$

mit dem Alphabet $\mathcal{A} = \{\, r, l, u, d \,\}$, einem nichtleeren Startwort (Axiom) $\omega \in \mathcal{A}^+$ und einer endlichen, nichtleeren Menge $h = \{\, h_1, \ldots, h_m \,\}$ von (κ_i, μ_i)-Endomorphismen h_i mit $i = 1, \ldots, m$. Mit h^n sei die Menge aller n-stelligen Verknüpfungen von Elementen aus h bezeichnet:

$$h^n = \{\, h_{i_1} \circ \cdots \circ h_{i_n} \mid i_j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}\,;\ j = 1, \ldots, n \,\}\,.$$

Desweiteren sei $h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ die Menge aller Wörter, die durch die Elemente von h^n entstehen:

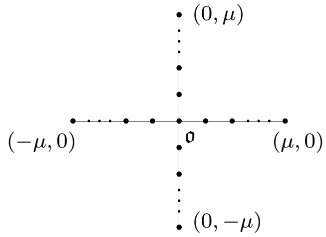
$$h^n(\{\, \mathsf{w} \,\}) = \bigcup_{h_* \in h^n} h_*(\{\, \mathsf{w} \,\}).$$

Die Elemente aus $h^n(\{\, \mathsf{w} \,\})$ sind die n-ten Ableitungen von w. Die von einem *sT0L*-System G erzeugte Bildsprache B_G ist die Menge aller Bilder von Ableitungen des Axioms ω:

$$B_G = \{\, p(\mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in h^n(\{\, \omega \,\}), n \in \mathbb{N}_0 \,\}\,.$$

Ein *sT0L*-System heißt längenexpandierend, wenn mindestens ein (κ_i, μ_i)-Endomorphismus $h_i \in h$ längenexpandierend ist. Es heißt längenkontrahierend, wenn alle Endomorphismen aus h längenkontrahierend sind. Andernfalls ist mindestens ein Endomorphismus aus h längenkonstant; alle anderen sind längenkontrahierend. Diese *sT0L*-Systeme sollen längenkonstant heißen.

Bei einem längenkontrahierenden System wird jedes Wort auf ein Wort abgebildet, dessen Kanten auf folgendem Kreuz liegen:



Es gibt $(\mu{+}1)^4$ verschiedene „Teilkreuze“, die zusammenhängend sind und den Nullpunkt enthalten. Da das Bild des Axioms möglicherweise nicht dazu gehört, enthält die erzeugte Bildsprache höchstens $(\mu+1)^4+1$ Bilder und ist daher endlich.
Bei einem längenexpandierendem System wird in jedem Ableitungsschritt die Bildfläche größer. Folglich entstehen unendlich viele Bilder.
Unter den längenkonstanten Systemen gibt es sowohl solche mit endlicher Bildsprache als auch solche mit unendlicher Bildsprache. Es seien $f = \{\, f_1, \ldots, f_m \,\}$ eine Menge von längenkonstanten (κ_i, μ_i)-Endomorphismen f_i, $g = \{\, g_1, \ldots, g_k \,\}$ eine Menge von längenkontrahierenden (κ_j, μ_j)-Endomorphismen g_j, $h = f \cup g$ die Vereinigung beider Endomorphismen-Mengen und $G = (\mathcal{A}, h, \omega)$ ein *sT0L*-System. Die von G erzeugte Bildsprache B_G ist genau dann endlich, wenn für jeden Buchstaben $x \in [h^2(\{\, \omega \,\})]$, der in einer zweiten Ableitung von ω auftritt, die ersten drei Ableitungen von x mittels der längenkonstanten Endomorphismen aus h keine andere x-Kante als $(\mathfrak{o}, x)$ liefern:

$$|B_G| < \infty \iff \forall x \in [h^2(\{\, \omega \,\})] : \; \|_x x = \|_x f(\{\, x \,\}) = \|_x f^2(\{\, x \,\}) = \|_x f^3(\{\, x \,\}).$$

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Ergebnisse zu *sT0L*-Systemen.

Längenverhalten von G	Mächtigkeit der Bildsprache
längenkontrahierend	$\lvert B_G\rvert \le (\mu+1)^4+1$
längenexpandierend	$\lvert B_G\rvert = \infty$
längenkonstant	$\lvert B_G\rvert < \infty \iff \forall x \in [h^2(\{\, \omega \,\})] :$ $\|_x x = \|_x f(\{\, x \,\}) = \|_x f^2(\{\, x \,\}) = \|_x f^3(\{\, x \,\})$